单墫　主编

数学名题词典

shuxue mingti cidian



江苏教育出版社

数学名题词典

shuxue mingti cidian



单墫　主编

江苏教育出版社

书　　名　数学名题词典
主　　编　单　墫
责任编辑　王建军　王巧林
出版发行　江苏教育出版社
地　　址　南京市马家街 31 号(邮编 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京展望照排印刷有限公司
印　　刷　盐城市印刷厂
厂　　址　盐城市纯化路 29 号　(邮编　224001)
开　　本　850×1168 毫米　1/32
印　　张　33
插　　页　4
字　　数　790 000
版　　次　2002 年 7 月第 1 版
　　　　　2002 年 7 月第 1 次印刷
印　　数　1—3 000 册
书　　号　ISBN 7-5343-3879-4/G·3573
定　　价　67.90 元
邮购电话　025-5400774,8008289797
批发电话　025-3303538,3300420
盗版举报　025-3300952,6635549

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
邮购免收邮费，提供盗版线索者给予重奖

编 者 的 话

数学名题是在数学发展历史长河中形成，并对数学发展、数学应用和数学教学等方面起过或仍起着重要作用的数学问题．这类问题在数学史或数学教育史上有重要的地位和特殊的作用，如促进数学新概念或新分支的诞生、推动新数学思想方法的形成、揭示数学应用的新方向，以及对数学教育产生积极作用和重大影响（这样，名题也包括某些趣题），等等．因此对数学名题的介绍，无疑有利于人们了解数学的发展和理解数学思想方法的形成，有益于开阔数学研究的视野，而且还有助于数学的教和学．基于以上的认识，我们编写了本词典，供中小学数学教师教学与研究的参考，并作为高师院校数学系科学生和爱好数学的中学生课外学习和探索的读物．所以，本词典名题入选的范围以初等数学为主，并适当扩充和提高．

本词典的编写是在正确把握名题的涵义和广泛搜集文献资料的基础上开展的．先按学科的知识体系分工提出初入选名题的题条，然后进行归纳整理形成本词典题条的讨论稿．为了严格审定入选名题是否恰当和有否重大遗漏，接着邀请了国内这方面的专家教授对讨论稿进行深入细致地逐条审议和商定，并通过对题条的增删、提炼修正和变动题条的某些安排顺序等，确定了本词典入选名题的目录．又为了提高编写的质量，参编人员各先编写出名题的样条，相互交流、讨论，以商定编写的具体格式和体例．最后，在各人编写修改好后，统一由单墫审核定稿．

本词典是在江苏教育出版社的倡议和亲切关怀下开展的，并

得到南京师范大学数学与计算机科学学院领导的大力支持和鼓励，有关专家教授给予了热情帮助和指导，还有一些同志提供了资料和意见，在此一并表示衷心感谢.

对本词典的编写，虽经多次审阅修改以力求完善，但因主客观条件所限，失误与不当之处在所难免，我们恳请专家学者和广大读者批评指正.

编者

2001年10月

目　　录

算　　术

数 论

代　　数

几　何

高等数学

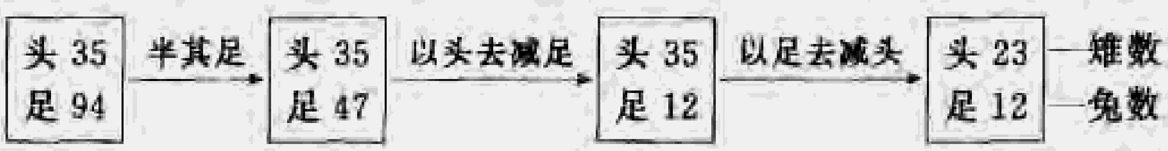
算　术

一　整　数

雉兔同笼　今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足. 问雉兔各几何？

本题是《孙子算经》卷下第 31 题.《孙子算经》是一部注重实际应用、通俗有趣的普及性数学著作，成书于 4～5 世纪，现传本三卷.

其解答（“术”）是：“上置头，下置足. 半其足，以头除（减）足，以足除（减）头，即得. ”解题过程是：



“半其足，以头除足”，即设想将雉兔的足都削去一半，这时雉的足数与头数相等，而兔的足数却是头数的两倍. 所以，雉兔的“半足数”减去头数剩下的应是兔的头数. 求出兔的头数，就容易求出雉数了：

$$\begin{aligned}\text{半足数} &= \text{雉头数} + 2\times\text{兔头数}\\ &= \text{总头数} + \text{兔头数}.\end{aligned}$$

故
$$\text{兔头数} = \text{半足数} - \text{总头数},$$
$$\text{雉头数} = \text{总头数} - \text{兔头数}.$$

本题中，
$$\text{兔　数} = 94 \div 2 - 35 = 12(\text{只}),$$
$$\text{雉　数} = 35 - 12 = 23(\text{只}).$$

本题的“术”（解法）是典型的中国古代筹式运算过程，由于解

题方法设计得简单巧妙，从而使运算十分简捷.

人们把这类饶有趣味的问题专门称为“鸡兔同笼”问题. 这类问题广泛流传，而且还传到了海外，如日本的“龟鹤算”就是我国的“鸡兔同笼”问题.

参考文献 [1,p.320],[6,p.185].

（睢秋生）

和尚分馒头 一百馒头一百僧，
大僧三个更无争，
小僧三人分一个，
大小和尚得几丁？

这是我国明代数学家程大位(1533～1603)所著的《算法统宗》第14卷中的一题.《算法统宗》共17卷，是一本比较完备的应用算术书. 其中收有一些以诗歌形式编述的算题. 该书于1592年出版后不久在国内外广泛流传，影响很大.

本题意思是100个和尚分吃100个馒头，规定大和尚1人吃3个，而小和尚3人合吃1个. 问大和尚几人，小和尚几人？

如果把1个大和尚与3个小和尚作为一组，那么根据题意4个和尚合吃4个馒头，平均1人吃1个，正巧100个和尚吃100个馒头.

由于4个馒头中有3个馒头是大和尚吃的，小和尚只吃了1个，所以在100个馒头中，

大和尚吃 $100 \div 4 \times 3 = 75$(个)，

小和尚吃 $100 \div 4 = 25$(个).

由于在4个和尚中，大和尚只有1个，小和尚有3个，所以在100个和尚中，有

大和尚 $100 \div 4 = 25$(人)，

小和尚 $100 \div 4 \times 3 = 75$(人).

参考文献 [3,p.861].

（睢秋生）

"巴赫沙利手稿"中的问题(The problem from Bakhshāli Manuscript) 在四位捐献者中,乙捐献的数目是甲的2倍,丙捐献的数目是乙的3倍,丁捐献的数目是丙的4倍,捐献总数为132,求甲捐献的数目.

本题选自"巴赫沙利手稿".这些手稿是1881年在印度西北部的巴赫沙利发掘出来的.大概是八九世纪时转抄三四世纪时算术书的残页.下面的解答出自该手稿.

假设甲捐献1份,则乙捐献2份,丙捐献6份,丁捐献24份,那么总共捐献了33份.所以,甲捐献的数目是$132 \div 33 = 4$.

参考文献 [15,p.15,p.118].

(葛 军)

分100的问题(The problem of dividing number 100) 两次将100分成大小两部分,第一次分得的大部分等于第二次分得的小部分的两倍;第二次分得的大部分等于第一次分得的小部分的三倍.求两次分法中的大小部分各是多少?

本题选自丢番图的著作《算术》.《算术》是最早的一本代数论著,原书有13卷,现存仅6卷.

根据题意,第一次的大部分是第二次的小部分的2倍,所以,第一次的小部分加上第二次的小部分正好等于第二次的大部分.又已知第二次的大部分是第一次的小部分的3倍,所以,第二次的小部分是第一次的小部分的$2(=3-1)$倍.因此,第一次的小部分的$5(=2+3)$倍是100,第一次的小部分是$20(=100\div5)$,大部分是$80(=100-20)$,第二次的大部分是$60(=20\times3)$,小部分是$40(=20\times2)$.

参考文献 [15,p.8,p.87].

(葛 军)

驮货问题(The packing goods' problem) 驴和骡驮着货物并排走在路上,驴子不住地埋怨驮的货物太重,压得受不了.骡子对它

说:"你发什么牢骚啊!我驮的比你更重.倘若你驮的货物给我一口袋,我驮的货物就比你驮的重一倍;而我若给你一口袋,咱俩才刚好一样重."问驴和骡各驮几口袋货物?

本题源自《希腊诗文集》,后又被收入各种数学教科书中,如欧拉的数学教科书.《希腊诗文集》(*The Greek Anthology*)大约成书于4世纪初,是由希腊学者 Metrodorus 编写的.这是一本用诗歌形式写成的问题集.

由题意,骡驮的货物比驴驮的货物的2倍少 $1\times2+1=3$ 袋;又骡驮的货物比驴驮的货物多 $1+1=2$ 袋.所以,驴驮的货物的2倍少3袋等于驴驮的货物多2袋.由此推得,驴驮的货物为 $(3+2)\div(2-1)=5$ 袋,骡驮的货物为 $5+2=7$ 袋.

参考文献 [10,p.149],[15,p.59,p.93].

(葛 军)

上下移动(Move up and down) 孩子把一支六角形蓝铅笔紧贴在一支六角形黄铅笔上.蓝铅笔下端贴着的地方涂着一层漆,长1厘米.孩子把黄铅笔拿住不使它动,把蓝铅笔紧贴着黄铅笔往下移1厘米,接着又移上来,回到原先位置;然后,再把蓝铅笔下移1厘米,再回到原先位置,如此下去.他把蓝铅笔往下移了10次,往上回复了10次(共20次动作).如果他在移动铅笔的这段时间里,铅笔上的漆没有干也没有用完,那么,在第20次动作后,黄铅笔上沾的漆应该有多少厘米长?

这题目是数学家列奥尼特·米哈依洛维奇·雷巴科夫一天在打野鸭回家的路上想出来的.他是怎么想出来的呢?走在路上,他瞧着自己的长统靴,看见在行走时两只靴子互相擦着的地方,从下到上沾满了泥.

"这是什么道理,"列奥尼特·米哈依洛维奇想,"我没有走过泥泞很深的地方,泥却一直沾到了膝盖."

想了一会儿,他明白了其中的道理,并出了这道题.

两支铅笔最初贴起来时，黄铅笔上就有1厘米长的漆.当蓝铅笔下移1厘米，那么，蓝铅笔上又有1厘米长的地方沾着了漆（黄铅笔上的），接着蓝铅笔上移到原来位置，紧贴着的黄铅笔上又有1厘米长的地方沾着了漆.

由此可见，蓝铅笔上下移动1次（2次动作），黄铅笔上沾的漆就增长1厘米.上下移动10次（20次动作），黄铅笔上沾的漆就增长10厘米，所以，黄铅笔上有漆 $10+1=11$ 厘米.

参考文献　[17,p.6,pp.184～185].

（葛　军）

二　最大公约数、最小公倍数

封山周栈　今有封山周栈三百二十五里.甲、乙、丙三人同绕周栈行.甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里.问周行几何日会？

本题是《张邱建算经》上卷第10题.《张邱建算经》大约成书于466年至485年间，共三卷，涉及一些实际应用问题.

在绕山一周的栈道上，甲、乙、丙同向绕行，速度不同，问何时相会.这是个求三人速度的最大公约数的问题.

因为150、120、90的最大公约数是30，

所以 $325\div30=10\frac{5}{6}$（日），

即甲、乙、丙三人 $10\frac{5}{6}$ 日相会.

最大公约数在我国古代称作“等数”，很多数学著作里都介绍求“等数”的方法——“更相减损”法.它与现在的辗转相除法是一致的.

参考文献　[1,p.337].

（眭秋生）

三女归宁　今有三女，长女五日一归，中女四日一归，少女三日

一归.问三女何日相会?

本题是《孙子算经》下卷第35题.

题意是一家有三个女儿平时分别回娘家,大女儿5天回一次,二女儿4天回一次,小女儿3天回一次.问这三个女儿何时在娘家相会?

这是一则求最小公倍数问题.5,4,3的最小公倍数是60,故答案是三女60天相会一次.

参考文献 [1,p.322].

(眭秋生)

三营值夜 今有内营周七百二十步,中营周九百六十步,外营周一千二百步.甲、乙、丙三人值夜,甲行内营,乙行中营,丙行外营,俱发南门.甲行九,乙行七,丙行五.问各几何周,俱到南门?

本题是《张邱建算经》上卷第11题.

题意是已知内、中、外三座兵营的周长,以及士兵甲、乙、丙的巡营速度比是9∶7∶5,现在他们同时从各营的南门出发,问各行几周后同到各营南门?

因为内、中、外三营周长之比为

$$720:960:1\,200=3:4:5.$$

而速度之比为9∶7∶5,所以甲、乙、丙同到南门的周数之比为

$$\frac{9}{3}:\frac{7}{4}:\frac{5}{5}=12:7:4.$$

即甲、乙、丙分别行12周、7周、4周后同到各营南门.

参考文献 [1,p.337].

(眭秋生)

鸡蛋问题(Eggs' problem) 一个基督教徒提一篮鸡蛋来到市场.商人问他:“你有多少个鸡蛋?”基督教徒回答道:“先生,我不记得有多少个鸡蛋,只记得我在装鸡蛋时,如果每次往篮里放2个,

那么就余 1 个；每次放 3 个，也余 1 个；每次放 4 个，还余 1 个；每次放 6 个，还余 1 个；每次放 7 个，刚好一个不剩. 究竟有多少个鸡蛋，您自己去算吧！”

本题出自 17 世纪法国数学家 C. G. Bachet de Méziriac(1581～1638)1612 年出版的《趣味算题集》.

假如把篮中鸡蛋拿走 1 个，那么篮中鸡蛋数是 2、3、4、6 的倍数. 由最小公倍数的定义可知，现在篮中鸡蛋一定是 $12n$. 所以，原来篮中鸡蛋个数一定是 $12n+1$. 又原来篮中鸡蛋个数是 7 的倍数，即 $12n+1$ 是 7 的倍数. 设 $n=7k+s$，$s=0,1,2,3,4,5,6$，只有 $s=4$ 时，$12n+1$ 是 7 的倍数. 所以，原来篮中鸡蛋个数应为 $12\times(7k+4)+1=84k+49$，$k=0,1,2,\cdots$ 故篮中鸡蛋至少有 49 个，还可能是 133 个、217 个、301 个、385 个、469 个、553 个、637 个、721 个、…

注：《趣味算题集》中的答案为 721 个鸡蛋.

参考文献　[15，p. 22，p. 143]，[17，p. 175，p. 315].

（葛　军）

三　分　数

妇人荡杯　今有妇人河上荡杯，津吏问曰：“杯何以多？”妇人曰：“家有客.”津吏曰：“客几何？”妇人曰：“二人共饭，三人共羹，四人共肉，凡用杯六十五，不知客几何？”

本题是《孙子算经》卷下第 17 题.

题目是通过管渡口的人看到一个妇女在河边洗很多碗，便一问一答地给出了一道算题. 妇女说她家来了很多客人，只知道两人共吃一碗饭，三人共喝一碗汤，四人共吃一碗肉，总共用了六十五只碗，她叫津吏算算共来了多少客人.

本题的解法是：每个客人使用的碗数为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，总用碗数除以$\frac{13}{12}$即得人数：

$$65\div\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=65\div\frac{13}{12}=60(\text{人}).$$

参考文献 [1,p.315].

（睦秋生）

凫雁相逢 今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海．今凫雁俱起，问何日相逢？

本题是《九章算术》卷六"均输"的第 20 题.《九章算术》大约成书于东汉初期，是中国流传至今最古老的数学专门著作之一，共分九章，涉及与生产实践有联系的实际应用问题．它采用问题集的形式，每道题有问有答有术，有的是一题一术，有的是多题一术，或一题多术，共有 246 个问题 202 术．

题意是野鸭从南海飞 7 天到达北海；而大雁从北海飞到南海需 9 天．现在设野鸭和大雁同时相向而飞，速度不同，问何时相遇．这是个典型的行程问题．在我国古代算书中很常见．

解法： $$1\div\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=3\frac{15}{16}(\text{日}).$$

参考文献 [1,p.198].

（睦秋生）

五渠注池 今有池，五渠注之．其一渠开之，少半日一满；次，一日一满；次，二日半一满；次，三日一满；次，五日一满．今皆决之，问几何日满池？

本题是《九章算术》卷六"均输"的第 26 题．

题中"少半日"是指$\frac{1}{3}$日（我国古代分别用少半、半、太半表示$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$）．题中的每个"次"，是指"另一个"渠．题意是有一个水

池，由五个渠灌注.其中一渠单独灌水，$\frac{1}{3}$日注满水池；而另一渠单独灌水，需1日注满……现在五渠同时开放，问需多少时间才能注满水池？

这是一则工程问题，是世界各国算术书中常见的算题.

$$\text{其解法是：}1\div\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}+1+\frac{1}{2\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{15}{74}(\text{日}).$$

参考文献 [1,p.201].

（睦秋生）

盈不足问题 今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四.问人数、物价各几何？

本题是《九章算术》卷七"盈不足"的第1题.

盈不足问题又称盈亏（朒）问题，是我国古代数学中的一类重要问题，各种算书都列有这类问题.它的解法称为"盈不足术".设每人出钱数为a_1时，盈钱（多余）数为b_1；每人出钱a_2时，不足钱数为b_2，物价为u，人数为v，则

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{a_2b_1+a_1b_2}{a_1-a_2},\\ v&=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}\end{aligned}\right.\qquad(a_1>a_2).$$

于是，每人应出钱数 $x=\frac{u}{v}=\frac{a_2b_1+a_1b_2}{b_1+b_2}$.

本题的答案是：人数7人，物价53.

盈不足术是中国数学史上的一项杰出成就.它是把假设试验与推理论证结合起来的数学方法，常被用来解决一些比较复杂的问题.它是通过两次假设试算，将一般的应用问题化归为特定的盈亏类数学模式，然后用固定的演算程序求解.根据试算结果或盈或

亏或适足，分别给予解答.

我国的盈不足术经丝绸之路传到中亚细亚国家，受到特别重视. 在 11～13 世纪阿拉伯数学家的著作中就有盈不足术，他们称之为“契丹算法”，因为当时阿拉伯人称中国为“契丹”. 接着又从阿拉伯传到欧洲. 在中世纪的欧洲由于代数学还没有发展到充分利用符号的阶段，这种通过两次假设解题的“契丹算法”便成为万能的算法而受到推崇.“契丹算法”还有许多名称，如双设法、双假位法、迭借术、增损术、盈朒术等等.

参考文献 [1,p.205],[6,p.91],[8,p.803].

（睦秋生）

契丹算法 见盈不足问题.

盈亏(朒)问题 见盈不足问题.

双设法 见盈不足问题.

漆油相和 今有漆三(换)得油四，油四(调)和漆五. 今有漆三斗，欲令分以易油，还自和余(下来的)漆. 问出漆、得油、和漆各几何?

本题是《九章算术》卷七“盈不足”的第 15 题.

题意是：漆需用油来调和，已知 3 升漆可以换得 4 升油，而 4 升油可以调和 5 升漆. 现在只有 3 斗漆，问怎样安排换油才能把漆全部调和.

书中是用盈不足术来解的：“假令出漆九升，不足六升. 令之出漆一斗二升，有余二升.”意思是：若用 9 升漆换得 12 升油，则可以调和 15 升漆，这样才用掉漆 $9+15=24$(升)，原有 30 升，故“不足”6 升. 若用 12 升漆换得 16 升油，可以调和 20 升漆. 这样就将用漆 $12+20=32$(升)，比 30 升又多出 2 升，是典型的盈不足问题. 用盈不足术解，应出 $11\frac{1}{4}$ 升漆，可换得 15 升油，调和 $18\frac{3}{4}$ 升漆，正好将 3 斗漆全部调和.

参考文献 [1,p.213].

（眭秋生）

蒲莞等长 今有蒲生一日，长三尺；莞生一日，长一尺．蒲生日自半，莞生日自倍．问几何日而长等？

本题是《九章算术》卷七“盈不足”的第11题．

题意是：蒲和莞这两种植物第一天分别生长3尺和1尺．从第二天起，蒲每天的生长数是前一天的$\frac{1}{2}$，而莞每天的生长数是前一天的1倍．书中是用盈不足术来解的（见**盈不足问题**）．

设第二天为$a_1 = 2$，

$$蒲长 = 30 + 15 = 45（寸），$$

$$莞长 = 10 + 20 = 30（寸）．$$

可知莞不足蒲　$b_1 = 45 - 30 = 15$（寸）；

设第三天为$a_2 = 3$，

$$蒲长 = 30 + 15 + 7\frac{1}{2} = 52\frac{1}{2}（寸），$$

$$莞长 = 10 + 20 + 40 = 70（寸）．$$

可知莞已超（盈）蒲　$b_2 = 70 - 52\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$（寸）．

代入盈不足术公式

$$x = \frac{3 \times 15 + 2 \times 17\frac{1}{2}}{15 + 17\frac{1}{2}} = 2\frac{6}{13}（日）．$$

即$2\frac{6}{13}$日蒲和莞等长．

我国古代数学家是把蒲、莞在一日内的生长速度当做均匀的，因而可用盈不足术来解，所以答案只是近似的．

本题按照题意应该解方程

$$3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$
$$=1+2+2^{2}+\cdots+2^{x-1}.$$

利用几何级数求和公式化简、整理，得

$$2^{x}+6.2^{-x}-7=0,$$
$$2^{2x}-7.2^{x}+6=0.$$

解之得 $x=\log_{2}6\approx 2.59$(日).

参考文献 [1,p.211],[6,p.96].

（睦秋生）

计造军衣 问库有布、绵、絮三色，计料欲制军衣.其布，六人八匹少一百六十匹，七人九匹剩五百六十匹；其绵，八人一百五十两剩一万六千五百两，九人一百七十两，剩一万四千四百两；其絮，四人一十三斤少六千八百四斤，五人一十四斤适足.欲知军士及布、绵、絮各几何？

本题是我国南宋著名数学家秦九韶(1202～1261)所著的《数书九章》第十六卷中的一题.《数书九章》是一部划时代的名著，它不仅代表当时中国数学发展的水平，而且也标志中世纪世界数学的最高水平.全书共 18 卷，计 81 个问题，每题都包括答案、术和草.

本题实际上包括三个盈亏问题：求布，一盈一不足；求绵，两盈；求絮，一不足一适足.

分别利用盈不足术公式解答：兵士 15 120 人，布 20 000 匹，绵 300 000 两，絮 42 336 斤.

参考文献 [2,p.406].

（睦秋生）

分银子问题(The problem of dividing silver) 10 个兄弟分 100 两银子，后一个人比前一个人少，只知道每一级相差的数量都一

样，但究竟相差多少不知道. 现在第八个兄弟分到 6 两银子，问一级相差多少？

本题出自于巴比伦的泥板"书". 古巴比伦人采用"楔形"文字刻在一种泥板上，这种泥板晒干后很坚硬，就成了一种奇特的"书". 这种泥板的制作大抵在两个时期：公元前 2000 年左右和公元前 600 年到公元 300 年.

因为 10 个兄弟所分得的银子的平均数是 10 两，所以，第三个和第八个兄弟所分银子共 20 两. 已知第八个兄弟分得 6 两，所以，第三个兄弟应是 14 两，他们相差 8 两. 由于第三个兄弟比第八个兄弟高 5 级，因此，每一级相差 $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$ 两.

这是古巴比伦人的解法.

参考文献 [10,pp. 55～57].

（葛　军）

埃及的问题(Egypt's problem)　某人从宝库中取宝 $\frac{1}{3}$，另一人又从剩余的宝中取走 $\frac{1}{17}$，宝库中还剩宝 160. 宝库中原有宝多少？

本题出自兰德纸草书. 古埃及人把用到的数学知识写在一种水草的叶子上，称为纸草. 这样的纸草书现存两本，一本是伦敦本，一本是莫斯科本. 伦敦本因由苏格兰人兰德(A. Henry Rhind)于 1858 年购得而通常叫做兰德纸草书. 原稿出于公元前 2000 年到公元前 1700 年，记载了 84 道题，大部分是算术方面的，且用到了分数.

一人取走 $\frac{1}{3}$ 的宝，剩下 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 的宝，另一人取走剩下的宝的 $\frac{1}{17}$，最后还剩 $\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{17}\right)$ 的宝. 所以，宝库中原有宝是

$$160 \div \left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{17}\right)\right]=255.$$

参考文献 [15,p.2,p.46].

(葛 军)

Thymaridas 的问题(Thymaridas' problem) 用金、铜、锡和铁做了一个重 60 米纳克(古代金币)的王冠,其中金和铜占$\frac{2}{3}$,金和锡占$\frac{3}{4}$,金和铁占$\frac{3}{5}$,求金、铜、锡、铁的重量.

公元前 4 世纪希腊数学家 Thymaridas 给出了这个问题,后收入《希腊诗文集》.该问题是文集中的典型问题.

由题意知,王冠中金的重量的 3 倍与王冠中铜、锡、铁的重量之和是王冠重的$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)$倍.又王冠重 60 米纳克,所以,王冠中金的重量的 2 倍是王冠重的$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-1\right)$倍,从而推得王冠中金的重量为

$$60\times\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-1\right)\div 2=30.5(\text{米纳克}).$$

于是王冠中铜的重量为 $\frac{2}{3}\times 60-30.5=9.5$(米纳克);

锡的重量为 $\frac{3}{4}\times 60-30.5=14.5$(米纳克);

铁的重量为 $\frac{3}{5}\times 60-30.5=5.5$(米纳克).

参考文献 [20,pp.193~195,pp.173~174].

(葛 军)

Sridhara 问题(Sridhara's problem) 有一群蜜蜂,其中$\frac{1}{5}$落在杜鹃花上,$\frac{1}{3}$落在栀子花上,这两者的差的 3 倍飞向月季花,最后剩下一只小蜜蜂在芳香的茉莉花和玉兰花之间飞来飞去.问共有

几只蜜蜂?

本题选自印度数学家 Sridhara(850~900)的《计算的本质》.

由题意可知,一群蜜蜂的$\frac{1}{5}$落在杜鹃花上,$\frac{1}{3}$落在栀子花上,$3\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$落在月季花上,那么,这一群蜜蜂的

$$1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-3\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}$$

在茉莉花和玉兰花之间飞来飞去.所以,这一群蜜蜂共有

$$1\div\frac{1}{15}=15(\text{只}).$$

参考文献 [15,p.15,p.110].

(葛　军)

丢番图的年龄(Diophantus' age)

丢番图的墓志铭:

这里安葬着丢番图,

多么令人惊讶,

它忠实地记录了所经历的道路.

上帝给予的童年占六分之一,

又过十二分之一,两颊长出了胡子,

再过七分之一,点燃起结婚的蜡烛.

五年之后天赐一子,

可怜迟到的宁馨儿,

享年仅及其父之半,便进入冰冷的坟墓.

悲伤只有用数论的研究去弥补.

又过四年,他也走完了人生的旅途.

丢番图是古希腊亚历山大里亚时期的著名数学家,在世界数学史上具有突出的地位,被誉为"代数学的鼻祖".有关他的生平,

我们知道很少，只知道他的年龄，是用谜语的形式写在“墓志铭”上．这个墓志铭载于《希腊诗文集》，其中有 46 首和代数问题有关的短诗(Epigram)，这里引的是第 126 题．

根据墓志铭，丢番图婚后五年和寂寞的四年是他的一生的

$$1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2}=\frac{3}{28},$$

所以，丢番图一生活了

$$(5+4)\div\frac{3}{28}=84(\text{岁}).$$

参考文献 [7,p.231]，[10,pp.114～115]，[12,p.74]，[19,p.68]．

（葛　军）

爱神的烦恼(Alics' bother) 爱神 Alics 正在发愁，女神问其根由：

“你为什么烦忧，
我亲爱的朋友？”
“我在黑里康山采回仙果，
路遇 Muses 诸神嬉戏抢夺．
Euterpe 攫十二分之一，
Clio 拿走五分之一，
Tualia 取了八分之一，
二十分之一属于了 Melpomene，
四分之一被 Terpsichore 抢走，
七分之一分到了 Erato 之手，
Polyymnia 也还有三十个仙果进口，
Uraniaia 占了一百二十个，
Calliope 更有三百个之多，

我回家时几乎双手空空，
唯有 Muses 留给我的五十个仙果."
Alics 当初采摘，
共有仙果几颗？
本题选自《希腊诗文集》.
前六位女神取走仙果后，余下的仙果是原有仙果的

$$1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)=\frac{25}{168},$$

而余下的仙果被另外三位女神取走

$$30+120+300=450(\text{只}),$$

Alics 得到 50 只. 故共余下仙果 $450+50=500$(只). 所以，原有仙果

$$500\div\frac{25}{168}=3\,360(\text{只}).$$

注：这首问题诗中提到的人，皆是古代希腊神话中的神. Alics 是爱神. Muses 是希腊神话中司文艺美术九女神之总称，其中 Clio 司历史，Euterpe 司音乐，Tualia 司喜剧，Melpomene 司悲剧，Terpsichore 司舞蹈，Erato 司爱情诗，Polyymnia 司颂歌，Uraniaia 司天文，Calliope 司史诗.

参考文献 [10,pp. 113~114],[15,pp. 9~10].

（葛 军）

“巨人”吐水（The giantman pouring out water） 这是一座独眼巨人的铜像.

雕塑家技艺高超，
铜像中巧设机关：
巨人的手、口和独眼，
都连接着大、小水管.

通过手的水管，
三天流满水池；
通过独眼的水管——需要一天.
从口中吐出的水更快，
$\frac{2}{5}$天就足够.
三处同时放水，
水池几时流满？
本题选自《希腊诗文集》.

设水池的容积为1，根据题意，通过手的水管每天流入量为$\frac{1}{3}$；通过独眼的水管每天流入量为1；通过口的水管每天流入量为$\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$. 所以，三管同开流满水池所需时间为

$$1\div\left(\frac{1}{3}+1+\frac{5}{2}\right)=1\div\frac{23}{6}=\frac{6}{23}(\text{天}).$$

参考文献 [13,p.48],[15,p.10].

（葛 军）

大蛇进洞(The giant snake go into a cave) 一条长80安古拉(古印度长度单位)的大蛇，以$\frac{5}{14}$天爬$7\frac{1}{2}$安古拉的速度爬进一个洞，而蛇尾每$\frac{1}{4}$天长$\frac{11}{4}$安古拉. 算术家们，请告诉我，这条大蛇何时恰好全部进洞？

这道有趣的算术题载于古印度 Mahāvīra(约850年)所著的《计算精华》一书中.

大蛇不断往洞里爬，蛇尾也不停地向后长，要求出大蛇身体全部爬进洞的时间，可先分别求出大蛇向洞里爬行的速度和蛇尾生长的速度.

大蛇爬行速度为每天 $7\frac{1}{2}\div\frac{5}{14}=21$(安古拉),

蛇尾生长速度为每天 $\frac{11}{4}\div\frac{1}{4}=11$(安古拉),

两者的速度差为每天 $21-11=10$(安古拉).

那么,恰好全部进洞时间 $=80\div10=8$(天).

参考文献 [4,p.141].

(葛 军)

花拉子米问题(al-Khowārizmi's problem) 某数减去它的 $\frac{1}{3}$,再减去它的 $\frac{1}{4}$,余 8,求某数.

本题选自 9 世纪上半叶杰出的阿拉伯数学家花拉子米的著作《代数》(*Ilm al-jabr wa'l muqabalah*,约 820 年).这书译成拉丁文后,曾被欧洲作为代数学标准教科书使用了几个世纪,而拉丁文代数一词 algebra,一般认为是由 al-jabr 演变而来.

根据题意,得

$$8\div\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=19\frac{1}{5}.$$

故某数为 $19\frac{1}{5}$.

参考文献 [5,pp.89~91],[9,pp.11~12],[15,p.20,pp.134~135].

(葛 军)

Bhāskara 问题(Bhāskara's problem) 将某数乘 5,从所得乘积中减去乘积的 $\frac{1}{3}$,差再除以 10,然后依次加上原数的 $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,最后得 68.求某数.

本题选自 12 世纪杰出的印度数学家 Bhāskara(1114~约1185)的《天文学之王冠》.此书引论部分包括算术——《利拉瓦吉》(译为"美好的")和代数——《求根》.

Bhāskara 用假设法解出了该问题.

设所求之数为 3,则 $3\times 5=15$,它的$\frac{1}{3}$是 5,既然 $15-5=10$,则除以 10 之后得 1.再加上 3 的$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$,得

$$1+\frac{3}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{17}{4}.$$

因此,所求之数为 $3\times\left(68\div\frac{17}{4}\right)=48$.

参考文献 [15,p.16,p.124].

（葛 军）

Beha-Eddin 问题(Beha-Eddin's problem)

(1) 将 10 分为两部分,使其差等于 5.

(2) 有两笔钱,一多一少,其和等于 20,积等于 96,多的一笔钱被许诺赏给赛义德,问赛义德得到多少钱?

(3) 某数自乘一次,加 2,乘 2,再加 3,除以 5,再乘 10,最后得 50.求某数.

本题选自 14 世纪阿拉伯数学家 Beha-Eddin 所编的《计算艺术的实质》一书.

(1) 本题是"和差"问题,大部分等于 $(10+5)\div 2=7\frac{1}{2}$,小部分等于 $7\frac{1}{2}-5=2\frac{1}{2}$.

(2) 由于 $96=32\times 3=16\times 6=8\times 12=4\times 24=2\times 48$,而一大、一小两数和为 20,所以,只有大数等于 12,小数等于 8.故赛义德可得钱 12.

(3) 本题是"还原"问题,用"倒推法"可解.

$50\div 10=5$;$5\times 5=25$;$25-3=22$;

$22\div 2=11$;$11-2=9$;$9=3\times 3$.

故所求数是 3.

参考文献 [15,p.21,pp.138～139].

（葛　军）

牛顿问题(Newton problem) 有三片牧场,青草是一样厚的,而且长得一样快,它们的面积分别是 $3\frac{1}{3}$ 公亩、10 公亩和 24 公亩.第一片牧场饲养 12 头牛可以维持 4 个星期,第二片牧场饲养 21 头牛可以维持 9 个星期.问在第三片牧场上饲养多少头牛恰好可以维持 18 个星期?

本题原载于英国数学家 Wallis(1616～1703)的书中,后来,牛顿将该问题一般化,并载于 1707 年由剑桥大学出版的《普遍算术》中.

设每头牛一个星期的吃草量是 1,那么,4 个星期时,第一片牧场上牛的吃草量是 $4 \times 12 = 48$.

由于第二片牧场的面积是第一片牧场面积的 3 倍,所以,第二片牧场原有草量是第一片牧场原有草量的 3 倍,每一个星期长出的草量也是第一片牧场每一个星期长出的草量的 3 倍,从而,4 个星期时,第二片牧场草量是 $12 \times 4 \times 3 = 144$,9 个星期时,牧场总草量(牛吃草总量)应是 21×9. 因此,第二片牧场草量 $45(= 21 \times 9 - 144)$ 是 $5(= 9 - 4)$ 个星期里长出的草量,即一个星期里 1 公亩牧田长出的草量是 $45 \div 5 \div 10 = 0.9$. 故每公亩原有草量是

$$(21 \times 9 - 9 \times 0.9 \times 10) \div 10 = 10.8.$$

这样,第三片牧场 18 个星期内的草量为 $10.8 \times 24 + 24 \times 0.9 \times 18$,那么,在第三片牧场上饲养的牛的头数是

$$(10.8 \times 24 + 24 \times 0.9 \times 18) \div 18 = 36(\text{头}).$$

此题还可以用代数方法(列方程)求解.

参考文献 [15,p.38,p.193],[14,pp.10～11],[11,p.30],

[12,p.111],[16,pp.560～565],[18,p.41].

（葛　军）

算学生数(Calculating the number of students)　某人问老师："请告诉我,你班上有多少学生,因为我想送我的儿子到你班学习."老师回答道:"如果我班学生增加1倍,再增加$\frac{1}{2}$,再增加$\frac{1}{4}$,再加上你的儿子,将有100名学生."问班上现有多少学生?

本题选自俄罗斯杰出数学教育家马格尼兹基(Магницкий, Леонтий Филиповичь,1669～1739)所著的《算术,即数的科学》(1703年初版).该书作为教科书,在学校中一直用到18世纪中叶.

由题意得99(=100－1)个学生是班上学生的$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$倍,所以,班上学生有

$$99\div\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=36(\text{人}).$$

参考文献　[15,p.22,pp.143～144],[9,p.511].

（葛　军）

欧拉的卖鸡蛋问题(The problem of Euler's selling eggs)　两个农妇一共带了100个鸡蛋到市场上卖,两人鸡蛋不一样多,但卖得的钱却一样多.第一个农妇说:"假若我有你那么多的蛋,我可以卖15个克罗索(德国货币单位)."第二个农妇说:"假若我有你的这些蛋,我一定能卖$6\frac{2}{3}$个克罗索."问她们两人各有多少个鸡蛋?

本题选自瑞士数学家欧拉的名著《代数基础》.

假设第二个农妇的鸡蛋数目是第一个农妇的k倍.因为她们所得的钱数相等,所以,第一个农妇鸡蛋的价格是第二个农妇鸡蛋价格的k倍.如果在卖蛋前把她们两人的鸡蛋交换了,那么第一个

农妇的鸡蛋数与卖价都是第二个农妇的 k 倍,也就是第一个农妇所得钱数应该是第二个农妇的 k^2 倍.故 $k^2 = 15 \div 6\frac{2}{3} = \frac{9}{4}$,从而 $k = \frac{3}{2}$.

于是,只要把 100 个鸡蛋按 2∶3 分给两个农妇就行了.因而,第一个农妇有 40 个鸡蛋,第二个农妇有 60 个鸡蛋.

参考文献 [11,p.35],[10,p.145],[18,pp.119~121].

(葛 军)

托尔斯泰问题(Lev Tolstoy problem) 一组割草的人要把两片草地上的草割掉.一片大草地比小的大一倍.全体组员先用半天时间割大草地.到下午他们平均分为两组,一组仍留在大草地上,到傍晚时正好把这片大草地的草割完;另一组就到小草地上去割,到傍晚还剩下一小块,这小块由一人去割正好一天可以割完,问共有多少人参加割草?

俄国大文豪列夫·托尔斯泰曾研究过此问题,并给出算术巧解.人们常称此问题为"托尔斯泰问题".

在大草地上的割草队全体割了半天,接着全队的一半又割了半天才割完.显然,这一半人在半天内割了大草地的 $\frac{1}{3}$.

由于小草地是大草地的 $\frac{1}{2}$,设大草地为 1,则在小草地上,半队人割了半天后剩下的草地为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,而这相当于一人一天割 $\frac{1}{6}$ 大草地的草,所以,一个人的效率为一天割大草地的 $\frac{1}{6}$.

大、小草地合在一起是 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,割草队割了一天总共割了 $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times 8$,故割草队共有 8 人.

参考文献 [15,p.30,pp.155~156],[11,pp.27~29],[18,

pp. 35～38].

（葛　军）

木桶注水问题（The problem of barrelled water）　木桶上方有两个水管，单独打开其中一个，24 分钟可注满木桶；若单独打开另一个，则 15 分钟可注满木桶．木桶底还有一个小孔，水可以从孔中往外流，一桶水 2 小时后流完．若同时打开两个水管，且水从桶底的小孔中也同时流出，经过多少时间水桶才能装满？

本题出处不详，但大文豪托尔斯泰喜欢它，且给出如下解答．

考虑当两个水管同时打开，1 分钟后木桶应有多少水．

从一个水管（15 分钟注满木桶的一个）1 分钟流出的水占木桶容积的$\frac{1}{15}$，从另一个水管（24 分钟注满木桶的一个）1 分钟流出的水占木桶容积的$\frac{1}{24}$，而 1 分钟从小孔流出的水为木桶容积的$\frac{1}{120}$．因此$\frac{1}{15}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}=\frac{1}{10}$，也就是说，1 分钟木桶中积有的水为木桶容积的$\frac{1}{10}$．那么，10 分钟才能注满木桶．

参考文献　[15, pp. 31～32, p. 161], [13, pp. 58～60].

（葛　军）

四　比　例

粟为粝米　今有粟一斗，欲为粝米．问得几何？

本题是《九章算术》卷二"粟米"的第 1 题．

题意是问一斗粟（谷子）可以变（加工或交换）为多少粝米（糙米）？在"粟米"的一开始先列举各种粮食间的比率关系："粟米之法：粟率五十，粝米三十，粺米二十七，…"意思是

粟（谷子）：粝（糙）米：粺（九折）米：…＝50：30：27：…

根据这些比率关系可以进行这些相关粮食之间的交换或折算.

这类问题是由

$$所有率:所求率=所有数:所求数$$

的比例关系而解得

$$所求数=\frac{所有数\times所求率}{所有率}.$$

本题得

$$粝米=\frac{30\times1}{50}=0.6(斗).$$

在我国古代数学中,比例问题是题材相当广泛的一类问题.例如,在《九章算术》的“粟米”、“衰分”、“均输”、“勾股”等章中都有各种类型的比例问题,可以根据各种已知的比例关系来求出所需的答案.由于这类应用问题总是以“今有”二字开头给出数据,然后再问所求的数,因此,数学家刘徽把比例问题的解法专门称为“今有术”.

在古代印度数学中有一种称为“三率法”的算法(也称为“三数法则”),实际上就是我国的“今有术”,其三率就是指所有率、所有数和所求率.三率法经阿拉伯人传到西欧各国,风行一时,受到十分重视,并称之为“金法”——“黄金法则”.

参考文献 [1,pp.113].

(眭秋生)

五爵分鹿 今有大夫、不更、簪裹、上造、公士,凡五人,共猎得五鹿.欲以爵次分之,问各得几何?

本题是《九章算术》卷三“衰分”的第1题.

题意是:大夫、不更、簪裹(读作鸟)、上造、公士,这五个不同职位的官吏一齐打猎,共猎得5只鹿,但是不能均分,要依官阶高低按比例来分,问各分得多少?

这是按比例分配的问题，按题意从大夫到公士共五个等级，应按 5∶4∶3∶2∶1 的比例来分配，即

$$大夫得鹿 = 5 \times \frac{5}{5+4+3+2+1} = 1\frac{2}{3}(只),$$

不更、簪袅、上造、公士分别得鹿 $1\frac{1}{3}$ 只、1 只、$\frac{2}{3}$ 只、$\frac{1}{3}$ 只.

参考文献 [1,p.131].

（眭秋生）

食苗责粟 今有牛、马、羊食人苗. 苗主责之粟五斗. 羊主曰："我羊食半马."马主曰："我马食半牛."今欲衰偿之，问各出几何？

本题是《九章算术》卷三"衰分"的第 2 题.

题意是：牛、马、羊吃了人家的粟苗需要赔偿，由于牲畜食量大小不一，应该按照题设比例来赔偿（"衰偿之"）.

按题设羊、马、牛食量的比例应是 1∶2∶4，所以

羊主应赔偿 $50 \div (1+2+4) = 7\frac{1}{7}$(升),

马主应赔偿 $7\frac{1}{7} \times 2 = 14\frac{2}{7}$(升),

牛主应赔偿 $7\frac{1}{7} \times 4 = 28\frac{4}{7}$(升).

参考文献 [1,p.132].

（眭秋生）

互易推本 问出度牒，差人营运. 每三道，易盐一十三袋；盐二袋，易布八十四匹；布一十五匹，易绢三匹半；绢六匹，易银七两二钱. 今趁到银九千一百七十二两八钱. 欲知元关度牒道数几何？

本题是《数书九章》第 17 卷的第 3 题.

题意是有人拿出若干度牒（一种金融凭证），派遣人做生意. 已知每 3 道度牒可换 13 袋盐；2 袋盐可换布 84 匹；15 匹布可换绢

3.5 匹;6 匹绢可换银 7.2 两.现已换到银 9 172.8 两,想知道原来拿出几道度牒?

这是个比例问题,可用“今有术”(见粟为粝米)来解:

$$\text{度牒数} = \frac{9\,172.8 \times 6 \times 15 \times 2 \times 3}{72 \times 3.5 \times 84 \times 13} = 180(\text{道}).$$

参考文献 [2,p.438].

(睦秋生)

《算盘书》中的问题(The problem from *Liber abaci*) 某国王派 30 个人到他的果树园去植树.如果他们 9 天能植 1 000 株树,试问 36 个人多少天能植 4 400 株树?

本题是斐波那契的《算盘书》(*Liber abaci*)中的问题,他是为了举例说明三项法(或“三率法”,参看**粟为粝米**)而设计的.

由题意可得,每人每天植树[1 000÷(9×30)]株,那么 36 个人植 4 400 株树需

$$4\,400 \div \{[1\,000 \div (9 \times 30)] \times 36\} = 33(\text{天}).$$

按复比例,在植树株数一定时,植树的人数和天数成反比例;当植树的人数一定时,所植的株数和天数成正比例.设 36 人 x 天能植 4 400 株树,则

$$\left.\begin{matrix} 36 : 30 \\ 1\,000 : 4\,400 \end{matrix}\right\} = 9 : x, x = \frac{30 \times 4\,400 \times 9}{36 \times 1\,000} = 33(\text{天}).$$

参考文献 [20,pp.226~227,p.274].

(葛 军)

五 其 他

Lucas 问题(Lucas problem) 假定每天中午有一艘轮船从哈佛

开往纽约，并在每天同一时间同一公司也有一艘轮船从纽约开往哈佛．轮船在途中所花的时间相同，都是七昼夜．问今天中午从哈佛开出的轮船，将会遇到几艘同一公司的轮船从对面开来？

在19世纪一次国际科学会议期间，Lucas 提出了这个被认为困难的题目．

由图容易看出，从哈佛开出去的轮船，在途中遇到13艘轮船．此外还遇到两艘，一艘是在它起锚时遇到的（它从纽约开来，正好那天中午到达），另一艘是到达纽约时遇上的（它正要从纽约开出）．所以，一共遇到15艘轮船．

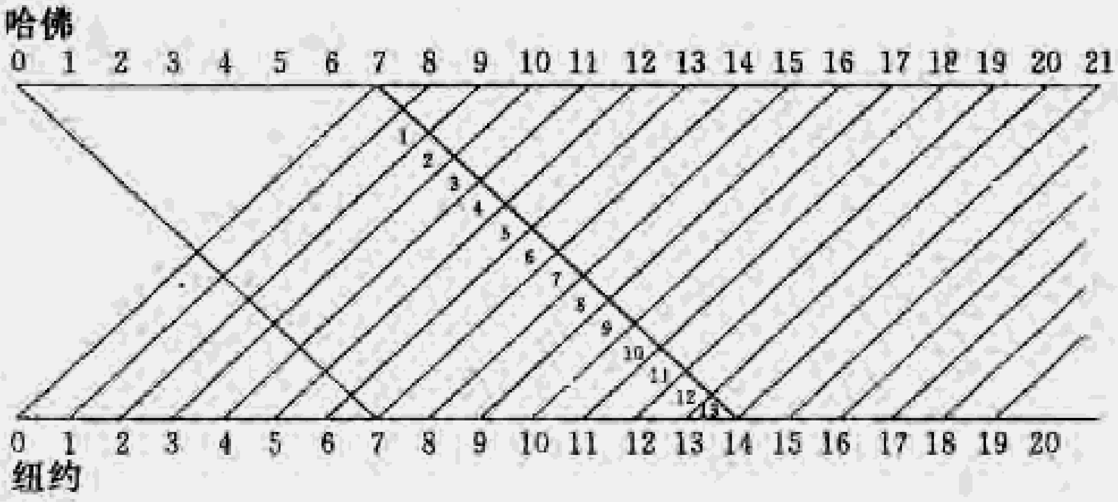


图 1-1

注：上面的图1-1（已简化了的）称为时间—路程图，又叫运行图．在人工智能的研究中，常用电子计算机编制复杂的火车、轮船、飞机等的运行图．

参考文献　[11，pp. 52～53]，[10，pp. 182～184]，[17，pp. 143～144，p. 285]．

（葛　军）

标签古题（Sticking wrong on some labels）桌上放有三个盖着盖的盒子，其中一个盒内放有2枚5分的硬币，一个放有2枚2分的硬币，还有一个放有5分和2分的硬币各1枚．三个盒上分别贴有10分、4分和7分的标签．不过，每个标签都贴错了．如果只允许从

一个盒内取出 1 枚硬币进行试看，你能正确地说出每个盒内装的是什么硬币吗？

设1 号盒子内的硬币是 $2\times5=10$ 分，2 号盒子内 $2\times2=4$ 分，3 号盒子内 $5+2=7$ 分. 因为每个标签均贴错了，所以只有两种贴错的可能：一是 1 号贴 7 分标签，2 号贴 10 分标签，3 号贴 4 分标签；二是 1 号贴 4 分标签，2 号贴 7 分标签，3 号贴 10 分标签.

若从贴有 10 分标签的盒内取出 1 枚硬币，则取出的是 2 分的或者是 5 分的硬币. 当取的是 2 分硬币，则此盒可能是 2 号盒或 3 号盒；当取的是 5 分硬币，则此盒可能是 1 号盒或 3 号盒. 故无法断定.

同理可知，若从贴有 4 分标签的盒内取 1 枚硬币，也无法断定三盒各装有的硬币.

由于贴有 7 分标签的盒内装有 2 个 5 分硬币或者 2 个 2 分硬币，当从贴有此标签的盒内取出的是 1 枚 5 分硬币，说明此盒内装有 2 个 5 分硬币，即 1 号盒，则贴有 10 分标签的是 2 号盒，贴有 4 分标签的是 3 号盒. 同样道理，可断定贴有 7 分标签的是 2 号盒，贴有 4 分标签的是 1 号盒，贴有 10 分标签的是 3 号盒.

所以，我们从贴有 7 分标签的盒内取出 1 枚硬币，就能正确断定三盒各装有的硬币.

参考文献 [11, p. 64].

（葛　军）

de Méziriac 问题（de Méziriac's problem）　一位商人有一个 40 磅的砝码，由于跌落在地而碎成 4 块. 后来，称得每块碎片的重量都是整磅数，而且可以用这 4 块来称从 1 至 40 磅之间的任意整数磅的重物. 问这 4 块砝码碎片各重多少？

本题来源于法国数学家 C. G. Bachet de Méziriac 在 1624 年出版的名著 *Problèmes plaisants et dèlectables qui se font par les*

nombres 中.

由题意知,砝码可以放在称量盘上,否则,此题无解.

由于要用 4 块砝码称量出 1～40 磅之间的整数磅重物,那么,利用"倒推法"可知,必有一个砝码是 1 磅,另一个砝码是 3 磅.这两个砝码能称出 1 磅,2 磅,3 磅,4 磅的重物.

为使称出的重量为最多,第三块砝码必须是(2×4+1=)9 磅,那么,这三块砝码能称出 1 至(9+4=)13 磅的所有整数磅的重物.

最后,如果选第四块砝码,使它的重量为(2×13+1=)27(磅),那么,这 4 块砝码便能称出从 1 至(27+13=)40 磅之间的任意整数磅的重物.

所以,这个砝码的 4 块碎片的重量分别为 1 磅,3 磅,9 磅,27 磅.

注:(1) 与此题相关的一般性结论是:

设有一系列砝码 $A,B,C,\cdots$ 把它们适当地分放在两个盘上,就能称出从 1 到 n 的所有整数磅的重物.如果有一块新砝码 P,它的重量 p 超过原有砝码的重量总和 n,超过量为原有砝码重量的总和加 1,即 $p-n=n+1$,或者 $p=2n+1$,那么,把砝码 P 加入砝码组 $A,B,C,\cdots$ 之后就能称出从 1 至 $(p+n=)3n+1$ 的所有整数磅的重物.

(2) 英国数学家 MacMahon 概括了 de Méziriac 的砝码问题(见 *Quarterly Journal of Mathematics*,1886 年,第 21 卷).他确定了可用来称出从 1 到 n 磅重量的所有可能的整数磅砝码.

参考文献 [14,pp.8～10],[11,pp.166～167].

(葛 军)

泊松问题(Poisson problem) 某人有 12 品脱(英容量单位,1 品脱=0.568 升)酒一瓶,想从中倒出 6 品脱,但他没有 6 品脱的容器,仅有一个 8 品脱和一个 5 品脱的容器.怎样的倒法才能使 8

品脱容器中恰好装了6品脱酒?

这是法国数学家泊松年轻时研究过的一道题.按照泊松自己的说法,这道题决定了他一生的道路:他决心要成为一个数学家.后来,泊松成为世界著名数学家,被选为欧洲许多国家科学院的院士,其中包括彼得堡科学院名誉院士.为纪念泊松,人们习惯把此问题称为泊松问题.

此题可有两种不同解法,为叙述方便,我们用列表法解.整个倒酒过程,一目了然.

第一种解法

12	8	5
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

第二种解法

12	8	5
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

参考文献 [15,p.40,p.213],[10,p.174].

(葛 军)

七个7的问题(The problem for seven of 7) 在下面的除式中,被除数可以被除数整除.试求出除式中所有星号“*”所表示的数字.

```
                 * * 7 * *
             ──────────────────────
* * * * 7 *) * * 7 * * * * * * *        ……第 1 行
             * * * * * *                ……第 2 行
             ──────────────────────
             * * * * * 7 *              ……第 3 行
             * * * * * * *              ……第 4 行
             ──────────────────────
                 * 7 * * * *            ……第 5 行
                 * 7 * * * *            ……第 6 行
                 ──────────────────
                 * * * * * * *          ……第 7 行
                 * * * * 7 * *          ……第 8 行
                 ──────────────────
                       * * * * * *      ……第 9 行
                       * * * * * *      ……第 10 行
                       ════════════
```

这个题来源于英国数学家 E. H. Berwick 的 *The School World*.

为了讨论问题方便，设除数为 $abc\,d7e$，商为 $fg\,7hm$，我们只要求出这两个数，此题也就解决了.

(1) 由于 $abc\,d7e \times 7 = *7****$，所以，$a$ 必为 1，$a=1$. 又第七行的余数是六位数，故推知 b 只能等于 0 或 1 或 2.

因 $10c\,d7e \times *$ 不可能为七位数，这与第四行不合，故 $b=1$ 或 2.

当 $b=1$ 时，根据 7 与数 $11c\,d7e$ 的积的第二位数字是 7，故 $c=0$ 或 1. 又 $110\,d7e \times *$ 不可能为七位数，从而推知 $c \neq 0$，即 $c=1$. 再依据 $111\,d7e \times *$ 可以是七位数，且有一个积是七位数 $****7**$，为使得此七位数的倒数第三位数是 7，则 $h=9$，且 $d=9$. 这样，$111\,d7e = 111\,97e$. 注意到 $111\,97e \times 7 = 787***$，而不是 $*7****$，所以，$111\,97e$ 也不合题意，即 $b \neq 1$，故 $b=2$.

(2) 对于除数 $12c\,d7e$，第三行、第七行的余数是七位数，故这两个七位数的第一位数字是 1，从而推知第四行、第八行的七位数的第一位数字也是 1.

又由 $12cd7e \times 7 = 87*****$ 可推知，第五行六位数的第一位数字是 9，从而推得第七行、第八行七位数的第二位是 0. 故有

```
                  f g 7 h m
12cd7e) * * 7 * * * * * * *
        * * * * * *
        1 * * * * 7 *
        1 * * * * * *
            9 7 * * * *
            8 7 * * * *
            1 0 * * * * *
            1 0 * * 7 * *
                  * * * * * *
                  * * * * * *
```

算式 1

```
                  f 8 7 8 m
12547e) * * 7 * * * * * * *
        * * * * * *
        1 * * * * 7 *
        1 0 0 3 7 * *
            9 7 * * * *
            8 7 8 * * *
            1 0 * * * * *
            1 0 0 3 7 * *
                  * * * * * *
                  * * * * * *
```

算式 2

(3) 由 $12cd7e \times 7 = 87*****$ 可知 $c = 4$ 或 5.

当 $c = 4$ 时，$124d7e \times 8 \leqslant 12497e \times 8 < 1\,000\,000$，而

$$124d7e \times 9 = 11***** \neq 10*****,$$

由此可知 $c = 4$ 不符合题意，故 $c = 5$.

显然，$125d7e \times 9 > 10*****$，而

$$125d7e \times 7 \leqslant 12597e \times 7 < 1\,000\,000.$$

所以，只有 $125d7e\times 8=100****$ 满足题意，那么，由第三行、第七行均为七位数，故 $g=h=8$，从而商数为 $f878m$.

(4) 又 $125d7e\times 8=100*7**$，则 $d\times 8$ 的个位数字或是 1 或是 2. 而 $d\times 8$ 的个位数字不可能是 1，那么，$d\times 8$ 的个位数字是 2，从而推知 $d=4$. 这样 $e\leqslant 4$.

所以，$12547e\times 8=10037**$，$12547e\times 7=878***$，这样就得算式 2.

(5) 根据算式 2 中第五行第三位数与下面几行对应数字关系，得这第三位数字必是 9，从而，第七行第三位数字是 1，第九行第一位数字是 1，这样推得 $m=1$.

(6) 根据算式 2 可知第三行必是 $1101*7*$，则第二行的第三位数字是 6 或 7，即有 $12547e\times f=**6***$ 或 $**7***$，那么，f 必须是 3 或 5. 而 $f=3$ 时，$12547e\times 3=3764**$，由此推知不论第一行第四位数字是多少，总不可能有 $10+*-4$ 或 $10+*-1-4$ 都等于 1. 故 $f=5$.

(7) 由 $101****-10037**=12547$ 得数 $101****$ 的第三位数字必是 6，第四位数字不小于 2. 当 $e=0$ 或 1 时，$12547e\times 7=87829*$，则由

$$979***-87829*=1016***$$

得，数 $979***$ 的第四位数字为 9，又

$$1101*7*-10037**=9799**,$$

则有数 $10037**$ 的第六位数字是 7 或 8，而 $12547e\times 8$ 的积的第六位数字不可能是 7 或 8，所以 $e\neq 0$，$e\neq 1$. 同样道理可推得 $e\neq 2$，$e\neq 4$，故 $e=3$.

因此，所求除数是 125 473，商是 58 781，则被除数是

$$125\,473\times 58\,781=7\,375\,428\,413,$$

列出算式 3.

```
                    5 8 7 8 1
125473) 7 3 7 5 4 2 8 4 1 3
        6 2 7 3 6 5
        ---------------------
        1 1 0 1 7 7 8
        1 0 0 3 7 8 4
        ---------------------
            9 7 9 9 4 4
            8 7 8 3 1 1
            -----------------
            1 0 1 6 3 3 1
            1 0 0 3 7 8 4
            -----------------
                1 2 5 4 7 3
                1 2 5 4 7 3
                ===========
```

算式 3

参考文献 [14,pp.12~16].

（葛　军）

四个 4 的游戏(Four of 4)　把四个 4,用+、−、×、÷和(　)等符号连起来,用以表示 0 和自然数的游戏.

1913 年英国的鲁兹·鲍尔在数学杂志上发表文章说:"用四个 4,可以作成从 1 到 1 000 的数.但是其中的 113、157、878、881、893、917、943、946、947 还没有作出来."

例如:$0=4+4-4-4$,或 $0=44-44$;

$1=4\div4+4-4$,或 $1=44\div44$;

$2=4\div4+4\div4$,或 $2=4-(4+4)\div4$;

$3=(4+4+4)\div4$;

$4=(4-4)\times4+4$;

$5=(4\times4+4)\div4$;

$6=(4+4)\div4+4$;

$7=44\div4-4$;

$8=4+4+4-4$;

$9=4+4+4\div4$;

$10=(44-4)\div4$;

……

比这四个游戏更早的“四个 9 的游戏”，是 1859 年由英国数学家霍艾威尔博士提出来的.

参考文献 [13，pp. 140～141].

（葛 军）

无字天书（No letter's problem） 下面算式中每一个星号“*”表示一个数字（0～9 中的一个），试求出所有“*”所表示的数字.

```
           * * * *.* * * *
         ─────────────────
 * * * ) * * * * * *
         * * *
         ─────────────────
             * * *
             * * *
         ─────────────────
               * * *
               * * *
           ───────────────
                 * * *
                 * * *
             ─────────────
                     * * * *
                     * * * *
                     ═══════
```

日本数学家高木茂男，把这类问题叫做“虫食算”. 他指出解本题的入手之处是：从被除数下移位数的多少，来判断商数中哪些数字会是 0.

由算式最后一步可知除数（三位数）是 125 的倍数或 200 的倍数，否则它与一位数的积不会为 1 000 的倍数. 但从倒数第二步可以看出除数的末两位不全为 0，因而除数是 125 的倍数. 由倒数第二步可知最后一步的四位数是 5 000（5＝10－5）. 5 000＝125×40＝125×5×8，从而除数是 625（＝125×5），商的最后一位数字是 8. 然后，由下而上不难得出算式为

```
              1 0 1 1.1 0 0 8
625 ) 6 3 1 9 3 8
      6 2 5
          6 9 3
          6 2 5
            6 8 8
            6 2 5
              6 3 0
              6 2 5
                  5 0 0 0
                  5 0 0 0
```

参考文献 [13,pp.143～145].

（葛　军）

福尔摩斯的算题(Holmes' problem)　一天,大侦探福尔摩斯来到他的朋友华生医生家做客.聊天时,听到庭院里孩子们的嬉笑声.

福尔摩斯问:"请告诉我,您有几个孩子?"

华生答道:"那些孩子不完全是我的,那是四户人家的孩子,我的孩子最多,弟弟的其次,妹妹的再次,叔叔的孩子最少,他们吵闹得乱七八糟,因为他们不够按每队九人凑成两队,可也真巧,如果把我们这些孩子的数目相乘,其积正好是我们房子的门牌号数,这个号数是知道的."

福尔摩斯说:"我在学校也学过数学呀!让我来试试把每一家孩子的数目算出来."

于是他作了一些计算后说:"对于解这道题,已知的数据还嫌不够.请告诉我,叔叔的孩子是一个呢,还是不止一个?"

华生回答了这个问题,但回答些什么我们不知道.

福尔摩斯说:"现在我能准确地回答孩子的数目了!"

他真的回答得一点也不错.

那么,你可知道门牌号是多少?四家中每一家有几个孩子?

这是国外流传的一道趣题.

设门牌号数是 N,四家的孩子数依次为 a、b、c、d. 根据题意,得

$$N = abcd, \tag{①}$$
$$a>b>c>d, \tag{②}$$
$$a+b+c+d<18. \tag{③}$$

(1) 叔叔的孩子数 d 只能取 1 或 2,否则,若 $d \geqslant 3$, 则 $c \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $a \geqslant 6$, 由此推出 $a+b+c+d \geqslant 18$ 与③矛盾.

(2) 根据题意及(1)的讨论,得

$$\begin{aligned} &N = abc \times 1 = a'b'c' \times 2, a+b+c \leqslant 17, \\ &a'+b'+c' \leqslant 16, a>b>c, a'>b'>c'. \end{aligned} \tag{④}$$

根据④式可推得 $c=3$ 或 4, $c'=3$.

当 $c=c'=3$ 时,④式转化为

$$\begin{aligned} &ab = a'b' \times 2, a+b \leqslant 14, \\ &a'+b' \leqslant 13, a>b>3, a'>b'>3. \end{aligned} \tag{⑤}$$

由⑤式可推得　$a=8, b=5, a'=4, b'=5$.

当 $c=4$, $c'=3$ 时,④式转化为

$$\begin{aligned} &ab \times 4 = a' \times b' \times 3, a>b>4, \\ &a'>b'>3, a+b \leqslant 13, a'+b' \leqslant 13. \end{aligned} \tag{⑥}$$

由⑥式可推得　$a=6, b=5, a'=4, b'=5$.

所以, $N=120$,且 $N = 1\times 3\times 5\times 8 = 1\times 4\times 5\times 6 = 2\times 3\times 4\times 5$. 故根据福尔摩斯的回答,推得门牌号为 120,四家小孩的数目分别为 2,3,4,5.

参考文献　[11,pp. 42～44].

（蒿　军）

猴子分花生(Distributing peanuts)　将 1 600 颗花生,分给 100

只猴子.不管怎样分,至少有四只猴子可以分得同样多的花生.如果要求不允许有五只猴子分得相同数目的花生,应该怎样分呢?

假设每四只猴子分得花生数目不全相同,则不妨令 100 只猴子分得的花生数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$,且 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_{97} \leqslant a_{98} \leqslant a_{99} \leqslant a_{100}$. 于是

$$\begin{aligned}&a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100}\\=&(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + (a_{97} + a_{98} + a_{99}) + a_{100}\\\geqslant&3(a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{97}) + a_{100}.\end{aligned}$$

由假设知 $a_1 \geqslant 1, a_4 \geqslant 2, a_7 \geqslant 3, \cdots, a_{97} \geqslant 33, a_{100} \geqslant 1$,则上式有

$$\begin{aligned}&a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100}\\\geqslant&3 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 33) + a_{100}\\>&3 \times \frac{1 + 33}{2} \times 33 = 1\,683 > 1\,600,\end{aligned}$$

与题设矛盾.故假设不成立,则可知不论怎样分,至少有四只猴子分得同样多的花生.

如果要求不允许有五只猴子分得相同数目的花生,可以考虑如下分法:

三只猴子分得 1 颗花生,三只猴子分得 2 颗花生,…,三只猴子分得 32 颗花生,则共有 $(3 \times 32 =)96$ 只猴子已分得花生

$$3 \times (1 + 2 + \cdots + 32) = 1\,584(\text{颗}).$$

那么余下 $4(= 100 - 96)$ 只猴子分 $16(= 1\,600 - 1\,584)$ 颗,可分得 1,3,5,7 颗.所以,只有四组猴子(每组四只猴子)分得同样多的花生,即无五只猴子分得同样多的花生.

注:满足题目要求的分法是很多的,所给分法仅是其中之一.

参考文献 [11,p.3].

(葛 军)

参考文献

1 钱宝琮校点.算经十书.北京：中华书局,1963
2 秦九韶著.数书九章.北京：商务印书馆,1937
3 程大位著,梅荣照、李兆华校释.算法统宗校释.合肥：安徽教育出版社,1990
4 梁宗巨.世界数学史简编.沈阳：辽宁人民出版社,1980
5 沈康身.中算导论.上海：上海教育出版社,1986
6 中外数学简史编写组.中国数学简史.济南：山东教育出版社,1986
7 吴文俊主编.世界著名科学家传记.数学家(Ⅰ).北京：科学出版社,1992
8 中国大百科全书出版社编辑部编.中国大百科全书(数学).北京：中国大百科全书出版社,1988
9 邓宗琦主编.数学家辞典.武汉：湖北教育出版社,1990
10 高希尧编.数海钩沉——世界数学名题选辑.西安：陕西科学技术出版社,1982
11 王长烈,朱一鸣编.世界数学名题趣题选.长沙：湖南教育出版社,1988
12 陆乃超,袁小明编著.世界数学名题选.上海：上海教育出版社,1989
13 李毓佩.数学大世界——数的畅想曲、代数的威力.南京：江苏少年儿童出版社,1991
14 [德]H.德里著.100个著名初等数学问题——历史和解.上海：上海科学技术出版社,1982
15 [苏]B.Д.契斯佳可夫著.初等数学古代名题集.北京：科学普及出版社,1984
16 [日]长泽龟之助.算术辞典.上海：上海科学技术出版社,1959
17 [苏]B.A.柯尔詹姆斯基.趣味数学.
18 [苏]别莱利曼.趣味代数学.北京：中国青年出版社,1980
19 [苏]柯洛索夫.数学课外补充读物.上海：上海教育出版社,1962
20 [美]H.伊夫斯著.数学史概论.太原：山西人民出版社,1986

数　论

一　整数的分解

算术基本定理(**Fundamental theorem of arithmetic**)　每个不等于 1 的自然数 n,都可以写成素因数的积,并且,除因数的顺序外,这种分解式是惟一的,即 n 可以惟一地表示成

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \tag{①}$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ 是素数,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是自然数.

①称为自然数 n 的标准分解式.

算术基本定理也称为惟一分解定理.

算术基本定理在欧几里得的《几何原本》第九卷中列为命题 14,但他的证明只讨论了素因数的个数≤4 的情形. 1801 年,高斯首次给出这个定理的明确的叙述与证明.

定理中"每个大于 1 的自然数 n 都可以表成①的形式"是容易证明的:根据合数的定义,每个合数 n 可写成 $n_1 n_2$,n_1、n_2 都是大于 1 的自然数,如果 n_1 或 n_2 是合数,那么还可以继续分解,这样一直进行下去,由于每次分解出的因数都不小于 2,所以经过有限多次后这一过程必定停止. 这时,$n = p_1 p_2 \cdots p_m$,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 都是质数(如果某个 p_i 不是质数,那么分解还可继续进行),即 n 可表成①的形式.

"分解是惟一的"这一论断的证明比较困难. 证法也比较多,这里介绍两种.

第一种证明 首先证明对任意两个自然数 a、b，必有整数 x、y，使

$$ax + by = d, \tag{②}$$

d 是 a、b 的最大公约数.

我们考虑所有形如 $ax + by$ 的整数（x、y 是整数）组成的集合 I. 集合 I 中，有自然数（例如 a、b），这些自然数中有一个最小的，记为 d. d 可以写成 $ax + by$ 的形式，所以 a、b 的公约数一定整除 d. 另一方面，设 $a = qd + r, 0 \leqslant r < d$，那么 $r = a - qd = a(1 - x) - by \in I$. 由 d 的最小性，必有 $r = 0$，即 a 被 d 整除. 同理 b 被 d 整除. 于是 d 是 a、b 的公约数. 结合上面所说 d 是 a、b 的最大公约数，于是②成立.

②称为 Bézout（1730～1783）恒等式，用途很多，它也可以用辗转相除法（欧几里得算法）证明.

其次，我们证明素数 p，如果满足 $p|ab$，那么 $p|a$ 或 $p|b$ 至少有一个成立.

事实上，若 $p\nmid a$，则 p、a 的最大公约数是 1. 所以由 Bézout 恒等式，有

$$ax + py = 1, \tag{③}$$

其中 x、y 为整数.

在③的两边同乘以 b，得

$$abx + pby = b, \tag{④}$$

④的左边两项均被 p 整除（$p | ab, p | pb$），所以右边的 b 也被 p 整除.

最后，回到惟一性的证明. 如果 n 有两种形如①的表达式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_h^{\beta_h}. \tag{⑤}$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k, q_1 < q_2 < \cdots < q_h$ 都是素数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_h$ 都是自然数，那么，对每个 i，$p_i | q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_h^{\beta_h}$，从而每

个 p 是一个 q. 类似地，每个 q 是一个 p. 因此 $k=h$. 并且由于 $p_1<p_2<\cdots<p_k, q_1<q_2<\cdots<q_k$，所以 $p_i=q_i\ (i=1,2,\cdots,k)$.

如果 $\alpha_i>\beta_i$，在⑤的两边同时除以 $p_i^{\beta_i}$，得

$$p_1^{\alpha_1}\cdots p_i^{\alpha_i-\beta_i}\cdots p_k^{\alpha_k}=p_1^{\beta_1}\cdots p_{i-1}^{\beta_{i-1}}p_{i+1}^{\beta_{i+1}}\cdots p_k^{\beta_k}.$$

上式左边被 p_i 整除，而右边不被 p_i 整除，矛盾. 所以 $\alpha_i\leqslant\beta_i$. 同理 $\alpha_i\geqslant\beta_i$. 于是 $\alpha_i=\beta_i$. 这就完成了惟一性的证明.

第二种证明　设有些自然数的分解多于一种，n 是具有这种性质的数中最小的. 这时

$$n=p_1p_2\cdots=q_1q_2\cdots \tag{⑥}$$

p_i 与 $q_i\ (i=1,2,\cdots)$都是素数. p_i 与 $q_i\ (i=1,2,\cdots)$中不会有相同的，如果有 $p_i=q_j$，那么$\frac{n}{p_i}$有两种不同的分解，与 n 的最小性矛盾.

设 p_1 是 $p_i\ (i=1,2,\cdots)$ 中最小的素数，由于 n 是合数，故 $p_1^2\leqslant n$. 同样，设 q_1 是 $q_i\ (i=1,2,\cdots)$ 中最小的素数，则 $q_1^2\leqslant n$. 由于 $p_1\neq q_1$，所以 $p_1q_1<n$，$N=n-p_1q_1$ 是小于 n 的自然数，因此它的分解是惟一的. 由于 $p_1|n$，所以 $p_1|N$. 同理 $q_1|N$. 又 N 有唯一分解，所以 $p_1q_1|N$. 从而 $p_1q_1|n\ (n=N+p_1q_1)$，$q_1\left|\frac{n}{p_1}\right.$. 但 $\frac{n}{p_1}<n$，所以$\frac{n}{p_1}$有惟一分解 $p_2p_3\cdots$因为 q_1 不是 $p_i\ (i=1,2,\cdots)$ 中的素数，所以这是不可能的. 于是，分解多于一种的自然数是不存在的.

在整数推广至代数整数时，惟一分解定理不一定成立. 例如，集合

$$\{x+y\sqrt{-5}\mid x、y\ 为整数\}$$

中可以定义素数 $2、3、1+\sqrt{-5}、1-\sqrt{-5}$，但

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

有两种不同的分解.

研究惟一分解定理何时成立是代数数论中一个极为重要的课题.

参考文献 [3,p.6],[6,p.24],[19,p.3,p.21],[21,p.7].

（单 墫）

惟一分解定理(Unique factorization theorem) 见算术基本定理.

亲和数(Amicable number) 如果 m、n 是两个不同的自然数,m 的真因数的和是 n,n 的真因数的和是 m,那么 m、n 就称为一对亲和数.例如,220 与 284 是一对亲和数,而且是最小的一对(被收人《吉尼斯大全》32 卷第 14 条).这里真因数指比 n 本身小的因数,包括 1 在内.

毕达哥拉斯学派认为亲和数象征着友谊,因此对它进行研究.9 世纪阿拉伯数学家 Thâbit ben Korrah 指出,在

$$h = 3 \cdot 2^n - 1, t = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, s = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

为奇素数时,$2^n ht$ 与 $2^n s$ 是一对亲和数.在希腊、阿拉伯人之后,很多著名数学家,如费马、笛沙格(Desargues)、欧拉等都研究了亲和数的构造.欧拉曾列出 64 对亲和数(其中有两对是错的).现在发现的亲和数已超出千对,最大的有 152 位,即

$$m = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5\,281^{19} \cdot 29 \cdot 89(2 \cdot 1\,291 \cdot 5\,281^{19} - 1),$$
$$n = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5\,281^{19}(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 1\,291 \cdot 5\,281^{19} - 1).$$

人们相信有无穷多对亲和数,但至今未能证明或推翻.

两个亲和数的奇偶性似乎是相同的,至少在 $\leqslant 3\,000\,000\,000$ 的数中没有一对亲和数具有不同的奇偶性.1968 年,Bratley 与 McKay 猜测对于两个数 m、n 均为奇数的亲和数,必有 m、n 均被 3 整除.但这一猜测至今未被证明或推翻.人们还猜测对于亲和数

m、n，它们的最大公约数必大于 1.

参考文献 [6,p.42],[14,p.323].

（单 墫）

完全数(Perfect number) 完全数也称完美数.如果自然数 n 等于它的所有因数(n 自身除外)的和，那么 n 称为完全数.

6($=1+2+3$)是最小的完全数.毕达哥拉斯学派认为"6"和谐、健康、美丽.欧几里得《几何原本》第九卷的最后一个命题(命题36)证明了"若 $1+2+\cdots+2^n$ 为素数，则 $2^n(1+2+\cdots+2^n)$ 是完全数".欧拉在一封信中证明了所有的偶完全数都具有欧几里得所说的形式.

偶完全数是否有无穷多个，即形如 $1+2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$ 的素数是否有无穷多个(参见 **Mersenne** 素数)，至今未能解决.

目前知道的偶完全数共 33 个.

是否有奇完全数，这也是尚未解决的问题.欧拉曾证明奇完全数的形式一定是 $p^{4k+1}\cdot m^2$，其中 p 是 $4n+1$ 形的素数.借助电子计算机，人们证明了如果存在奇完全数，那么它一定大于 10^{300}，并且它的质因数个数大于 29.

欧几里得的命题及其逆命题可以证明如下：

设 $1+2+\cdots+2^n$ 是素数，记为 p，则 $2^n\cdot p$ 的真因数为 $1,2,2^2,\cdots,2^n,p,2p,2^2p,\cdots,2^{n-1}p$.它们的和为

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+2^n+p(1+2+\cdots+2^{n-1})\\ =&p+p(2^n-1)=2^n\cdot p.\end{aligned}$$

因此，$2^n\cdot p$ 是完全数.

反之，任一偶完全数可表示为 $2^n\cdot p$，其中 p 为奇数.用 $\sigma(m)$ 表示 m 的所有因数的和，则在 a、b 互素时，易知 $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$.因此，

$$\sigma(2^n p) = \sigma(2^n)\sigma(p) = (1+2+\cdots+2^n)\sigma(p)$$
$$= (2^{n+1}-1)\sigma(p).$$

由完全数的定义

$$\sigma(2^n p) = 2\cdot 2^n p = 2^{n+1}p,$$

于是

$$2^{n+1}p = (2^{n+1}-1)\sigma(p),$$

从而

$$\sigma(p) = \frac{2^{n+1}p}{2^{n+1}-1} = p + \frac{p}{2^{n+1}-1}.$$

这表明 $\frac{p}{2^{n+1}-1}$ 是整数，并且是 p 的真因数. 由于 $\sigma(p)$ 是 p 的因数之和，所以上式表明 p 只有两个因数，从而 p 为素数，并且 $\frac{p}{2^{n+1}-1}=1$，即 $1+2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1=p$ 是素数. 因此，所有的偶完全数都是欧几里得指出的形式.

熟知 $1+2+\cdots+2^n(=2^{n+1}-1)$ 为素数时，$n+1$ 必须为素数 p，并且这和就是 Mersenne 素数 2^p-1，从而偶完全数就是形如 $2^{p-1}(2^p-1)$ 的数，其中 2^p-1 是 Mersenne 素数. 因此，有多少 Mersenne 素数就有多少偶完全数.

参考文献 [3, p. 13, p. 638], [6, p. 40], [18, pp. 44～45], [20, pp. 81～85], [21, pp. 1～4].

（单 墫）

Mersenne 素数（Mersenne prime） 形如 2^p-1 的素数称为梅生（Mersenne）素数，简记为 M_p.

是否有无限多个梅生素数是一个未解决的问题. 易知 2^p-1 为素数时，p 一定是素数，但 p 是素数时，2^p-1 不一定是素数.

梅生（1588～1648）是法国的修道士. 在他的时代，已经知道 $M_2=3, M_3=7, M_5=31, M_7=127$ 是素数，而 $M_{11}=23\times 89$ 是

合数. 1644 年,梅生宣布满足 $p \leqslant 257$ 的素数 p 中只有

$$p = 2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$$

时, M_p 是素数. 但人们后来发现 M_{67}、M_{257}是合数,同时,梅生漏掉了 M_{61}、M_{89}、M_{107}三个素数.

现在已经知道了 33 个梅生素数,即

p=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127,521,607,1 279,2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, 9 689, 9 941, 11 213, 19 937,21 701,23 209,44 497,86 243,110 503,132 049,216 091,756 839,859 433

时,M_p 为素数. 其中从 $p=521$ 开始的 21 个素数 M_p 是 1952 年以来用电子计算机陆续发现的.

目前知道的 5 000 位以上的素数共 11 个,有 10 个是梅生素数,即 $M_{19\,937}$,$M_{21\,701}$,$M_{23\,209}$,$M_{44\,497}$,$M_{86\,243}$,$M_{110\,503}$,$M_{132\,049}$,$M_{216\,091}$,$M_{756\,839}$,$M_{859\,433}$. 还有一个 $391\,581 \times 2^{216\,193} - 1$ 是素数,但不是梅生素数.

参考文献 [3,p. 14,pp. 637~638],[6,p. 51],[14,p. 323],[18,pp. 8~9],[19,p. 14],[20,pp. 75~85].

(单 墫)

费马数(Fermat numbers) 形如 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 的数称为费马数.

费马认为(见 1640 年给 Frenicle 的信)F_n 均为素数,但承认他自己无法证明,在 1654 年给帕斯卡的信中曾请帕斯卡证明这一猜测.

$F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65\,537$ 的确是素数,但 1732 年,欧拉指出

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \times 6\,700\,417$$

不是素数. 以后又发现

$n=5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,19,21,23,25,26,$
$27,30,32,36,38,39,42,52,55,58,63,73,77,81,117,125,144,$
$150,207,226,228,250,267,268,284,316,452,1\,945$
等时，F_n 都是合数，并且已找出 83 个费马数的素因数分解，最大的一个是 $F_{9\,448}$.

1801 年，高斯在其名著《算术研究》中得出一个著名的定理：正 n 边形可以用尺规作图的充分必要条件是 $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_h$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_h$ 都是费马素数，因此，费马素数是否有无穷多个，是一个值得研究的问题.

在 $n > 4$ 时，尚未发现一个费马数是素数. 因此，人们已提出相反的猜测：除了有限个 n 外，F_n 都是合数.

1987 年，J. Young 与 D. A. Buell 证实 F_{20}是合数. 因此，第一个未曾确定是合数还是质数的费马数是 F_{22}.

目前知道的最大的费马合数是 $F_{23\,471}$，它的位数超过 $10^{7\,000}$，并有因数 $5 \times 2^{23\,473} + 1$.

参考文献　[3,p. 14,p. 638],[6,pp. 53～54],[14,p. 323],[15,pp. 375～380],[18,p. 10],[19,p. 14],[20,pp. 71～74].

（单　墫）

伪素数(Pseudoprimes)　满足 n 整除 $2^n - 2$ 的合数 n 称为伪素数.

由费马小定理，在 n 为素数时，$n \mid (2^n - 2)$. 但满足 $n \mid (2^n - 2)$ 的 n 可能为合数，例如，$341 = 11 \times 31$ 是合数，而 $341 \mid (2^{341} - 2)$，341 是最小的伪素数，561($= 3 \times 11 \times 17$) 是第二个伪素数.

费马数 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 都是伪素数(如果 F_n 是合数)，因为

$$\begin{aligned} 2^{F_n} - 2 &= 2(2^{2^{2^n}} - 1) \\ &= 2(2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)(2^{2^{n+1}} + 1)\cdots(2^{2^{2^n - 1}} + 1) \end{aligned}$$

是 F_n 的倍数.

易证奇的伪素数有无穷多个，因为 a 是伪素数时，$2^{2^a-1}-2=2(2^{2^a-2}-1)$ 被 2^a-1 整除. 已经知道偶的伪素数也有无穷多个，最小的一个是

$$161\,038=2\times 73\times 1\,103.$$

但伪素数的结构还不是十分清楚，如伪素数是否一定不含平方因子，仍是尚待解决的问题.

1972 年，A. Rotkiewicz 写了一本小册子《伪素数及其推广》，其中包括 20 个猜测与 58 个问题. 问题 22 是有无形如 2^N-2 的伪素数. 这一问题为 Wayne McDaniel 解决(1989)，他指出 $2^{465\,794}-2$ 是伪素数. 该书还指出有无穷多个合数 n，满足 $n\mid(2^{n-2}-1)$. 1986 年，Shen Mok-Kong 证明有无穷多个 k 使 $2^{n-k}\equiv 1\pmod n$（即 n 整除 $2^{n-k}-1$）有无穷多个合数解 n. 1987 年，Peter Kiss 与 Phong Bui-Minh 进一步证明了对所有 $k\geqslant 2$ 及所有 $a\geqslant 2$，$a^{n-k}\equiv 1\pmod n$ 均有无穷多个合数解 n.

参考文献 [18, pp. 27～30]，[20, pp. 86～97]，[21, pp. 116～117].

（单 墫）

Carmichael 数(Carmichael numbers) 如果 n 为奇合数，并且对每个与 n 互素的 a 均有 n 整除 $a^{n-1}-1$，那么 n 称为 Carmichael 数.

显然 Carmichael 数都是伪素数.

这种数是 1912 年美国数学家 R. D. Carmichael 引入的，最小的一个是

$$561=3\times 11\times 17.$$

其实，早在 1899 年 Korselt 就研究过这种数，并给出 n 是 Carmichael 数的充分必要条件，即 n 无平方因子(每个平方数都不整除 n)并且对 n 的每个素因数 p，$p-1$ 是 $n-1$ 的因数. 1913

年，P. Bachmann 证明了 Carmichael 数至少有三个素因数. 另一方面，如果 $p=6k+1, q=12k+1, r=18k+1$ 都是素数，易知 pqr 是 Carmichael 数.

Carmichael 数在自然数中的分布是非常稀少的. 人们不知道 $p=6k+1, q=12k+1, r=18k+1$ 同为素数的三元数组 (p, q, r) 是否有无穷多个，但 1992 年，Alford，Granrille 与 Pomerance 从另一途径证明了 Carmichael 数有无穷多个. 实际上，他们建立了更强的定理：

在 x 充分大时，不超过 x 的 Carmichael 数多于 $x^{\frac{2}{7}}$.

Erdös 猜测 $\dfrac{\ln C(x)}{\ln x} \to 1\ (x \to \infty)$，其中 $C(x)$ 为不超过 x 的 Carmichael 数的个数.

Carmichael 数的素因数个数不一定为 3. 1988 年，Günter Löh 与 Wolfgang Niebuhr 采用新的算法，产生一个至少有 1 101 518 个素因数的 16 142 049 位的 Carmichael 数.

参考文献 [18, pp. 30～32]，[20, pp. 98～100].

（胡作玄 单 墫）

Giuga 猜测（Giuga conjecture） 若 p 整除 $1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}+1$，则 p 为素数.

由费马小定理易知，p 为素数时，p 整除

$$1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}+1. \qquad ①$$

但反过来是否成立，即 p 整除①式时，p 是否一定是素数？至今未能证明或推翻.

1943 年，G. Giuga 曾对 $p \leqslant 10^{1000}$ 作过验证，这个范围内，上述猜测均成立. 1985 年，E. Bedocchi 进一步验证了 $p \leqslant 10^{1700}$ 的数，猜测成立.

Giuga 注意到若有反例，则必为 Carmichael 数（参见

Carmichael 数），并且它至少有八个不同的素因数.

Giuga 猜测等价于 $nB_{n-1}\equiv -1(\mathrm{mod}\ n)$，这里伯努利数 B_k 是展开式 $\dfrac{x}{e^x-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{B_kx^k}{k!}$ 中的系数.

参考文献 [20,pp. 20~21].

（单　墫）

二　同余式

中国剩余定理(Chinese remainder theorem)　设 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 为互质的自然数，则对任意整数 $a_1,a_2,\cdots,a_s$，同余方程组

$$x\equiv a_i(\mathrm{mod}\ m_i),i=1,2,\cdots,s \qquad ①$$

必有解，并且对于模 $m_1m_2\cdots m_s$，解是唯一的. 解可写成

$$x=a_1b_1M_1+a_2b_2M_2+\cdots+a_sb_sM_s+mM, \qquad ②$$

其中 $M=m_1m_2\cdots m_s,M_i=\dfrac{M}{m_i},b_iM_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ m_i),i=1,2,\cdots,s$，$M$ 为任一整数.

中国剩余定理是数论的基础定理之一，应用极为广泛，有各种变形与推广.

在我国古代的数学书籍中，有许多有关中国剩余定理的问题. 如《孙子算经》卷下第 26 题：

“今有物不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二. 问物几何？”该题即为“物不知数”题.

用现代数学语言可将上面的问题叙述成：求整数 x，x 除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2，即解一次同余方程组

$$\begin{cases}x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3),\\ x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5),\\ x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7),\end{cases} \qquad ③$$

我国南宋数学家杨辉、秦九韶等对这种类型的问题进行过深入的讨论，彻底地解决了这一问题. 我国古代数学的这一辉煌成就，被各国数学家一致誉为中国剩余定理，也称为孙子定理、大衍求一术、孙子神奇妙算、鬼谷算、韩信点兵等.

明代程大位《算法统宗》卷五给出解题的口诀：

“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正月半，除百零五便得知.”

即③的解可经算式

$$70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 = 233,$$
$$233 \div 105 = 2 \cdots\cdots 23$$

得出 $x = 23$. 其实 $23 + 105m$ (m 为整数)都是解，23 是其中最小的正整数(在宋人周密的《志雅堂杂抄》中已有类似的口诀：

“三岁孩儿七十稀，五留廿一事尤奇，

七度上元重相会，寒食清明便可知.”

但较为隐晦).

杨辉《续古摘奇算法》中新拟了不少关于同余方程组的问题. 如：

“七数剩一，八数剩二，九数剩三. 问本总数几何？”

在《数书九章》卷一、卷二中，秦九韶对同余方程组①进行了系统的理论研究，并创立了一套算法，称为大衍求一术. 后来失传 500 年，经清代学者焦循、黄宗宪等人的挖掘，大衍求一术才重放光彩.

公式②中的 M_i 称为衍数，b_i 称为乘率，b_iM_i 称为“用数”. 在物不知数(即③)中，

$$M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15,$$
$$b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 1,$$
$$b_1M_1 = 70, b_2M_2 = 21, b_3M_3 = 15.$$

最后三个“用数”就是口诀中的数.

解决问题的关键是求出乘率.这可以通过试验来完成.例如,在杨辉所编的问题中,$M_1 = 72$,不难试出 $b_1 = 4$ 满足 $72b_1 \equiv 1 \pmod 7$,所以 $b_1M_1 = 288$. 同样可得另两个用数为 441,280.从而由

$$1 \times 288 + 2 \times 441 + 3 \times 280 = 2\,010,$$
$$2\,010 \div 504 = 3 \cdots\cdots 498$$

得本总数为 498.

在 $m_1, m_2, \cdots, m_s$ 不互质时,方程组①有解的充分必要条件是

$$a_i \equiv a_j (\bmod\ (m_i, m_j)), i, j = 1, 2, \cdots, s.$$

在这一条件满足时,先将 m_i 分解为质因数的连乘积,从而方程组可化为以质数的幂为模的方程组,再用上面的公式②求解.

参考文献 [3,pp. 32~33],[6,p. 119],[16,pp. 57~64],[1,p. 318],[2,p. 1],[11,p. 268].

(单 墫 眭秋生)

孙子定理 见中国剩余定理.

大衍求一术 见中国剩余定理.

物不知数 见中国剩余定理.

余米推数 有米铺诉被盗去米一般三箩,皆适满,不记细数.今左壁箩剩一合,中间箩剩一升四合,右壁箩剩一合.后获贼,系甲、乙、丙三名.甲称当夜摸得马勺,在左壁箩满舀入布袋;乙称踢着木履,在中箩舀入袋;丙称摸得漆碗,在右边箩舀入袋.将归食用,日久不知数.索到三器,马勺满容一升九合,木履容一升七合,漆碗容一升二合.欲知所失米数,计赃结断,三盗各几何?

本题是《数书九章》卷二中的一题.

题意是米店报案有三箩米被偷,三箩米数相等但不知道数量

多少，而且现场三箩底部还各剩一些米. 破案时抓住甲、乙、丙三个小偷，他们供称黑夜里各自用马勺、木鞋和漆碗分别在左、中、右箩里舀米装进布袋，拿回家就食用了，也不知偷了多少. 等到把马勺、木鞋、漆碗找到，测量了它们的容量，要求根据这些容量和各箩所剩米数推算出米店共失窃米数和甲、乙、丙各偷米数，以便结案.

这是一次同余式组问题，不过被作者秦九韶设计得巧妙有趣，应用“剩余定理”解

$$x \equiv 1 \pmod{19}, x \equiv 14 \pmod{17}, x \equiv 1 \pmod{12},$$

即可得“共失米九石五斗六升三合；甲（偷）米三石一斗九升二合；乙（偷）米三石一斗七升九合；丙（偷）米三石一斗九升二合”.

参考文献 [2,p.50].

（眭秋生）

三 不定方程

五家共井 今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠. 如各得所不足一绠，皆逮. 问井深、绠长各几何？

本题是《九章算术》卷八“方程”的第 13 题，是我国最早的一道不定方程题目.

题意是甲、乙、丙、丁、戊五家共用一口井，已知用甲家的井绳两根还需加上乙家的井绳才能够汲着水；而用乙家的井绳三根还需加上丙家的井绳一根……求井深及各家井绳长度.

若设甲、乙、丙、丁、戊各家井绳长度分别为 a、b、c、d、e，井深为 h，则有

$$\begin{cases} 2a + b = h, \\ 3b + c = h, \\ 4c + d = h, \\ 5d + e = h, \\ 6e + a = h. \end{cases}$$

这是一个不定方程组，应该有无穷多组解.《九章算术》根据实际情况给出一组最小解：

$a = 265$ 寸，$b = 191$ 寸，$c = 148$ 寸，$d = 129$ 寸，$e = 76$ 寸，$h = 721$ 寸.

参考文献 [1,p.232].

（眭秋生）

百鸡问题 今有鸡翁一，直(值)钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一. 凡百钱买鸡百只. 问鸡翁、母、雏各几何？

这是《张邱建算经》下卷的第 38 题.

按题意分别设公鸡、母鸡和小鸡的只数分别为 x、y 和 z，则有

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

这是一个不定方程问题，书中给出了全部三组正整数解：(4,18,78)、(8,11,81)、(12,4,84).

至于解法，书中"术文"是："鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得."就是

$$\begin{cases} x = 4 + 4t, \\ y = 18 - 7t, \\ z = 78 + 3t, \end{cases}$$

t 取 0,1,2.

不定方程问题在《九章算术》中已有记载(见**五家共井**)，希腊

数学家丢番图对此也有不少研究.但是最早对不定方程问题给出全部整数解的却是《张邱建算经》.百鸡问题又称百钱百鸡,它开了中国古代不定方程研究的先河,而且一直作为中国传统数学的一个重要内容——百鸡术.

百鸡问题还曾传入印度等国,在 Mahāvira(9 世纪)、Bhāskara 以及意大利的斐波那契的著作中都有类似问题出现.

参考文献 [1,p.402],[9,p.194],[8,p.14].

(睦秋生)

百钱百鸡 见百鸡问题.

百鸡术 见百鸡问题.

阿基米德的牛群问题(The problem of a herd of cattle) 有一群牛,分别由白、黑、褐、花四色组成,白色公牛等于黑色公牛的$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$加上褐色公牛数;黑色公牛等于花色公牛的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$加上褐色公牛数;花色公牛等于白色公牛的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$加上褐色公牛数;白色母牛等于黑色牛的$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$;黑色母牛等于花色牛的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$;花色母牛等于褐色牛的$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$;褐色母牛等于白色牛的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$.问各种颜色的公牛和母牛各有多少头?

这是 18 世纪以前流传的所谓阿基米德分牛问题,现载于《阿基米德文集》.有些数学史家认为,此题未必真出自阿基米德之手.

本题"更完整"的阐述见于一本希腊文手抄本(由 Gotthdd Ephraim Lessing 于 1773 年在沃尔芬比特图书馆发现),它是以诗歌形式,由 22 组对偶句组成的.

设白、黑、褐、花四色的公牛数分别为 X、Y、Z、T,母牛数分别为 x、y、z、t,则

$$\begin{cases} X=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)Y+Z, \\ Y=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)T+Z, \\ T=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)X+Z, \\ x=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(Y+y), \\ y=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(T+t), \\ t=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Z+z), \\ z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(X+x), \end{cases}$$

即

$$X-Z=\frac{5}{6}Y, \quad ①$$

$$Y-Z=\frac{9}{20}T, \quad ②$$

$$T-Z=\frac{13}{42}X, \quad ③$$

$$x=\frac{7}{12}(Y+y), \quad ④$$

$$y=\frac{9}{20}(T+t), \quad ⑤$$

$$t=\frac{11}{30}(Z+z), \quad ⑥$$

$$z=\frac{13}{42}(X+x), \quad ⑦$$

由方程①、②、③解得

$$X=\frac{742}{297}Z, Y=\frac{178}{99}Z, T=\frac{1\,580}{891}Z.$$

要使 X、Y、Z 为整数，Z 必须是 891 的整数倍，令 $Z=891m$，得

$$X=2\,226m, Y=1\,602m, T=1\,580m, Z=891m.$$

将上述四式代入④、⑤、⑥、⑦，得

$$\begin{cases}12x-7y=11\,214m,\\20y-9t=14\,220m,\\30t-11z=9\,801m,\\42z-13x=28\,938m.\end{cases}$$

解上述方程组，得

$$x=\frac{7\,206\,360}{4\,657}m,$$

$$y=\frac{4\,893\,246}{4\,657}m,$$

$$t=\frac{3\,515\,820}{4\,657}m,$$

$$z=\frac{5\,439\,213}{4\,657}m.$$

要使 x、y、z、t 为整数，令 $m=4\,657n$，代入 X、Y、T、Z、x、y、t、z 中，得

$$\begin{aligned}X&=10\,366\,482n, & Y&=7\,460\,514n,\\T&=7\,358\,060n, & Z&=4\,149\,387n,\\x&=7\,206\,360n, & y&=4\,893\,246n,\\t&=3\,515\,820n, & z&=5\,439\,213n,\end{aligned}$$

这里 n 为正整数.

这是不定方程组，有无穷多组解.

取 $n=1$，可得到各色公牛和母牛数的最小值：

白公牛 10 366 482 头，白母牛 7 206 360 头；

黑公牛 7 460 514 头，黑母牛 4 893 246 头；

褐公牛 4 149 387 头，褐母牛 5 439 213 头；

花公牛 7 358 060 头，花母牛 3 515 820 头.

注：在希腊文手抄本中有此问题的完整叙述，在问题的最后增加了两个条件：白公牛和黑公牛的总数为一平方数；花色公牛和褐色公牛总数为三角形数，即有方程 $X+Y=p^2$ 和 $T+Z=\frac{q(q+1)}{2}$ 成立.

这样，问题的结果必然关联着形如 $x^2-dy^2=1$ 的 Pell 方程. 这是数论中的一个很重要的不定方程.

在增加上述两个条件下，解得问题的结果很大，仅白色公牛就有 $1\,598\times10^{206\,541}$ 头，而所有公牛总数为 $7\,766\times10^{206\,541}$ 头. 它们都是天文数字，前苏联学者 И. Н. 维谢洛夫斯基评论说："为了写出此题答案，如果每页纸上可写 2 500 个数字，需要写 660 页."

参考文献 [12, pp. 2～8], [13, pp. 4～6, pp. 71～72], [10, pp. 67～71].

（葛　军）

Frobenius 问题（Frobenius problem） 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为整数，它们的最大公约数为 1，求不能表示成 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的最大整数，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意非负整数. 这个问题称为一次不定方程的 Frobenius 问题，也称为换钱问题.

$n=2$ 时，易知所求的数为 $a_1a_2-a_1-a_2$. 证明如下：

首先，设 $m>a_1a_2-a_1-a_2$. 方程

$$a_1x_1+a_2x_2=m \qquad ①$$

的全部解可写成

$$x_1=x_1'+a_2t,$$
$$x_2=x_2'-a_1t,$$

其中 x_1'、x_2'是①的任一组整数解，t 为任意整数. 可以假定 $0\leqslant x_2'<a_1$（否则将 x_2' 加上或减去若干个 a_1），这时

$$\begin{aligned} a_1x_1 &= m - a_2x_2 \\ &> a_1a_2 - a_1 - a_2 - a_2(a_1 - 1) \\ &= -a_1, \end{aligned}$$

因此，$x_1 \geqslant 0$，即 $m = a_1x_1 + a_2x_2$，x_1、x_2 都是非负整数.

另一方面，若

$$a_1a_2 - a_1 - a_2 = a_1x_1 + a_2x_2,$$

其中 x_1、x_2 为非负整数，则

$$a_1a_2 = (x_1 + 1)a_1 + (x_2 + 1)a_2,$$

从而 $a_2 \mid (x_1 + 1)$，$a_1 \mid (x_2 + 1)$.

因为 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，所以 $x_1 + 1 \geqslant a_2$，$x_2 + 1 \geqslant a_1$，从而

$$a_1a_2 = (x_1 + 1)a_1 + (x_2 + 1)a_2 \geqslant 2a_1a_2,$$

矛盾.

所以，$a_1a_2 - a_1 - a_2$ 是不能表示成 $a_1x_1 + a_2x_2$（x_1、x_2 为非负整数）的最大整数.

$n = 3$ 的情况，直至 1978 年才由 E. S. Selmer 与 Ö. Beyer 利用连分数给出有显表达式的解答. 同年 O. J. Rodseth 对他们的解答作了简化. 1988 年，H. Greenberg 进一步作了简化，使所用步骤量为 $O(\log a)$.

$n \geqslant 4$ 时，尚无一般公式.

参考文献 [3, pp. 11～13], [16, pp. 64～76], [18, pp. 113～114].

（单 墫）

换钱问题（The money-changing problem） 见 Frobenius 问题.

勾股数（Pythagorean numbers） 方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的正整数解 x、y、z 称为勾股数.

很多国家和民族都研究过勾股数.根据现有材料,最早发现勾股数组的是 4 000 年前的古巴比伦人.美国哥伦比亚大学藏有刻着十五组勾股数的古巴比伦的泥板.

希腊古代数学家毕达哥拉斯研究过勾股定理与勾股数.因此,勾股数也称为毕达哥拉斯数.

我国古代算书《周髀算经》(约成书于公元前 1 世纪)中有"勾三股四弦五"之说,即直角三角形中两条直角边分别为 3、4,斜边为 5,3、4、5 满足 $3^2+4^2=5^2$,它们是一组勾股数,而且是最小的勾股数.一般地,方程

$$x^2+y^2=z^2 \qquad ①$$

的正整数解由公式(不计 x、y 的顺序)

$$\begin{cases} x=d\cdot(u^2-v^2), \\ y=d\cdot 2uv, \\ z=d\cdot(u^2+v^2) \end{cases} \qquad ②$$

给出,其中 u、v 为互质的正整数,且为一奇一偶,$u>v$,d 是任意正整数.证明如下:

若 x、y、z 不是两两互质,不妨设 $(x,y)=d>1$,这时 d^2 整除①式左边,因而也整除右边,从而 d 整除 z.在①的两边约去 d^2,并用 $\frac{x}{d}$、$\frac{y}{d}$、$\frac{z}{d}$ 代替 x、y、z 进行讨论.因此,可假定 x、y、z 两两互质.

这时,x、y、z 中至多有一个为偶数.若 x、y 为奇数,则 x^2、y^2 除以 4 余 1,x^2+y^2 除以 4 余 2,而 z^2 除以 4 余 1 或 0,所以 x、y 不能全为奇数.不妨设 y 为偶数,则 x、z 全为奇数.移项得

$$y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x),$$

由于 $(z+x,z-x)=(z+x,2x)=2(z+x,x)=2(z,x)=2$,

所以$\frac{z+x}{2}$、$\frac{z-x}{2}$互质. 由

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}$$

及唯一分解定理得

$$\begin{cases}\frac{z+x}{2}=u^2,\\ \frac{z-x}{2}=v^2,\\ \frac{y}{2}=uv,\end{cases} \quad ③$$

其中u、v为互质的正整数，$u>v$.

由③易知

$$\begin{cases}x=u^2-v^2,\\ y=2uv,\\ z=u^2+v^2,\end{cases} \quad ④$$

因为z是奇数，所以u、v不全为奇数.

④是x、y、z两两互质时①的解，通常称为本原解. ①的一般解是②. 容易验证②确实满足①.

勾股数有众多应用. 参见 **Bachet 问题**、**不定方程 $x^4+y^4=z^2$** 等.

参考文献 [3, pp. 313～318]，[6, p. 122]，[14, p. 346]，[16, pp. 165～172]，[19, p. 190].

（单 墫）

合同数（Congruent number） 给定一个自然数n，是否存在一个边长为有理数的直角三角形，它的面积为n？如果有这样的直角三角形，那么n称为合同数.

合同数已有1 000多年的历史，丢番图的《算术》Ⅲ. 22，Ⅴ. 9，

所讨论的问题均与合同数有关. 公元 972 年前的一份阿拉伯的数学手稿中有这样的问题：已知自然数 n，求平方数 x^2，使 x^2+n、x^2-n 都是平方数. 这个问题也可归结为合同数. 事实上，如果存在有理数 x 使 x^2+n、x^2-n 都是有理数的平方，那么以 $\sqrt{x^2+n}+\sqrt{x^2-n}$、$\sqrt{x^2+n}-\sqrt{x^2-n}$ 与 $2x$ 为边的三角形是直角三角形，面积为 n. 反之，如果 n 是合同数，那么存在边长为有理数 X、Y、Z 的直角三角形，满足 $XY=2n$. 令 $x=\frac{Z}{2}$，则

$$x^2+n=\frac{Z^2+2XY}{4}=\frac{1}{4}(X+Y)^2, x^2-n=\frac{1}{4}(X-Y)^2$$

都是有理数的平方.

由于勾股数有无穷多个，所以合同数有无穷多个. 另一方面，1855 年意大利数学家 Genocchi 证明了若 n 是 $8m+3$ 形的素数，那么 n 不是合同数，因此非合同数也有无穷多个. 斐波那契曾指出合同数一定不是平方数，但他的证明不太完整. 这实际上就是 Bachet 问题(参见 **Bachet 问题**).

自然数中 1，2，3，4 都不是合同数，5，6，7 都是合同数(例如，边分别为 $\frac{41}{6}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{20}{3}$，5、4、3，$\frac{337}{60}$、$\frac{24}{5}$、$\frac{35}{12}$ 的三个直角三角形，面积分别为 5，6，7).

很多著名数学家研究过合同数. 费马指出 1 不是合同数(这等价于 $x^4+y^4=z^4$ 无正整数解). 欧拉指出 7 是合同数.

更一般地，如何判定自然数 n 是否为合同数，现在已有了很大的进展.

1983 年，J. Tunnell 得到定理：

设 n 为无平方因子的正奇数，考虑条件：

(A) n 是合同数；

(B) $2x^2+y^2+8z^2=n$ 的整数解的解数是 $2x^2+y^2+32z^2=n$ 的整数解的解数的两倍.

则(A)可推出(B),反之,若 BSD 成立,则(B)也可推出(A).

其中 BSD 是指现代数学中关于椭圆曲线的一个极为重要的 Birch-Swinnerton-Dyer 猜测.

(B)的判断使用计算机非常容易,因此,如果(A)、(B)等价,那么判定 n 为合同数的问题就完全解决了,但(B)推出(A)依赖于 BSD,而 BSD 的解决还充满着困难.

参考文献 [18,pp.195~198].

(单 墫)

Bachet 问题(Bachet's problem) 试找一个边长为整数的直角三角形,它的面积是平方数.

这一问题的答案是否定的.

12 世纪意大利的数学家斐波那契已经知道"没有平方数为合同数",即 x^2+y^2 与 x^2-y^2 不会均为平方数.由此即可导出不存在边长为整数的直角三角形,它的面积为平方数(参见下面的证明).但他没有给出完整的证明.4 个世纪后,费马研究了 Bachet 的第 20 个问题(插在他译的丢番图的《算术》Ⅵ的最后):"求一个直角三角形,它的面积为 A."费马指出并证明了"没有边长为有理数的直角三角形,它的面积是有理数的平方".将边长为有理数的直角三角形扩大若干倍,它的边长就变成整数.因此,只需对边长为整数的直角三角形进行证明.

设直角三角形的边长为整数 x、y、z.由于边有公因数 d 时,面积有平方因子 d^2,所以可将公因数 d 约去,即假定 x、y、z 两两互素.由勾股数的有关结论,可设

$$x=2mn,y=m^2-n^2,$$

其中 m、n 互素,一奇一偶.若面积 $mn(m^2-n^2)$ 为平方数,则

$$m=a^2,n=b^2,m^2-n^2=a^4-b^4=c^2,$$

其中 a、b 互素,一奇一偶.

因为 a^2+b^2、a^2-b^2 互素，所以

$$a^2+b^2=\xi^2, a^2-b^2=\eta^2,$$

ξ、η 均为奇数，互素. 令

$$e=\frac{1}{2}(\xi+\eta), f=\frac{1}{2}(\xi-\eta),$$

则 e、f 为整数，互质. 不妨设 e 为奇数. 由于

$$ef=\frac{1}{4}(\xi^2-\eta^2)=\frac{1}{2}b^2,$$

所以

$$e=r^2, f=2s^2, 2rs=b.$$

其中 r、s 为整数. 因为

$$e^2+f^2=\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)=a^2,$$

$$\frac{1}{2}ef=r^2s^2,$$

所以边长为 e、f、a 的直角三角形的面积为平方数.

这样从边长为 x、y、z 的直角三角形可以导出一个边长为 e、f、a 的直角三角形，面积是平方数，而 $e<x$. 这一过程可以无限地继续下去，与小于 x 的正整数只有有限多个矛盾.

因此，没有边长为整数的直角三角形，它的面积是平方数.

参考文献 [21, p. 144].

（单 墫）

费马大定理（Fermat's last theorem） 在自然数 $n\geqslant 3$ 时，方程

$$x^n+y^n=z^n \quad ①$$

没有满足 $xyz\neq 0$ 的整数解. 这个具有 350 多年历史的猜测称为费马大定理，简称为大定理，记为 FLT.

1637 年左右，费马阅读希腊数学家丢番图的《算术》拉丁文版(由 Bachet 编译)关于方程 $x^2+y^2=z^2$ 的结果(第Ⅱ卷问题 8)时，在页边写下这样一段话：

一个立方不可能分成两个立方，一个四次方不可能分成两个四次方.一般地，任何高于 2 的幂不可能分成两个同样的幂.我已经找到了一个真正奇妙的证明，但这里的空白太小了，写不下.

用现代数学的语言，这个命题可以表述成①的形式.

在费马的手稿、书信与日记中没有发现他所说的“真正奇妙的证明”.350 多年来，没有人能够证明或推翻费马大定理.因此，很长时期所谓大定理实际上是一个未被完全证明的大猜测.

费马本人证明了大定理在 $n=4$ 时成立.

易知要证明大定理对一切 $n\geqslant 3$ 成立，只需证明大定理对 $n=4$ 及 $n=p$ (p 为质数)成立就可以了.

欧拉(1770)证明了大定理对 $p=3$ 成立.

勒让德(1823)与狄利克雷(1825)证明了大定理对 $p=5$ 成立.

Kummer(1844)引进理想的理论，证明了大定理对 $p\leqslant 100$ 成立.

进入 20 世纪，由于电子计算机的使用，新的理论与新的算法的发现，关于费马大定理的记录迅速刷新.1990 年 R. Crandall 已经证明了大定理对 $p\leqslant 1\,000\,000$ 成立.

另一方面，Faltings 于 1984 年证明了 Mordall 猜测(参见 **Faltings-Mordall 定理**)，由此可知，在 $n\geqslant 3$ 时，方程①至多有有限多组本原解(即满足 $(x,y,z)=1$ 的整数解 x,y,z).借助这一定理，Granville 与 Heath-Brown 在 1985 年证明了大定理对几乎所有的 n 成立，即令

$$E(x)=|\{n: n\in\mathbf{N}, n<x, \text{并且 FLT 对 } n \text{ 不成立}\}|,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=0.$$

不少重要的猜测与大定理密切相关.例如,谷山-Weil猜测“有理数域上的椭圆曲线都是模曲线”.1990年,K. Ribet证明这一猜测可导出大定理.

1993年6月,英国数学家A. Wiles宣布解决了特殊情况的谷山-Weil猜测,从而根据K. Ribet的工作,大定理随之成立.但不久发现Wiles的证明还有一个漏洞,这个漏洞可以弥补,Wiles表示“需要一两年时间”.

1994年,Wiles与他的学生R. Taylor弥补了证明的缺陷,他们的文章经过严格审查正式发表于*Annals of Mathematics*1995年第3期.至此,费马大定理这个350多年的猜测终于被解决了.

为解决费马大定理,人们引进了许多重要的概念(如理想、分圆域),采用了许多新的方法,它们对数论乃至整个数学的发展起着巨大的推动作用.

参考文献 [3,pp. 318~320],[6,pp. 202~230],[16,pp. 731~776],[18,pp. 144~146].

(单 墫)

欧拉猜测(Euler's conjucture) 不定方程 $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=y^4$ 有正整数解,不定方程 $x_1^4+x_2^4+x_3^4=y^4$ 没有正整数解,不定方程 $x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=y^5$ 没有正整数解.

1769年,欧拉在研究费马大定理时指出:“看来对许多几何学家来说,这一定理(费马大定理)可以推广.正如没有两个立方的和或差为立方那样,毫无疑问三个四次方的和不可能是四次方,至少四个四次方的和才能为四次方,虽然还没有人找出四个这样的四次方.同样,四个五次方的和看来不可能是五次方.对更高的幂情况与之类似.”

直至1911年,R. Norrie才给出四个四次方的和等于四次方的例子:

$$30^4+120^4+272^4+315^4=353^4.$$

又过了 55 年，L. J. Larder 与 T. R. Parkin 找到一个反例：

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5.$$

1988 年，N. Elkies 利用椭圆曲线的理论证明了

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=y^4$$

有无穷多组正整数解. 他所找出的第一组解是

$$x_1=2\,682\,440, x_2=15\,365\,639,$$
$$x_3=18\,796\,760, y=20\,615\,673.$$

随后 R. Frye 又找到最小的解

$$95\,800^4+217\,519^4+414\,560^4=422\,481^4.$$

因此，关于四次方与五次方的欧拉猜测均被推翻. 更高次幂的欧拉猜测是否正确，仍在研究之中.

参考文献 [18, pp. 139～144].

（单 墫）

Faltings-Mordall 定理（Faltings-Mordall theorem） 代数数域 K 上的代数曲线 $F(X,Y)=0$ 在亏格 g 大于 1 时，至多有有限多个 K 点.

所谓代数曲线 $F(X,Y)=0$，是指 X、Y 的多项式 $F(X,Y)$ 的零点的集合. 例如，抛物线 $Y^2-2pX=0$ 就是一条代数曲线. 如果 $F(X,Y)$ 的系数都在数域 K 中，$F(X,Y)=0$ 就称为 K 上的代数曲线. 特别地，$F(X,Y)$ 的系数都是有理数时，$F(X,Y)=0$ 称为 Q 上的代数曲线. 亏格 g 是一个有很多解释的量，对于代数曲线 $X^n+Y^n-1=0$，g 可以用公式

$$g=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

算出. 于是，在 $n>3$ 时，$g>1$，从而 $X^n+Y^n-1=0$ 上至多有有

限多个 Q 点(也就是坐标为有理数的有理点). 令 $X=\frac{x}{z}$, $Y=\frac{y}{z}$, x、y、z 为整数,并且 $(x,y,z)=1$,则得到在 $n>3$ 时,$x^n+y^n=z^n$ 至多有有限多个满足 $(x,y,z)=1$ 的整数解 x、y、z. 这是 Faltings-Mordall 定理对费马大定理的一个应用,运用这一定理还可证明费马大定理对几乎所有的 n 成立.

L. J. Mordall 是不定方程的专家,根据对一些具体的不定方程的研究,他提出了上述命题,但未能证明,直至 1984 年,这个命题才被德国数学家 Faltings 解决. 这项工作被誉为 20 世纪最大的成果,Faltings 也因此获得 1986 年的 Fields 奖.

参考文献 [6,pp. 226~227].

(单 墫)

不定方程 $x^4+y^4=z^2$ (Diophantine equation $x^4+y^4=z^2$) 方程 $x^4+y^4=z^2$ 有无正整数解?

费马在阅读丢番图的《算术》Ⅱ.8(第二章第 8 个问题)与Ⅴ.32 时指出,两个(正整数的)四次方的和不是四次方或二次方,即方程

$$x^4+y^4=z^2 \quad ①$$

无正整数解.

这一结论可以用无穷递降法证明. 假设正整数 x、y、z 适合①. 如果素数 p 是 x、z 的公因数,那么 $p^2|x^4$,$p^2|z^2$,所以 $p^2|y^4$,从而 $p|y$. 因为 $p^4|(x^4+y^4)$,所以 $p^4|z^2$,$p^2|z$. 在①的两边同时除以 p^4,并用 $\frac{x}{p}$、$\frac{y}{p}$、$\frac{z}{p^2}$ 代替 x、y、z. 于是可以假定 x、y、z 两两互素.

因为平方数除以 4 余 1 或 0,如果 x、y 都是奇数,那么 $z^2=x^4+y^4$ 除以 4 余 2. 这不可能. 所以 x、y 一奇一偶. 不妨设 x 为偶数,y 为奇数. 由勾股数的有关结论,①导出

$$x^2=2uv, \quad ②$$

$$y^2=u^2-v^2, \quad ③$$

$$z = u^2 + v^2, \qquad ④$$

其中 $(u,v) = 1$.

③即 $y^2 + v^2 = u^2$. 再次应用有关勾股数的结论，得

$$v = 2st, \qquad ⑤$$

$$y = s^2 - t^2, \qquad ⑥$$

$$u = s^2 + t^2, \qquad ⑦$$

其中 $(s,t) = 1$.

由⑤得 v 是偶数，所以 u 是奇数. 从而由②得

$$u = m^2, \qquad ⑧$$

$$v = 2n^2. \qquad ⑨$$

由⑨及⑤得

$$st = n^2.$$

因为 $(s,t) = 1$，所以

$$s = c^2, \qquad ⑩$$

$$t = d^2. \qquad ⑪$$

将⑧、⑩、⑪代入⑦得

$$c^4 + d^4 = m^2. \qquad ⑫$$

这样，由方程①的一组正整数解 x、y、z，可以导出另一组正整数解 c、d、m，并且 $m < z$. 同理，由正整数解 c、d、m，又可以导出正整数解 c'、d'、m'，并且 $m' < m$. 这个过程可以无限地继续下去(因此费马称这种方法为无限递降法). 但另一方面，小于 z 的正整数却只有有限多个，所以上述过程不可能无限制地继续下去. 这一矛盾表明①没有正整数解.

参考文献 [3,pp.318～319],[19,p.191].

(单 墫)

不定方程 $x^4 + y^4 = z^4$ (Diophantine equation $x^4 + y^4 = z^4$) 方

程 $x^4+y^4=z^4$ 是否有 x、y、z 均非0的整数解？

费马在阅读丢番图的《算术》时，指出两个(正整数的)四次方的和不可能是四次方(参见**费马大定理**)，并且多次在通信中向其他数学家提出这个问题(如1636年9月给St. Croix的信). 他自己的证明记载在笔记中，所用的方法是他钟爱的无穷递降法. 参见**不定方程 $x^4+y^4=z^2$**.

参考文献 [3,pp. 318~319],[19,p. 191].

(单 墫)

Pell 方程(Pell equation) 不定方程 $x^2-dy^2=1$，其中 d 是不含平方因子的自然数.

早在公元前400年左右，古代印度与希腊在以有理数 $\frac{a}{b}$ 逼近 $\sqrt{2}$ 时，就产生方程 $a^2-2b^2=1$ 以及关于其他平方根的相应方程.

阿基米德的牛群问题是一个典型的与 Pell 方程有关的"应用问题"(参见**阿基米德的牛群问题**).

Pell 方程与 Pell 完全无关，倒是费马在1657年2月曾断言这种方程有无穷多组整数解，后来又向英国数学家挑战，让他们解这类方程. 英国数学家 Wallis(1616~1703)在1657年与1658年的信中给出了解法. 解的存在性是100年后拉格朗日彻底解决的. 所以，这类方程称为费马方程似更恰当. 由于大数学家欧拉张冠李戴，误把它归之于与费马同一时代的 Pell，后来竟以讹传讹，一直沿用了下来.

Pell 方程

$$x^2-dy^2=1 \qquad ①$$

的正整数解 (x,y) 中，使 $x+y\sqrt{d}$ 的值为最小的那一组称为最小解. 例如，$x^2-2y^2=1$ 的最小解是 $x=3, y=2$.

如果 (x_1,y_1) 是①的最小解，那么①的全部解可由

$$x_n=\frac{1}{2}((x_1+\sqrt{d}\,y_1)^n+(x_1-\sqrt{d}\,y_1)^n),$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{d}}((x_1+\sqrt{d}\,y_1)^n-(x_1-\sqrt{d}\,y_1)^n)$$

$(n=1,2,\cdots)$ 给出.

最小解有时可通过观察与尝试得出.一般情况需借助连分数或其他方法去求.

与 Pell 方程类似的方程 $x^2-dy^2=-1$, $x^2-dy^2=4$, $x^2-dy^2=-4$ 也可进行相应的讨论.

方程 $x^2-dy^2=\pm1$, $x^2-dy^2=\pm4$ 与二次域 $Q(\sqrt{d})$ 的单位有密切的关系.

Pell 方程在研究其他不定方程时经常被作为工具引用.

参考文献　[3,pp. 286～289,pp. 361～363],[6,p. 131],[14,p. 346].

（单　墫）

不定方程 $y^2-1=x^p$ (Diophantine equation $y^2-1=x^p$)　确定方程 $y^2-1=x^p$ 的正整数解.

本问题是 1842 年 Catalan 提出的猜想(参见 **Catalan 猜想**)的特殊情况.容易(由平方差公式)知道,只需考虑 p 为奇素数的情况.欧拉证明 $p=3$ 时,仅有解 $x=0,-1,2$. $p>3$ 的情况,Nagell、Oblath、Hyyrö 与 Inkeri 都做了不少工作.最后,我国数学家柯召在 1962 年彻底解决了这一问题.他证明了不定方程

$$y^2-1=x^p$$

在 $p>3$ 时,无正整数解.

参考文献　[22,p. 276,p. 302].

（单　墫）

Catalan 猜想(Catalan's conjecture)　仅有两个整数的幂,即 9 与 8,相差为 1.

1842 年,E. Catalan 提出上述猜想,很多人研究这一问题,直

至 1976 年才被荷兰数学家 R. Tijdeman 基本解决. 他运用英国数学家 A. Baker 的“有效方法”,证明了以下定理:

设 $n > 10^{10^{500}}$, $l > 1$, $s > 1$, 则方程组

$$n = x^l, n + 1 = y^s$$

不可能有整数解 $x > 0, y > 0$.

换句话说,Catalan 方程

$$y^s - x^l = 1$$

仅可能有有限多组解,而且解有上界 $x^l \leqslant 10^{10^{500}}$.

A. Baker 的有效方法可以定出许多不定方程的解的上界,这是一项突破性的工作,A. Baker 也因此获得 1970 年的 Fields 奖.

当然所得的上界往往太大,需要做进一步的细致的工作,使上界减小. 但从理论角度看,能定出一个可以算出的上界,便可认为问题已基本解决.

参考文献 [3,p. 644],[22,pp. 272~276,p. 300].

(单 墫)

不定方程 $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ (Diophantine equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$) 是否对一切大于 3 的正整数 n,这个方程均有正整数解 x、y、z?

Erdös 与 Straus 猜测对一切大于 3 的整数 n,这个方程均有正整数解 x、y、z. 这一猜测经过很多人验证. Straus, Bernstein, Shapiro, Obláth, Yamamoto, Franceschine 分别证明 $n < 5\,000$, $n < 8\,000$, $n < 20\,000$, $n < 106\,128$, $n < 10^7$, $n < 10^8$ 时猜测成立.

1957 年,波兰数学家 Sierpinski 考虑类似的方程 $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Stewart 证明 $n \leqslant 1\,057\,438\,801$ 时,方程有正整数解,并

且在 n 不为形式 $278\,460k+1$ 时,方程有正整数解.

1970 年,R. C. Vaughen 证明对任一给定的 m,方程 $\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 对几乎所有的 n 有解.更确切地,令 $E_m(N)$ 为不大于 N 且使该方程无解的 n 的个数,则

$$E_m(N) \ll Ne^{-c(\log N)^{\frac{2}{3}}},$$

其中 c 是仅与 m 有关的正的常数.

这类不定方程与埃及分数有关,是很多数学家很感兴趣的问题.参见**埃及分数**.

参考文献 [22,p. 288].

(单 墫)

四 素数分布

素数的无限性(The number of primes is infinite) 素数的个数是无穷的.

欧几里得《几何原本》第Ⅸ卷命题 20 叙述了这一命题,并给出一个巧妙的证明.

证明采用反证法.设只有有限多个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,则 $p_1p_2\cdots p_n+1$ 为合数.但它不被 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 中任一个整除,因而它的素因数与 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 均不相同.矛盾.

在这以后,有多种多样的证明.

对素数个数的更精确的描述,参见**素数定理**.

参考文献 [3,pp. 90～93],[19,pp. 12～16],[20,pp. 3～12].

(单 墫)

Bertrand 猜测(Bertrand's postulate) 对 $x \geqslant 2$，在 x 与 $2x$ 之间必有一个素数.

1845 年，在研究置换群时，Bertrand 曾对 6～6 000 000 的整数 n 进行检验，证实在 $\frac{n}{2}$ 与 $n-2$ 之间均有素数，从而提出上述猜测. 契比雪夫引进函数 $\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p$ 与 $\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$ $\left(p\text{ 为素数}, \Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, n=p^{\alpha}, \alpha\geqslant 1\\ 0, \text{其他}\end{cases}\right)$，利用他对$\theta(x)$、$\Psi(x)$的估计得出 $\pi(2m)-\pi(m)\geqslant 1(m\geqslant 1)$，即对每个整数 $m\geqslant 1$，必有素数 p 满足 $m<p\leqslant 2m$ ($\pi(x)$的意义见**素数定理**). 从而在 1852 年，作为估计 $\pi(x)$的一个副产品，证明了 Bertrand 猜测. 因此，这一猜测现在常称为契比雪夫定理.

契比雪夫定理有很多简单的证明. 如 1919 年 Ramanujan 利用 Γ 函数的证明(见其选集 208～209 页)，1930 年 Erdös 利用二项系数的证明(见华罗庚《数论导引》)，1949 年 L. Moser 的证明最为简单(载于《美国数学月刊》1949 年第 56 期第 624～625 页).

参考文献 [3, pp. 94～99].

(单 墫)

契比雪夫定理(Tschebyscheff's theorem) 见 **Bertrand 猜测**.

m^2 与$(m+1)^2$ 之间是否必有素数(Is there always a prime between m^2 and $(m+1)^2$)猜测 m^2 与$(m+1)^2$ 之间必有一个素数.

这个猜测一直未能证明. 如果这个猜测成立，那么相邻素数的差 $d_n=p_{n+1}-p_n<4m+2$. 从而更有 $d_n=O(p_n^{\frac{1}{2}}\log p_n)$ (参见**相邻素数的差**). 因此这个猜测是很强的，证明一定十分困难.

参考文献 [3, p. 90], [19, p. 19].

(单 墫)

相邻素数的差(Gaps between primes) 对相邻素数的差进行估计.

设 p_n 为第 n 个素数，$d_n = p_{n+1} - p_n$ 是相邻的两个素数的差.

易知对任意自然数 k，$k!+2, k!+3, \cdots, k!+k$ 都是合数，所以 d_n 可以任意地大. 但 d_n 与 p_n 相比并不很大. 契比雪夫定理表明

$$d_n < p_n.$$

1921 年，Cramér 借助黎曼假设证明了

$$d_n = O(p_n^{\frac{1}{2}} \log p_n). \quad ①$$

用比黎曼假设弱的关于 $\zeta(s)$ 零点的密度假设可以证明

$$d_n = O(p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad ②$$

其中 ε 为任意小的正数.

1937 年 Ingham 得出无条件的结果 $d_n = O(p_n^{\frac{5}{8}+\varepsilon})$，在这之后有许多人将 p_n 的指数 θ 作了改进，如

1969 年，Montgomery，$\theta = \frac{3}{5} + \varepsilon$.

1972 年，Huxley，$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon$.

1979 年，Iwaniec 与 Jutila，$\theta = \frac{13}{23} + \varepsilon$.

1979 年，Heath-Brown 与 Iwaniec，$\theta = \frac{11}{20} + \varepsilon$.

1984 年，Iwaniec 与 Pintz，$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{21} = 0.547\,6\cdots$.

1986 年，Mozzochi，$\theta = \frac{11}{20} - \frac{1}{384} = 0.547\,395\,8\cdots$.

关于 d_n 的下界，1940 年 Erdös 首先证明了

$$E = \liminf \frac{d_n}{\log p_n} < C < 1,$$

其中 C 为正的常数. 1966 年，Bombieri 与 Davenport 证明了 C 可取 0.467. 1977 年，Huxley 改进为 0.442 5. 1985 年，Maier 改进为

0.248. 猜测应有 $E = 0$.

参考文献 [3, p. 90, p. 639], [18, pp. 19～23], [20, pp. 191～196].

（单 墫）

孪生素数(Twin primes) 是否有无穷多对素数，每一对的差为 2？

挪威数学家 Brun 将相差为 2 的一对素数称为孪生(双生)素数. 例如

3,5;5,7;11,13;17,19;29,31;41,43;…

1979 年，Atkin 与 Rickert 找出的一对数

$$1\,159\,142\,985 \times 2^{2\,304} \pm 1$$

是当时所知的最大的孪生素数. 此后这一纪录不断被打破. 1993 年，H. Dubner宣布的新纪录是

$$2^{4\,025} \times 3 \times 5^{4\,020} \times 7 \times 11 \times 13 \times 79 \times 223 \pm 1,$$

有 4 030 位.

用 $P(x)$ 表示 $\leqslant x$ 的孪生素数对的个数. 猜测 $P(x)$ 随 x 趋于无穷，即有无穷多对孪生素数. 哈代与 Littlewood 于 1922 年甚至猜出 $P(n)$ 的渐近公式为

$$P(x) \sim \frac{2x}{(\log x)^2} \prod \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right),$$

其中 p 跑遍奇素数 $\left(\text{可以算出} \quad \prod \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 0.660\,16\right)$.

1920 年，Brun 证明了存在一个可以计算的常数 x_0，当 $x > x_0$ 时，

$$P(x) < \frac{100x}{(\log x)^2}.$$

1966 年，Bombieri 与 Davenport 应用筛法将上述结果改进为

$$P(x) \leqslant 8 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x}{(\log x)^2} \left(1 + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right),$$

Fouvry 与 Iwaniec 于 1983 年将上式中的 8 改为 $\frac{68}{9} + \varepsilon$，Bombieri，Friedlander 与 Iwaniec 于 1986 年又将其改为 $7 + \varepsilon$，但离哈代与 Littlewood 所猜测的 2 还差不少.

孪生素数猜测往往与哥德巴赫猜测的研究同时进行. 这方面的最好结果是陈景润 1966 年得到的，他证明了有无穷多个素数 p，使 $p + 2$ 为不超过 2 个素数的积.

$\sum \frac{1}{p}$（p 跑遍素数）是发散的. 有趣的是，1919 年 Brun 证明了孪生素数的倒数和

$$\begin{aligned} B &= \sum \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \cdots \end{aligned}$$

（p、$p+2$ 同为素数）是收敛的. 它的值为 1.902 160 54…

孪生素数、哥德巴赫猜测等与素数有关的问题在希尔伯特的 23 个问题中被归于第八问题（见希尔伯特第八问题）.

参考文献 [3，p. 89]，[14，p. 339]，[18，pp. 19～23]，[20，pp. 199～205].

（单 墫）

双生素数（Twin primes） 见孪生素数.

形如 $n^2 + 1$ 的素数（Primes of the form n^2+1） 是否有无穷多个形如 $n^2 + 1$ 的素数？

1923 年，哈代与 Littlewood 猜测有无穷多个形如 $n^2 + 1$ 的素数，而且在 $\leqslant x$ 的数中，这种形式的数的个数

$$\pi_{n^2+1}(x) \sim \prod_{p\geqslant 3}\left(1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p-1}\right)\frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

1954 年，Kuhn 证明有无穷多个形如 n^2+1 的数，至多是 3 个素数的积. 1978 年，H. Iwaniec 得到更好的结果：有无穷多个 n^2+1 是至多两个素数的积.

有趣的是，二次域 $Q(\sqrt{d})$（有理数域 Q 添加 $\sqrt{d}$）的类数与此有关. 1976 年，Chowla 猜测：若 m^2+1 是素数，$m>26$，则 $Q(\sqrt{m^2+1})$ 的类数大于 1.

更一般地，设 a、b、c 为整数，$(a,b,c)=1$，a 为正数，$a+b$ 与 c 不全为偶数，b^2-4ac 不是平方数，猜测有无穷多个整数 n，使 an^2+bn+c 为素数.

上述猜测十分艰难. 即使形如 n^2+1 的素数是否有无穷多个，至今也未能证明或推翻.

参考文献 [3,p. 90]，[19,p. 19]，[20,pp. 307~320].

（单 墫）

表素数的公式（Formula for prime numbers） 寻求一个公式，在其中变量取正整数值时，该式的值均为素数.

1640 年，费马首先提出表素数的公式. 他认为对所有的自然数 n，$2^{2^n}+1$ 都是素数. 但这在 $n=5$ 时即不正确（参见费马数）.

1772 年，欧拉指出，x^2+x+41 在 $x=-40,-39,\cdots,38,39$ 时均为素数（即 $x^2-79x+1\,601$ 在 $x=0,1,2,\cdots,79$ 时均为素数）. 近代的研究发现欧拉所举的例子有很深刻的内容，1965 年发现二次多项式 x^2+x+b 在 $x=0,1,\cdots,b-2$ 时为素数与二次域 $Q(\sqrt{1-4b})$ 为唯一分解域等价，具有这种性质的最大的 $b=41$. 换句话说，不存在 $b>41$，使得 x^2+x+b 在 $x=0,1,\cdots,b-2$ 时均为素数.

不难证明，没有一个整系数的多项式 $f(x)$，对一切整数 x，

$f(x)$均为素数.事实上,设$f(x)$在$x=a$时为素数p,则$f(a+kp)$被p整除,只要k为整数,而$f(a+kp)=\pm p$至多对$2n$个k成立(n是$f(x)$的次数),所以必有无穷多个k使$f(a+kp)$为合数.

另一方面,可以证明对每一个自然数n,存在一个n次整系数多项式$f(x)$,使得在$x=0,1,\cdots,n$时,$f(x)$均为素数.

如果不限定用多项式,可以找到表示无限多个素数的函数.1947年,W. H. Mills证明存在一个实数θ,使$[\theta^{3^n}]$($[x]$表示x的整数部分)对一切自然数n,均表示素数,其中$\theta=1.3064\cdots$,但准确值仍为未知.

1963年,B. M. Bredihin证明二元二次多项式$f(x,y)=x^2+y^2+1$对无穷多对整数x,y取素数值.但$f(x,y)$显然不永远取素数值(x为奇数,y为偶数时,$f(x,y)$被2整除).

70年代得到另一个二元函数

$$f(x,y)=\frac{y-1}{2}(|B^2-1|-(B^2-1))+2,$$

其中$B=x(y+1)-(y!+1)$.这个函数对所有的正整数对x,y均表示素数,而且取遍所有素数,每个奇素数恰取一次,但有无穷多次值为2.证明如下:

在$B^2\geqslant 1$时,$f(x,y)=2$.

在$B^2=0$即$B=0$时,$f(x,y)=y+1$.由$B=0$得

$$x(y+1)=y!+1,$$

从而$y+1$整除$y!+1$.但由数论中的威尔逊定理,当且仅当p为素数时,p整除$(p-1)!+1$.因此$y+1$为素数,并且$x=\frac{y!+1}{y+1}$.这时$f(x,y)$的值为素数$y+1$,并且(若$y>1$)$f(x,y)$仅在这时值为$y+1$.

参考文献 [3,p. 89,p. 111],[18,pp. 36~41],[19,p. 17],

[20. pp. 129～152].

（单 墫）

表第 n 个素数的公式（Formula for the nth prime number） 一个定义在自然数集上的函数 f，对所有自然数 n，$f(n)$是第 n 个素数.

1952 年，Sierpinski 曾给出一个公式：

令 $\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_m}{10^{2^m}}$，其中 $p_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为第 m 个素数（易知该级数收敛，α 存在），则

$$f(n)=\left[10^{2^n}\alpha\right]-10^{2^{n-1}}\left[10^{2^{n-1}}\alpha\right] \qquad ①$$

表示第 n 个素数. 其中$[x]$表示 x 的整数部分.

证明很容易，根据 α 的定义，

$$[10^{2^n}\alpha]=10^{2^n-2}p_1+10^{2^n-2^2}p_2+\cdots+10^{2^n-2^{n-1}}p_{n-1}+p_n,$$

$$10^{2^{n-1}}[10^{2^{n-1}}\alpha]=10^{2^n-2}p_1+10^{2^n-2^2}p_2+\cdots+10^{2^n-2^{n-1}}p_{n-1},$$

两式相减，差为 p_n.

但公式①并无实用价值，因为必须知道 $p_1,p_2,\cdots$才能算出 α.

1964 年，Willans 给出另一个公式. 令

$$F(j)=\left[\cos^2\pi\frac{(j-1)!+1}{j}\right], \qquad ②$$

则

$$f(n)=1+\sum_{m=1}^{2^n}\left[\sqrt[n]{\frac{n}{\sum_{j=1}^{m}F(j)}}\right] \qquad ③$$

表示第 n 个素数.

证明如下：首先由威尔逊定理，有

$$F(j)=\begin{cases}1,若\ j\ 为素数或\ 1,\\0,若\ j\ 为合数,\end{cases}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{m}F(j)=1+\pi(m),$$

这里 $\pi(m)$ 表示不超过 m 的素数的个数.

设 p_k 是第 k 个素数,则在 $p_{k-1}\leqslant m<p_k$ 时,

$$\pi(m)+1=k.$$

另一方面,

$$\sqrt[n]{\frac{n}{k}}\begin{cases}<1,\ 若\ k>n,\\<2,\ 若\ k\leqslant n,\end{cases}$$

所以

$$f(n)=1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=p_{k-1}}^{p_k-1}\left[\sqrt[n]{\frac{n}{k}}\right]$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(p_k-p_{k-1})=p_n.$$

1971 年,Gandhi 给出用前 $n-1$ 个素数 $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$ 表示 p_n 的公式

$$p_n=\left[1-\log_2\left(-\frac{1}{2}+\sum_{d\mid P}\frac{\mu(d)}{2^d-1}\right)\right],\qquad ④$$

其中 $P=p_1p_2\cdots p_{n-1}$,$\mu(d)$ 是麦比乌斯函数,定义为

$$\mu(d)=\begin{cases}1,若\ d=1,\\(-1)^k,若\ d\ 是\ k\ 个不同素数的积,\\0,若\ d\ 有平方因子.\end{cases}$$

④的证明是利用和号交换及麦比乌斯函数的性质:

$$(2^P-1)\sum_{d|P}\frac{\mu(d)}{2^d-1}=\sum_{d|P}\mu(d)\sum_{\substack{t<P\\ d|t}}2^t=\sum_{t<P}2^t\sum_{\substack{d|P\\ d|t}}\mu(d)$$

$$=\sum_{t<P}{}'2^t\left(这里利用了\sum_{d|(t,P)}\mu(d)=\begin{cases}1,若(t,P)=1,\\0,其他情况\end{cases}\right).$$

其中 $\sum'$ 表示只对 $(t,P)=1$ 的 t 求和. 于是,

$$2(2^P-1)\left(-\frac{1}{2}+\sum_{d|P}\frac{\mu(d)}{2^d-1}\right)$$

$$=-(2^P-1)+\sum_{t<P}{}'2^{t+1}$$

$$=1+\sum_{t<P-1}{}'2^{t+1}.$$

若 $1<j<p_n$, 则必有 $p_i|j$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, 从而 $(P-j,P)\geqslant p_i>1$. 所以

$$1+\sum_{t<P-1}{}'2^{t+1}=1+\sum_{t\leqslant P-p_n}{}'2^{t+1},$$

$$\frac{2^{P-p_n+1}}{2\times 2^P}<-\frac{1}{2}+\sum_{d|P}\frac{\mu(d)}{2^d-1}<\frac{2^{P-p_n+2}-1}{2\times(2^P-1)}$$

$$<\frac{2^{P-p_n+2}}{2\times 2^P},$$

$$-p_n<\log_2\left(-\frac{1}{2}+\sum_{d|P}\frac{\mu(d)}{2^d-1}\right)<1-p_n,$$

$$\left[1-\log_2\left(-\frac{1}{2}+\sum_{d|P}\frac{\mu(d)}{2^d-1}\right)\right]=p_n.$$

类似的公式还有不少. 这些公式均需大量的计算, 因此并没有真正的实用价值.

参考文献 [19, p. 414], [20, p. 190].

(单 墫)

素数定理(Prime number theorem) 用 $\pi(x)$ 表示不超过正数 x 的素数的个数(例如, $\pi(10.5)=4$, 即不超过 10.5 的素数共 4

个：2,3,5,7)，则有

$$\pi(x)=\frac{x}{\log x}+R,$$

这里 $\log x$ 是 x 的自然对数(以 e 为底的对数)，R 称为余项，当 x 很大时，R 与主项 $\frac{x}{\log x}$ 相比是微不足道的，即

$$R=o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

$o(f(x))$ 表示与 $f(x)$ 相比，它是低级的无穷大.

上述素数定理是素数分布理论的中心问题. 高斯与勒让德都曾猜测 $\pi(x)$ 与 $\frac{x}{\log x}$ 大致相等. 但在他们提出这个猜测后，50 年内毫无进展. 取得突破的是俄国数学家契比雪夫，他在 1849 年与 1952 年发表的两篇文章中得出，当 x 很大时，

$$0.921\,29\frac{x}{\log x}\leqslant\pi(x)\leqslant1.105\,55\frac{x}{\log x}.$$

1896 年，法国数学家阿达玛与 de la Vallée-Poussin 同时独立地证明了素数定理. 他们的证明都利用了黎曼 1859 年的一篇论文的思想，利用了复变函数的理论.

许多数学家认为素数定理应当有一个不需要复变函数论的"初等证明". 1948 年，挪威数学家 Selberg 与匈牙利数学家 Erdös 找到了这样的证明.

素数定理的余项估计是数论中的重要问题. 1900 年 de la Vallée-Poussin 首先证明了

$$\pi(x)=Li\,x+O(xe^{-C\sqrt{\log x}}),$$

这里 $\mathrm{Li}\,x=\int_C^\infty\frac{\mathrm{d}u}{\log u}$ 比 $\frac{x}{\log x}$ 更接近 $\pi(x)$，C 是正的常数. 1958 年，И. М. Виноградов 将其中的 O 项改进为 $xe^{-C(\log x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}}$，$\varepsilon$ 为任意正

数，C 与 ε 有关.

参考文献 [3, pp. 87～88, pp. 234～257, p. 642], [5, pp. 196～215], [14, pp. 337～339], [15, pp. 413～440], [20, pp. 154～185].

（单 墫）

算术级数中的素数定理（The prime number theorem for an arithmetic progression） 设等差数列的首项 l 与公差 k 是互素的自然数，用 $\pi(x;k,l)$ 表示这个数列中不超过 x 的素数个数，则

$$\pi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)\log x}+R, \qquad ①$$

其中 $\varphi(k)$ 是欧拉函数，余项 $R=o\left(\frac{x}{\log x}\right)$.

1837 年，狄利克雷首先证明了 l 与 k 互素时，算术级数 $\langle kn+l\rangle_{n=0}^{\infty}$ 中有无穷多个素数.

de la Vallée-Poussin 建立了比上述狄利克雷定理更精确的①.

对①的余项估计，1935 年 A. Page 和 1936 年 C. L. Siegel-A. Walfisz 证明了：对任意正数 h，当 $k\leqslant(\log x)^h$ 时，有

$$\pi(x;k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\mathrm{Li}\ x=O(xe^{-C\sqrt{\log x}}),$$

其中 $\mathrm{Li}\,x$ 为积分对数，C 为正的常数，O 中所含常数仅与 h 有关，与 k 无关.

算术级数中的素数定理在哥德巴赫猜测的研究中起着极重要的作用.

参考文献 [3, pp. 87～88, p. 112, pp. 258～263], [5, pp. 307～318], [14, pp. 339～340], [20, pp. 205～225].

（单 墫）

算术级数中的最小素数(The smallest prime in an arithmetic progression) 设算术级数(等差数列)的首项 l 与公差 k 为互素的自然数,对这级数中的最小素数进行估计.

令 $p(k,l)$ 为算术级数 $\{kn+l\}_{n=0}^{\infty}$ 中的最小素数,$p(k)=\max\limits_{1\leqslant l<k}p(k,l)$. 设 $k>1$,对 $p(k)$ 的估计是数论中最困难的问题之一.

1934 年,S. Chowla 猜测 $p(k)=O(k^{1+\varepsilon})$,并借助广义黎曼假设证明 $p(k)<k^{2+\varepsilon}$,其中 ε 为任意小的正数.

1944 年,Динник 首先证明存在常数 C,使得 $p(k)<k^{C}$. 1957 年,潘承洞指出 C 是可以计算的,而且得出 $C\leqslant 5\,448$. C 的改进纪录如下:

1965 年,陈景润,$C\leqslant 777$;

1970 年,Jutila,$C\leqslant 550$;

1977 年,陈景润,$C\leqslant 168$;

1977 年,Jutila,$C\leqslant 80$;

1979 年,陈景润,$C\leqslant 17$;

1986 年,王炜,$C\leqslant 16$.

目前最好的结果是陈景润与刘健民 1989 年得到的 $C\leqslant 13.5$.

关于 $p(k)$ 的下界也有不少人在研究.

参考文献 [3,p. 639],[5,pp. 856~866].

(单 墫)

Schinzel 猜测(Schinzel's conjecture) 若多项式 $f_1(x)$,$f_2(x)$,…,$f_m(x)$都是整系数既约多项式,首项系数为正,并且没有素数 p 整除所有的 $f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$($x$ 为整数),则有无穷多个整数 x,使 $f_1(x)$,$f_2(x)$,…,$f_m(x)$均为素数.

上述猜测是波兰数学家 Schinzel 1958 年提出的. 这个猜测包含了许多重要的结果与猜测. 例如,$m=1$,$f(x)=ax+b$ 时,这猜测即算术级数的狄利克雷定理;$m=2$,$f_1(x)=x$,$f_2(x)=$

$x-2$ 即孪生素数猜测.

如果 Schinzel 猜测成立,那么可以推出许多重要的结论,例如:

对每个自然数 n,存在无穷多个自然数 x,使 $x^{2^n}+1$,$x^{2^n}+3$,$x^{2^n}+7$,$x^{2^n}+9$ 均为素数;

存在无穷多个素数 p,使 $ap+b$ 为素数(a、b 为互素的整数,$a>0$);

每个偶数可表为无穷多对素数的差;

在 a、b 为互素整数,$a>0$ 时,存在无穷多个整数 x,使 $ax+b$,$ax+b+2$ 为素数(因而孪生素数猜测成立);

对任意整数 k,存在无穷多个整数 x,使 x,$2x+2k+1$ 均为素数;

每个形如 $6k$(k 为自然数)的数是两个形如 $6h+1$ 的素数之差(G. de. Rocquigny 问题);

存在任意长的、由连续素数组成的算术级数;

若 $f(x)$ 为整系数既约多项式,n 为 x 跑遍整数集 $\mathbf{Z}$ 时,$f(x)$ 的最大公约数,则 $\frac{f(x)}{n}$ 对无穷多个 x 取素数值(1857 年,W. Bouniakowsky的猜测).

因此,Schinzel 猜测是一个很大的猜测.当然它的证明(或被推翻)目前还没有做到.

参考文献 [23,pp. 23~27].

(单 墫)

黎曼假设(Riemann hypothesis) 将 s 的函数 $\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$ 解析开拓到复平面上,所得的函数称为黎曼 ζ 函数.猜测 $\zeta(s)$ 的非平凡的零点(即除去负整数外的零点)全在直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上 $\left(\text{即零点 } \sigma+it \text{ 的实部为} \frac{1}{2}\right)$.这就是著名的黎曼假设.

黎曼1859年准备晋升教授时，发表题为《论小于给定数的素数个数》的论文，在其中引入ζ函数，为证明素数定理开辟了道路. 在这篇8页的论文中，有6个结论没有证明，其中5个都是正确的，并且被后来的数学家阿达玛等证明，只留下上面所说的那个假设至今未被证实. 1914年，哈代曾证明$\zeta(s)$有无穷多个零点在直线$\sigma=\frac{1}{2}$上. 1974年，Levinson证明$\sigma=\frac{1}{2}$上的零点至少占全部零点的$\frac{1}{3}$. 1989年，Conrey将$\frac{1}{3}$改进为$\frac{2}{5}$. 1986年，Van de Lune等人通过计算机，已经知道$\zeta(s)$的前1 500 000 001个零点都在$\sigma=\frac{1}{2}$上.

黎曼假设十分重要. 如果这个假设成立，数论中很多重要结果都能得到显著的改进. 1927年，德国杰出的数论专家E. Landau在他的名著《数论讲义》中专门用了一章《在黎曼假设下》，讲述从黎曼假设可以推出的结论.

黎曼假设常简记为RH. 与$\zeta(s)$类似可以引入更一般的L函数，关于它的零点，相应的假设称为广义黎曼假设，简记为GRH.

参考文献　[5，pp. 216～228].

（单　墫）

五　堆垒数论

堆垒数论（Additive theory of numbers）　研究将一个自然数表示成某种数的和. 例如，哥德巴赫问题是将自然数表示成几个素数的和，华林问题是将自然数表示成k次方的和，等等. 堆垒数论也称为加性数论.

堆垒素数论（Additive theory of primes）研究将自然数表成素数或素数幂的和. 例如，哥德巴赫问题，素变数的华林问题，等等. 我国数学家华罗庚著有专著《堆垒素数论》，系统研究这方面

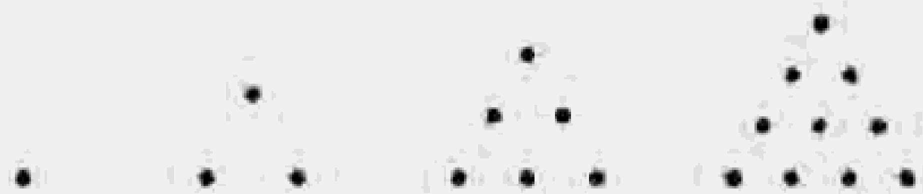
的问题.

参考文献 [14,p.333].

(单 墫)

三角形数(Triangular numbers) 形如 1,1+2,1+2+3,…的数称为三角形数或三角数.

三角形数产生于几何学.早在公元前6世纪毕达哥拉斯即对它进行了研究.如图.



将点排成行,第一行1个点,第二行2个点,…每行比上一行多1个点.如果共有 n 行,那么点数就是第 n 个三角数 t_n.显然

$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

关于三角数的问题很多,大多是关于它的堆垒性质(加法性质).例如,1796年7月10日,高斯在他的日记中记录了

$$\text{Eyphka! num} = \triangle + \triangle + \triangle$$

即发现了每个自然数可表示为3个三角数的和.日记中载有高斯的证明,但直至他去世40多年后,这本日记才公诸于世.费马曾提出更一般的命题并为柯西证明,参见**多角形数**.

费马还提出"除了1,其余的三角数都不是四次方"(1658年6月给 Brouncker 与 Wallis 的信),他自己证明了这个命题.

费马提出的另一个命题"除了1,其余的三角数都不是立方",被欧拉在1738年证明.

关于三角形数的问题举不胜举,不断有新的发现,例如,U. Alemtejano 在1914年得到"若 $4m+1$ 是两个平方的和,则 m 是

两个三角形数的和，反之亦然”．证明只需利用一个简单的恒等式

$$4(\triangle_n+\triangle_k)+1=(n+k+1)^2+(n-k)^2.$$

参考文献 [6，p. 27]，[14，p. 334]，[16，pp. 1～40].

（单 墫）

多角形数(Polygonal numbers) 首项为1，公差为 $m-2$ 的等差数列，前若干项的和称为 m 角形数或 m 角数．当 $m=3$ 时，即三角形数；$m=4$ 时，即平方数；$m=5$ 时，称为五角形数；等等．

多角形数产生于几何学．早在公元前6世纪，毕达哥拉斯即对它进行研究．如图2-1，先放1个点，再放 $m-1$ 个点与前一个点形成正 m 边形，接着放 $(m-1)+(m-2)$ 个点形成更大的正 m 边形．这样继续下去．如果放 n 层（第一个点作为第一层），那么点数之和就是第 n 个 m 角形数．



图 2-1

由等差数列求和公式易知，第 n 个 m 角形数是

$$\frac{1}{2}n(2+(n-1)(m-2)).$$

丢番图在他的著作《算术》、《论多角形数》中研究了多角形数．法国人 Bachet 将《算术》引入西欧，译成拉丁文并增以注释．费马又在这书的页边写了许多著名的评论．如“我第一个发现这非常优美、十分一般的定理：每一个（自然）数是三角数或两个三角数的和或三个三角数的和．每一个数是平方数或二、三、四个平方数的和，是五角数或二、三、四、五个五角数的和，依此类推．我无法在这

里给出证明，这涉及数的许多深奥的秘密，我准备写一整本书讨论这一课题，将目前关于数的知识的边界向前推进". 费马在1636年12月给Mersenne的信及稍后给帕斯卡等人的信中均提到这一定理(关于平方数的和，Bachet已提出相应的定理，参见**平方和**)，但费马并没有出版他准备写的书. 1815年，柯西首先给出上述定理的证明，他还指出m个数中除去4个外，都可以取0.

参考文献 [6,p.5],[14,p.334],[16,pp.1~40].

(单 墫)

自然数的分拆(Partition) 将自然数n以几个正整数的和来表示，称为n的一种分拆. 例如，$5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$. 设$n=n_1+n_2+\cdots+n_t$是$n$的一种分拆，可以通过对$n_i$附加条件而提出各种问题. 例如，$n_i$互不相等，$n_i$都是奇数，$n_i$都小于$m$，$n_i$满足某些同余关系，$n_i$为正整数幂，$n_i$为正素数幂，等等. 对分拆的种数的研究更是一个十分重要的问题.

一些特殊的分拆问题在中世纪即已出现. 但第一个深刻的结果是在18世纪由欧拉给出的. 欧拉证明了许多优美而有意义的分拆定理，奠定了分拆理论的基础. 例如，他证明了：

将n分为不等数的和的分拆数等于将n分为奇数的和的分拆数.

用$p(n)$表示n的所有不同的分拆的个数，这里不计各加数的顺序，并允许加数重复出现. 例如，$p(5)=7$.

分拆数$p(n)$有很深刻的内涵，它等于n阶对称群的共轭类的个数，并与群的表示理论密切相关.

欧拉曾证明在n为自然数时，

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)+\cdots+(-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m-1)\right)+(-1)^m p\left(n-\frac{1}{2}m(3m+1)\right)+\cdots=0$$ (约定$n<0$时，$p(n)=0$，又$p(0)=1$)，

这称为五角数$\left(\text{形如}\frac{1}{2}m(3m-1)\text{的数}\right)$定理.

许多大数学家，如凯莱、高斯、哈代、雅可比、拉格朗日、勒让德、Littlewood、Rademacher、Ramanujan、Schur、Sylvester，都对分拆理论的发展作过贡献.

参考文献 [3，pp. 202～219]，[14，pp. 344～346]，[16，pp. 101～164]，[19，pp. 273～297].

（单 墫）

平方和(Sum of squares) 设k是一个正整数，研究什么样的自然数能表成k平方和(k个整数的平方的和)，有多少种表示方法.

这类问题在丢番图的名著《算术》中已多次出现. 费马断言素数p是二平方和的充要条件是$p=2$或p除以4余1，但没有给出证明. 第一个证明是欧拉给出的. 对于一般的自然数n，高斯在1801年证明了下面的结论：

正整数n是二平方和的充要条件是n的分解式中，指数为奇数的素因数是2或除以4余1.

费马等也猜到了这一结论，但未证明.

高斯还证明了：

正整数n是三平方和的充要条件是$n\neq 4^a(8b+7)$，其中a、b为任意非负整数.

1770年，拉格朗日证明了一个漂亮的定理：

每个正整数均是四平方和(从而也是k平方和，$k\geqslant 4$).

用$r_k(n)$表示将n表成k平方和的表法个数(即不定方程$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=n$的整数解的个数). 具体算出$r_k(n)$的人名如下表.

k	$r_k(n)$的求出者
2，4，6，8	雅可比，1828年
3	狄利克雷

续 表

k	$r_k(n)$的求出者
5,7	艾森斯坦，Smith，闵科夫斯基
10,12	刘维尔，1864年，1866年
14,16,18	Glaisher，1907年
20,22,24	Ramanuja，1916年
9,11,13 15,17,19 21,23	Домадзе，1949年

其中 $r_2(n)$ 最为简单. 设 $n=2^a p_1^{b_1}\cdots p_s^{b_s} q_1^{c_1}\cdots q_t^{c_t}$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_s$ 为除以4余1的素数，$q_1<q_2<\cdots<q_t$ 为除以4余3的素数，则

$$r_2(n)=\begin{cases}0,\text{若 } c_1,\cdots,c_t \text{ 不全为偶数},\\ 4(b_1+1)\cdots(b_s+1),\text{若 } c_1,\cdots,c_t \text{ 全为偶数}.\end{cases}$$

其他的公式均很复杂，而且推导这些公式需要利用椭圆模函数等高深的理论.

平方和的问题还可以推广到一般的域上.

参考文献 [3, pp. 220～233]，[16, pp. 225～317]，[18, pp. 136～138].

（单 墫）

华林问题(Waring's problem) 对每个给定的自然数 $k>1$，是否存在自然数 $s=s(k)$，使每个自然数 n 均可表示成 s 个非负整数的 k 次方的和?

1770年，拉格朗日证明了每个自然数可表为至多4个平方的和.

1782年，华林在其著作《代数的思考》中提出："任意自然数能够用不超过9个的立方的和表示，也能够用不超过19个的4次方

的和表示."但未给出证明.更一般地,设 k 为大于 1 的自然数,一定存在一个自然数 $s=s(k)$,使得方程

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=N \quad ①$$

对任意的自然数 N 有非负整数解.这个问题是希尔伯特最先解决的(1909 年).但他的方法很复杂,而且得到的 $s(k)$ 很大.

令 $s(k)$ 的最小值为 $g(k)$.1772 年左右,欧拉的儿子 J. A. Euler(1734～1800)发现 $g(k)\geqslant 2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2$,猜测

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2, \quad ②$$

其中$[x]$表示 x 的整数部分.例如,由②可算得

$$g(2)=4,g(3)=9,g(4)=19.$$

在 20 世纪 20 年代,哈代与李特尔伍德等引进解析方法即"圆法"来研究华林问题,取得很大成功.后来,H. Weyl、Виноградов 等人又对圆法的发展作了重大贡献.

目前 $g(k)$ 的研究已基本上解决了关于②的猜测.$g(2)=4$ 即拉格朗日在 1770 年证明的四平方和定理(参见**平方和**).$g(3)=9$ 是 A. Wieferich 于 1909 年证明的,并且 L. E. Dickson 在 1939 年证明了除 23 与 239 外,每个自然数至多是 8 个立方数之和.1957 年,K. Mahler 证明了对充分大的 $k\geqslant k_0$,②成立,但 k_0 不能具体定出.R. M. Stemmler 在 1964 年证明了在 $6\leqslant k\leqslant 200\ 000$ 时,②成立.$g(5)=37$ 是我国数学家陈景润证明的.$g(4)=19$ 在 1986 年被证明.

当 n 足够大时,表 n 为 k 次方的和所需的 k 次方的个数远比 $g(k)$ 为小.例如,n 足够大时,它可以表成 16 个四次方的和(不需要 19 个四次方).用 $G(k)$ 表示 n 足够大时,使 n 为非负整数的 k 次方的和所需要的 k 次方的最小个数.由平方和定理(见**平方和**),得

$$G(2) = 4.$$

Davenport 在 1939 年证明了 $G(4) = 16$. 但其他 $G(k)$ 的值至今仍未获得. 目前最好的结果是

$G(3) \leqslant 7$ (Динник, 1947 年);
$G(5) \leqslant 18$ (Jörg Brüdern, 1989 年);
$G(6) \leqslant 31, G(7) \leqslant 45, G(8) \leqslant 62,$
$G(9) \leqslant 82$ (R. C. Vaughan, 1986 年)

等等. И. М. Виноградов 在 1959 年得到

$$G(k) \leqslant 2k\log k + 4k\log\log k + 2k\log\log\log k + 13k.$$

这一结果被 Vaughan 的学生 T. D. Wooley 于 1992 年改进为

$$G(k) \leqslant k(\log k + \log\log k + O(1)).$$

上述问题有各种变形与推广. $N = p_1^k + p_2^k + \cdots + p_s^k$ ($p_1, \cdots, p_s$ 为不同素数)形的表示问题是由 Виноградов 和华罗庚等人研究提出的(1944). 此外, 设 $f(x)$ 为一给定的多项式, $N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$ 型的表示问题, 是华罗庚(1937)等人研究的. 还有表 N 为混合幂的和(即表 N 为 $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \cdots + x_s^{k_s}$, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全相等). 这些都称为华林型问题.

C. L. Siegel 最早(1922)考虑将华林问题推广到代数数域. 以后三井孝美也做了不少这方面的工作.

参考文献　[3, pp. 565～575], [5, pp. 522～557], [14, pp. 335～337], [16, pp. 717～730], [20, pp. 236～247].

(单　墫)

素变数的华林问题(Waring's problem for prime powers)　表自然数 n 为素数的 k 次方的和. 参见华林问题.

数论三珠(Three pearls in number theory)　指范德瓦尔登定

理、华林-希尔伯特定理以及 Mann 定理的初等的简化证明.

苏联数学家 А. Я. Хинчин(1894～1959)1945 年 3 月 24 日在给一位住院战士(第二次世界大战前,他是莫斯科大学一年级学生,听过 Хинчин 的课)的复信中,介绍了上述三个定理及其初等的简化证明,"将它们比做当今科学的明珠". 在这封信的基础上,1947 年 Хинчин 写了一本小册子《数论的三颗明珠》. 此书有王志雄的中译本(上海科学技术出版社,1984).

(单 墫)

华林定理的初等证明(The elementary proof of Waring's theorem) 用初等方法解决华林问题.

1770 年,华林提出每一个自然数都可以表成若干个(个数与 n 有关)非负整数的 n 次幂的和. 这个问题十分困难,直到 1907 年才由希尔伯特证明. 希尔伯特的证明极为复杂,而且用到很多分析知识(特别是多重积分). 英国的哈代与李特尔伍德、苏联的 И. Виноградов 改进了希尔伯特的方法,但仍然用到分析. 对于华林问题这样一个完全初等的命题,人们一直寻找一个不超出初等数论范围的解法. 这样的解法直到 1942 年才由苏联数学家 Линник 获得. 这一证明可参见《数论的三颗明珠》一书.

(单 墫)

范德瓦尔登定理(Theorem of van der Waerden) 如果将正整数集任意分拆成两部分,那么其中必有一个含任意长的等差数列,即对任意给定的正整数 l,两个部分中至少有一个含 l 项的等差数列.

这一定理原是 1920 年德国数学家 I. Schur 提出的一个猜想. 1926 年,当时在德国汉堡大学的范德瓦尔登从哥廷根大学的一位荷兰学生 Baudet 那里得知这个猜想. 哥廷根大学有很多人试图解决这个猜测,但均未成功. 范德瓦尔登找到了证明,并将这一猜想(他称之为 Baudet 猜想)推广成如下形式:

对任意给定的正整数 l、k，存在 $W(l,k)$，使得将 $1,2,\cdots,W(l,k)$ 任意分拆为 k 个部分后，必有一个部分含有 $l+1$ 项的等差数列.

关于 $W(l,k)$ 的估计，1952 年，Erdös 与 R. Rado 得到 $W(l,k)>(2lk^l)^{1/2}$. L. Moser(1953)，W. M. Schmidt(1962)与 E. R. Berlekamp(1968)分别将它改进为

$$W(l,k)>lk^{c\log^k}$$

与

$$W(l,k)>k^{l+1-c\sqrt{(l+1)\log(l+1)}}.$$

$W(l,k)$ 的上界估计仍很粗糙，通常都是极巨大的数.

参考文献　[18, pp. 204～209].

（单　墫）

Baudet 猜想(Baudet's conjecture)　见范德瓦尔登定理.

Mann 定理(The theorem of Mann)　设自然数的两个集合 A、B 的密率分别为 $d(A)$、$d(B)$，则 $d(A+B)\geqslant\min(d(A)+d(B),1)$.

密率是天才的苏联数学家 Щнирeдьман(1905～1938)引入的. 设 A 是自然数集的子集，用 $A(n)$ 表示 A 中不超过 n 的数的个数，$\frac{A(n)}{n}$ 的下确界称为 A 的密率，记为 $d(A)$. 对于自然数集的两个子集 A、B，形如 $a+b(a\in A,b\in B)$ 的数所组成的集合称为 $A+B$. Щнирeдьман 证明了 $d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$. 1931 年，Щнирeдьман 在哥廷根大学访问时，曾与 E. Landan 进行过讨论，他们发现更强的不等式 $d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)$（当然，在十分自然的条件 $d(A)+d(B)\leqslant 1$ 之下）应当成立. 但没能找到证明. 这个问题引起了很多数学家的兴趣，着手解决这一问题. 1942 年，年轻的美国数学家 H. Mann 宣布他找到了证明. 但这个证明十分复杂. 1943 年，E. Artin 与 P. Scherk 给出另一个简洁的初等证明. Хинчин 称这

个证明为数论中的明珠(参见**数论三珠**).

参考文献 [3,pp. 226~232,pp. 584~588].

(单 墫)

等幂和问题(Sum of equal powers) 对自然数 k,求正整数 s 的最小值 $N(k)$,使得有两组正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_s$,满足

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\\ &x_1^2+x_2^2+\cdots+x_s^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_s^2,\\ &\cdots\cdots\\ &x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k, \end{aligned} \qquad ①$$

并且 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 不是 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 的排列. 它也称为 Prouhet-Tarry 问题.

容易看出在 $s=k$ 时,从①导出 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ 是方程 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)=0$ 的 k 个根. 这时 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的一个排列. 因此,$N(k)\geqslant k+1$.

另一方面,从 $1,2,\cdots,n$ 中任取 n 个数(允许重复)$a_1,a_2,\cdots,a_s$,有 n^s 种,每一种至多有 $s!$ 种不同的排列. 因而 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 至少可分为$\dfrac{n^s}{s!}$组,每一组都不是其他组的排列.

和 $s_j=a_1^j+a_2^j+\cdots+a_s^j\leqslant sn^j$,因而至多有 sn^j 种. 和 $s_1,s_2,\cdots,s_k$ 至多有

$$\prod_{j=1}^{k}sn^j=s^kn^{\frac{1}{2}k(k+1)}$$

种. 取 $s=\dfrac{1}{2}k(k+1)+1$,$n>s!s^k$,则

$$s^kn^{\frac{1}{2}k(k+1)}<\frac{n^s}{s!}.$$

即上述的$\dfrac{n^s}{s!}$ 组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 中,必有两组 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 与 y_1,

$y_2,\cdots,y_s$ 满足方程组①(有相同的和 $s_1,s_2,\cdots,s_k$). 于是

$$N(k) \leqslant \frac{1}{2}k(k+1)+1.$$

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 满足①外,还满足

$$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_s^{k+1} \neq y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\cdots+y_s^{k+1},$$

相应的 s 的最小值记为 $M(k)$,那么 $M(k) \geqslant N(k)$.

用深刻的工具可以证明

$$M(k) \leqslant (k+1)\left\{\left[\frac{\log\frac{1}{2}(k+2)}{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right]+1\right\} \qquad ②$$

(②式右边在 k 很大时,相当于 $k^2\log k$).

华罗庚曾将等幂和的问题推广至素变数,即限定其中 x_1, $x_2,\cdots,x_s$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 取素数值.

参考文献 [3,pp. 576~583,p. 644],[18,pp. 139~144].

(单 墫)

哥德巴赫猜测(Goldbach's conjecture) 每个大于 5 的奇数是 3 个素数的和,每个大于 2 的偶数是 2 个素数的和.

1742 年 6 月,哥德巴赫在给欧拉的信中猜测

"每一个大于 5 的奇数是 3 个素数的和."

欧拉指出,这一猜测可由

"每个大于 2 的偶数是 2 个素数的和"

推出.

欧拉认为这两个猜测都是正确的,虽然他无法给予证明. 人们称这两个猜测为哥德巴赫猜测或欧拉—哥德巴赫猜测. 其实更早的笛卡尔已经提出过这个猜测.

目前已经验证到 2×10^{10},在这个范围内的数,哥德巴赫猜测

均成立. 这是 1989 年 A. Granville, J. van de Lune 与 H. J. J. te Riele 的结果.

1930 年, Щнирельман 用他创立的密率方法结合筛法, 首先证明存在一个整数 k, 使得每一个大于 1 的整数都可以表成至多 k 个素数的和. 但他没有具体定出 k 的值.

如果用 s 表示最小的自然数, 使得每个充分大的自然数可以表为不超过 s 个素数的和, 那么用 Щнирельман 的方法可以证明 $s \leqslant 800\,000$. 这一纪录不断改进:

1935 年, Романов, $s \leqslant 2\,208$;

1936 年, Heilbronn, Landan 与 Sekerk, $s \leqslant 71$;

1936 年, Ricci, $s \leqslant 67$;

1950 年, Shapio, $s \leqslant 20$;

1956 年, 尹文霖, $s \leqslant 18$;

1968 年, Siebert, Кузяшев 与 Чечуро, $s \leqslant 10$;

1976 年, Vaughan, $s \leqslant 6$.

对于上述的 Щнирельман 常数 k, 纪录如下:

1972 年, Кдимов, Пидьтяй 与 Шентицкая, $k \leqslant 115$;

1975 年, Кдимов, $k \leqslant 55$;

1977 年, Vaughan, $k \leqslant 27$;

1983 年, Riesel 与 Vaughan, $k \leqslant 19$.

1993 年, Ramaré 在其博士论文中证明 k 可以取 6, 即每一个正偶数是至多 6 个素数的和. 这种对每一个正偶数都成立的结果目前只有用密率法才能得到.

1937 年, И. М. Виноградов 用圆法及他自己创立的三角和估计, 证明了每一个充分大的奇数 n 可表为三个素数的和, 即基本解决了第一个猜测. 从他的结果立即得到 $s \leqslant 4$ (s 的意义同前).

哈代与李特尔伍德在 1923 年已经用圆法得到上述结果(包括

表法种数的渐近公式)，但他们需要借助黎曼假设，而 Виноградов 没有利用任何假设.

Виноградов 定理中的“充分大”是可以计算的. 1956 年，К. Г. Бороздкий 得出当 $n > e^{e^{16.038}}$ 时，n 就可以表为三个素数的和. 1989 年，陈景润与王天泽改进为 $n > e^{e^{11.503}}$ $(\approx 10^{43000})$.

利用 Виноградов 的思想，1937 年，一批数学家(Corput，Estermann，Heilbronn，Чудаков)差不多同时得出几乎所有偶数都可以表为两个奇素数的和. 确切地说，他们证明了，对任给的正数 A，有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x}, \qquad ①$$

这里 $E(x)$ 表示不超过 x 的偶数中，不能表为两个奇素数和的数的个数，即所谓例外集合的元数. 华罗庚(1938)得出比他们强的结果，即几乎所有偶数都可表示为 $p_1 + p_2^k$，p_1、p_2 为奇素数，k 为任一给定的自然数.

1972 年，Vaughan 证明了

$$E(x) \ll x e^{-c\sqrt{\log x}}, \qquad ②$$

这改进了①. 1975 年，Montgomery 和 Vaughan 进一步改进了②，证明存在一个正数 $\Delta > 0$，使

$$E(x) \ll x^{1-\Delta}. \qquad ③$$

陈景润和潘承洞定出 $\Delta > 0.01$ (1979)，$\Delta > 0.4$ (1983).

1920 年，Brun 运用筛法首先证明了命题{9,9}，即每个大偶数可表示为 $P_1 + P_2$，P_1 的素因数个数 $\leqslant 9$，P_2 的素因数个数 $\leqslant 9$. 这方面的纪录如下：

1924 年，Rademacher，{7,7}；

1932 年，Estermann，{6,6}；

1937 年，Ricci，{5,7}，{4,9}，{3,15}，{2,366}；

1938 年，Бухштаб，{5,5}；

1939 年，Тартаковский，{4,4}；

1940 年，Бухштаб，{4,4}；

1950 年，Selberg，{2,3}，但证明未公开发表；

1956 年，王元，{3,4}；

1957 年，А. И. Виноградов，{3,3}；

1957 年，王元，{2,3}；

1962 年，潘承洞，{1,5}；

1965 年，Бухштаб，{1,3}.

1966 年，陈景润用他的加权筛法证明了{1,2}，即每个充分大的偶数可表示为一个素数与一个至多有两个素因数的数的和. 更精确地说，设 x 为充分大的偶数，$P_x(1,2)$表示适合 $p \leqslant x$，$x-p=p_1$ 或 p_1p_2（p_1、p_2 均为素数）的素数 p 的个数，则

$$P_x(1,2) > 0.67 \prod_{\substack{p|x \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x},$$

但他当时没有给出详细证明. 1973 年，他发表了{1,3}的全部证明. 应该指出，在他宣布结果到发表全部证明的 7 年之中，没有别的数学家给出{1,2}的证明. 因此，在陈景润发表全部证明后，引起国际数学界的强烈反响，公认这是一个十分杰出的成果.

无论用密率法、圆法、筛法，目前都还不能解决哥德巴赫猜测（后一个猜测）. 很多数论专家认为由于存在某种“奇偶效应”，{1,2}（即 1＋2）已经是现有方法的极限. 要实现 1＋1，还需要创立新的方法.

参考文献 [3,p. 88]，[4,pp. 1～18]，[5,pp. 353～378]，[18,pp. 105～107]，[20,pp. 229～235].

（单 墫）

欧拉-哥德巴赫猜测(Euler - Goldbach's conjecture) 见哥德巴赫猜测.

余新河猜测(Yu's conjecture) 对 $i_1 \neq i_2, i_1, i_2 \in \{1,2,3,4\}$, $l_1, l_2 \in \{1,2\}$, 每个大于 2 的自然数都可表示成 $a+b$ 的形式,其中 a、b 都是自然数, $a \in P_{i_1 l_1}$, $b \in P_{i_2 l_2}$, 八个集合 P_{11}, P_{12}, P_{21}, $P_{22}, P_{31}, P_{32}, P_{41}, P_{42}$ 定义如下表(其中 $P = 0,1,2,\cdots$):

k	P_{11} 中的数
1,4,7,…	$\frac{31k+5}{3}+(10k+1)P$
3,6,9,…	$\frac{11k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{17k+7}{3}+(10k+3)P$
2,5,8,…	$\frac{7k+4}{3}+(10k+3)P$
1,4,7,…	$\frac{29k+28}{3}+(10k+9)P$
2,5,8,…	$\frac{19k+19}{3}+(10k+9)P$

k	P_{12} 中的数
3,6,9,…	$\frac{31k+6}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{11k+4}{3}+(10k+1)P$
2,5,8,…	$\frac{17k+8}{3}+(10k+3)P$
1,4,7,…	$\frac{7k+5}{3}+(10k+3)P$
1,4,7,…	$\frac{19k+20}{3}+(10k+9)P$
2,5,8,…	$\frac{29k+29}{3}+(10k+9)P$

k	P_{21} 中的数
1,4,7,…	$\frac{13k+2}{3}+(10k+1)P$
3,6,9,…	$\frac{23k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{19k+14}{3}+(10k+7)P$
0,3,6,…	$\frac{29k+21}{3}+(10k+7)P$

k	P_{22} 中的数
3,6,9,…	$\frac{13k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{23k+4}{3}+(10k+1)P$
0,3,6,…	$\frac{19k+15}{3}+(10k+7)P$
1,4,7,…	$\frac{29k+22}{3}+(10k+7)P$

k	P_{31} 中的数
3,6,9,…	$\frac{17k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{7k+2}{3}+(10k+1)P$
2,5,8,…	$\frac{19k+7}{3}+(10k+3)P$
1,4,7,…	$\frac{29k+10}{3}+(10k+3)P$

k	P_{32} 中的数
3,6,9,…	$\frac{7k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{17k+4}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{19k+8}{3}+(10k+3)P$
2,5,8,…	$\frac{29k+11}{3}+(10k+3)P$

k	P_{41} 中的数
1,4,7,…	$\frac{23k+7}{3}+(10k+3)P$
2,5,8,…	$\frac{13k+4}{3}+(10k+3)P$
1,4,7,…	$\frac{7k+5}{3}+(10k+7)P$
0,3,6,…	$\frac{17k+12}{3}+(10k+7)P$
3,6,9,…	$\frac{29k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{19k+2}{3}+(10k+1)P$

k	P_{42} 中的数
1,4,7,…	$\frac{13k+5}{3}+(10k+3)P$
2,5,8,…	$\frac{23k+8}{3}+(10k+3)P$
1,4,7,…	$\frac{17k+13}{3}+(10k+7)P$
0,3,6,…	$\frac{7k+6}{3}+(10k+7)P$
3,6,9,…	$\frac{19k+3}{3}+(10k+1)P$
1,4,7,…	$\frac{29k+4}{3}+(10k+1)P$

1993 年《福建日报》(3 月 3 日)、《光明日报》(3 月 19 日)、《人民日报》(4 月 6 日)先后刊登余新河所提出的、悬赏百万港元征求解答的上述猜测.

其实,余氏猜测可以更简单地表述成如下形式:设 $i \in I = \{1,7,11,13,17,19,23,29\}$,集合 $A_i = \{n \mid 30n - i$ 是素数$\}$,则对任意 $i,j \in I$,每个大于 1 的自然数可以表示成 $a+b$ 的形式,其中 $a \in A_i, b \in A_j$.

不难从余氏猜测推出哥德巴赫猜测:任一大于 57 的偶数都

可以写成 $30m-i-j$ 的形式，其中 $i,j\in I,m>1$. 如果余氏猜测成立，那么

$$m=a+b,$$

并且 $a\in A_i,b\in A_j$. 即

$$30a-i,30b-j$$

都是素数. 从而

$$30m-i-j=(30a-i)+(30b-j)$$

是两个素数之和，即哥德巴赫猜测成立.

正是由于余氏猜测能推出哥德巴赫猜测，引起了不少人的兴趣. 有关的结果大多已收入王志雄著《余新河数学题与哥德巴赫猜想》(科学技术文献出版社，1995)及楼垂品主编《余新河·余新河数学题》(科学技术文献出版社，1996)两书中. 最近，阚家海与单墫证明了余新河猜测对几乎所有的自然数成立. 更一般地，设 a 为自然数，b_1、b_2 为整数，$(a,b_1)=(a,b_2)=1$，则几乎所有满足 $N\equiv b_1+b_2 \pmod a$ 的正偶数 N 可以表示成两个素数之和，这两个素数分别取自等差数列 $\{an+b_1\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{an+b_2\}_{n=1}^{\infty}$ (当 $a=30$ 时，对应于余新河猜测).

（单 墫）

六 整 点

圆内整点问题(Gauss circle problem) 以原点为圆心、$\sqrt{x}$ 为半径的圆内(包括圆周上)的整点个数记为 $A(x)$，对 $A(x)$ 进行估计.

1863 年，高斯得出

$$A(x)=\pi x+O(\sqrt{x}).$$

这里$O(\sqrt{x})$表示在$x\to+\infty$时，$\frac{A(x)-\pi x}{\sqrt{x}}$是有界的.

对差$A(x)-\pi x$的精确估计是数论中的一个十分困难的问题. 设$A(x)-\pi x=O(x^{\theta+\varepsilon})$，$\varepsilon$为任意小正数. 1906年，W. Sierpinski将高斯的结果$\left(\theta\leqslant\frac{1}{2}\right)$改进为$\theta\leqslant\frac{1}{3}$. 这以后又有许多改进的工作. 例如，1935年华罗庚证明$\theta\leqslant\frac{13}{40}$，1963年陈景润证明$\theta\leqslant\frac{12}{37}$. 目前最好的结果是$\theta\leqslant\frac{7}{22}$(Iwanice与Mozzochi于1988年). M. Huxley在将发表的文章中又改进为$\theta\leqslant\frac{23}{73}$. 这离猜测$\theta=\frac{1}{4}$还有一段距离.

另一方面已经知道$\theta\geqslant\frac{1}{4}$.

圆内整点问题有种种推广，如椭圆内整点问题，球内整点问题等等.

参考文献 [3, p. 137, pp. 149～158, p. 640]，[14, p. 342]，[18, pp. 240～241].

（单 墫）

狄利克雷除数问题(Dirichlet divisor problem) 求出uv平面上双曲线$uv\leqslant x$与直线$u=1$，$v=1$所围成的闭区域上的格点个数$D(x)$。

1849年，狄利克雷得到

$$D(x)=x\log x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}),$$

其中C为欧拉常数.

现在(与圆内整点问题类似)$O(\sqrt{x})$也已改进为比$O\left(x^{\frac{13}{40}+\varepsilon}\right)$稍好的结果$O\left(x^{\frac{7}{22}+\varepsilon}\right)$.

同样有猜测 $O(\sqrt{x})$ 可改为 $O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$，并已证明 $O(x^{\frac{1}{4}})$ 不成立.

如果用 $d(n)$ 表示 n 的除数（因数）个数，那么 $D(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}d(n)$. 因此上述问题也称为除数问题.

参考文献　[3, pp. 126～127, pp. 152～158, p. 640], [5, pp. 558～576], [14, p. 342].

（单　墫）

七　无理数、代数数和超越数

用有理数逼近无理数的问题（Approximation of irrationals by rationals）　对于给定的无理数 θ，选择有理整数 $x\ (>0)$、y，使得 $\left|\theta-\frac{y}{x}\right|$ 与 x 相比尽可能小.

由狄利克雷的抽屉原则容易知道，对任意的整数 $N>0$，使得 $\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{xN}$ 的整数 $x\ (0<x\leqslant N)$，y 都是存在的. 因此有无穷多对有理整数 x、y，使得 $\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^2}$. 记使 $\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{Mx^2}$ 的正数 M 的上确界为 $M(\theta)$，则对所有无理数 θ，有 $1\leqslant M(\theta)$.

如果 θ 为实二次无理数，即 θ 满足 $a\theta^2+b\theta+c=0$（a、b、c 为有理整数），那么可以证明 $M(\theta)\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}$，其中等号在 $\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等一类无理数时成立.

对于一般的代数数，即形如 $a_0\mu^n+a_1\mu^{n-1}+\cdots+a_n=0$（其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为有理整数，$a_0\neq 0$）的代数方程的根 θ，关于 $M(\theta)$

还完全不了解.因此,将问题换成从另一个角度考察.设 α 为实数且使得 $\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^{\alpha}}$ 有无穷多对有理整数解 x、y,求 α 的上确界 $\alpha(\theta)$.刘维尔曾证明在 θ 为 n 次代数数(即上述 n 次代数方程的根)时,$\alpha(\theta)\leqslant n$.以后 A. Thue, Siegel, A. O. Гельфонд, F. J. Dyson 等又逐步加以改进.直至 1955 年,这个问题才被 Roth 彻底解决,他证明了 $\mu(\theta)=2$.换句话说,当 $\alpha>2$ 时,$\left|\theta-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^{\alpha}}$ 只有有限多对有理整数解 x、y.

1970 年,W. M. Schmidt 又将 Roth 定理推广到多个无理数的联立逼近.

参考文献　[3, pp. 533～553],[14, pp. 350～351],[19, pp. 154～177].

（单　墫）

最佳逼近(The best approximation)　对于(正)无理数 α,在分母不大于 N 的有理数中,谁与 α 最为接近?若 $\frac{p}{q}$(p、q 为互质的正整数)比一切分母$\leqslant q$ 的分数距 α 更近,则 $\frac{p}{q}$ 称为 α 的最佳逼近.问题即求出所有的最佳逼近.

将 α 展成连分数,设 $\frac{p_n}{q_n}$ 为 α 的第 n 个渐近分数,则 $\frac{p_n}{q_n}$ 是 α 的最佳逼近.更一般地,设 α 的连分数展开为

$$\alpha=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

则 α 的全部最佳逼近为

$$\frac{p_{n-1}+jp_n}{q_{n-1}+jq_{n-1}}\quad(j=0,1,\cdots,a_n,n=1,2,\cdots).$$

最佳逼近有众多应用,例如各种周期现象(波动、行星运动等).

祖冲之的疏率$\frac{22}{7}$与$\frac{355}{113}$都是 π 的最佳逼近.

参考文献 [3,pp.271~275],[19,p.163].

(单 墫)

超越数(Transcendental number) 研究一个数是否是超越数以及超越数的理论.

如果一个复数不是代数数,那么它就称为超越数.1873 年,埃尔米特证明自然对数的底 e 是超越数.以后林德曼用同样的方法证明了 π 是超越数.1900 年,希尔伯特提出的 23 个问题中,第七问题是关于某些数的超越性,即证明:

"若 α 是一个不为 0、1 的代数数,β 是代数数而且是无理数,则 α^β 是超越数.例如 $2^{\sqrt{2}}$,e^π."

希尔伯特曾经认为这一问题的解决将在费马大定理、黎曼假设之后,实际情况恰好相反(见**希尔伯特第七问题**).

Гелъфонд1929 年、Schneider1930 年用不同的方法证明了 e^π 的超越性.1930 年,Кузъмин 推广 Гелъфонд 的方法,证明了 $2^{\sqrt{2}}$ 是无理数.

Гелъфонд1934 年、Schneider1935 年互相独立地解决了希尔伯特第 7 问题.

1966 年,A.Baker 的著作《超越数》问世,这本书大大丰富了超越数的理论,包含许多重要的结果.例如:

"若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是非零代数数,使得 $\log\alpha_1,\log\alpha_2,\cdots,\log\alpha_n$ 在有理数域上线性无关(即不存在一组不全为 0 的有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得

$$a_1\log\alpha_1+a_2\log\alpha_2+\cdots+a_n\log\alpha_n=0),$$

则 $1,\log\alpha_1,\log\alpha_2,\cdots,\log\alpha_n$ 在全体代数数上线性无关(即不存在不全为 0 的代数数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$,使得

$$b_0+b_1\log\alpha_1+b_2\log\alpha_2+\cdots+b_n\log\alpha_n=0)."$$

作为 Baker 定理的一个应用，我们证明 $2^{\sqrt{2}}$ 是超越数.

假设 $2^{\sqrt{2}}=\alpha$，α 为代数数，那么

$$\sqrt{2}\log 2-\log\alpha=0. \quad ①$$

由于 $\log 2$、$\log\alpha$ 在代数数上线性相关，所以它们在有理数上线性相关，即存在有理数 a_1、a_2 不全为 0，使

$$a_1\log 2+a_2\log\alpha_2=0, \quad ②$$

从而 a_1、a_2 全不为 0.

但由①、②得

$$\sqrt{2}=\frac{\log\alpha}{\log 2}=-\frac{a_1}{a_2}$$

为有理数. 矛盾！

所以 $2^{\sqrt{2}}$ 不是代数数.

超越数的理论还远远没有完成. 例如，欧拉常数

$$C=\lim\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

是否是超越数？但现在连它是否为无理数还不知道. 又如

$$\zeta(3)=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots$$

是无理数，但不知道它是否为超越数.

参考文献 [3,pp. 529～564]，[14,p. 352]，[19,p. 159].

（单 墫）

e 的超越性（The transcendence of e） 自然对数的底 e 是超越数.

1873 年，埃尔米特发现了 e 的超越性. 证明如下：

设 e 为代数数，即有

$$a_0+a_1\mathrm{e}+a_2\mathrm{e}^2+\cdots+a_n\mathrm{e}^n=0, \tag{1}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为整数. 令

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p, \tag{2}$$

其中 p 为奇素数.

熟知

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^k\mathrm{d}x=k!, \tag{3}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^h\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-h}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x+h)\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

所以在①的两边同乘 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x$ 得

$$0=\sum_{h=0}^{n}a_h\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x+h)\mathrm{d}x+\sum_{h=1}^{n}a_h\mathrm{e}^h\int_0^h\mathrm{e}^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

因为 $f(x)=\frac{(-1)^n(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1}+\frac{b_1}{(p-1)!}x^p+\cdots$

其中 $b_1,b_2,\cdots$ 为整数，所以由③，得

$$a_0\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x=a_0(-1)^n(n!)^p+pA_0, \tag{6}$$

其中 A_0 为整数. 又对于 $1\leqslant h\leqslant n$，

$f(x+h)=\frac{1}{(p-1)!}(x+h)^{p-1}(x+h-1)^p\cdots$
$x^p(x-1)^p\cdots(x-n+h)^p=\frac{c_1}{(p-1)!}x^p+\frac{c_2}{(p-1)!}x^{p+1}+\cdots$

其中 $c_1,c_2,\cdots$ 为整数，所以由③，得

$$a_h\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x+h)\,\mathrm{d}x=pA_h, \tag{7}$$

其中 A_h 为整数.

由⑥、⑦得

$$\sum_{h=0}^{n} a_h \int_0^{\infty} e^{-x} f(x+h)\,dx = (-1)^n a_0 (n!)^p + p\sum_{h=0}^{n} A_h, \quad ⑧$$

当 p 大于 a_0 及 n 时,⑧式右边的第一项不是 p 的倍数. 因此和 $\sum_{h=0}^{n} a_h \int_0^{\infty} e^{-x} f(x+h)dx$ 是非零整数.

现在估计⑤的右边的第二项和. 显然

$$\left|\sum_{h=1}^{n} a_h e^h \int_0^h e^{-x} f(x)\,dx\right|$$

$$< e^n \cdot n^{(p-1)+p+\cdots+p} \cdot \frac{1}{(p-1)!}\int_0^n 1dx \cdot \sum_{h=1}^{n} |a_h|$$

$$= \frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!} \cdot M_n,$$

其中 M_n 与 p 无关.

因为 $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!} = 0$, 所以取 p 足够大,就有

$$\frac{n^{p(n+1)}}{(p-1)!} M_n < 1.$$

⑤的右边是一个非零整数与一个小于 1 的数的和,这和不可能为 0,因此⑤不成立. 从而 e 不是代数数,即 e 为超越数.

参考文献 [3,pp. 554~557],[19,pp. 170~173].

(单 墫)

π的超越性(The transcendence of π) 圆周率 π 是超越数.

1882 年,林德曼证明了 π 是超越数. 证明的手法与埃尔米特证明 e 的超越性方法类似.

由 π 的超越性立即得到用尺规作图不能“化圆为方”.

参考文献 [3,pp. 557~558],[19,pp. 173~177].

(单 墫)

八 其他

埃及分数(Egyptian fractions) 分子为1的分数称为埃及分数或单位分数.将有理数表示成埃及分数的和,是一个古老的问题.

古代埃及人将他们研究的成果写在一种水草的叶子上,称为纸草.1858年,苏格兰人Rhind购得的纸草称为兰德纸草,约产生于公元前1650年,其中有将形如$\frac{2}{n}$的分数写成不同的单位分数的和,n是5到101的所有奇数.例如

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}.$$

埃及人这样做的目的大概是为了避免分数计算中的某些困难.他们是怎样求出这些表达式的,现在有种种解释,并且可以诱发出许多问题,不少至今仍未解决,所以人们对这类问题的兴趣仍然很浓厚.

1954年,R. Breusch与B. M. Stewart互相独立地证明了n为奇数时,$\frac{m}{n}$可写成有限多个分母为奇数的不同的埃及分数的和.与之形成对比的是Stein,Selfridge,Graham等提出的问题:n为奇数时,将$\frac{m}{n}$表成$\sum\frac{1}{x_i}$,这里$x_1,x_2,\cdots$依次选取,x_{k+1}是使

$$\frac{m}{n}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}\geqslant 0$$

的最小的奇数.是否有限步一定结束,即$\sum\frac{1}{x_i}$是否只有有限多

项，例如，对 $\frac{m}{n}=\frac{2}{7}$ 可逐步选取 $x_1=5, x_2=13, x_3=115, x_4=10\,465$，并且

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{115}+\frac{1}{10\,465}.$$

这一问题尚未解决.

容易证明 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不是整数. 设 $2,3,\cdots,n$ 的最小公倍数为 M，$2^k\leqslant n<2^{k+1}$，则

$$\frac{M}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\text{整数}+\frac{M}{2\times 2^k}=\text{整数}+\frac{1}{2}.$$

所以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不是整数.

更一般地，1924 年，Nagell 证明了由正整数组成的等差数列，它的倒数和决不为整数.

在 1972 年 1 月 14 日的一封信中，Erdös 令

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{a}{b},$$

b 是 $2,3,\cdots,n$ 的最小公倍数，他猜测 $a\pm 1\equiv 0 \pmod b$ 仅在 $n=2,3,4$ 时出现，并问 a、b 是否有无穷多次互质？

关于和为 1 的埃及分数，有众多的猜测与问题. 例如，1972 年 L. S. Hahn 提出的问题：如果正整数集分拆为有限多个集，其中是否总有一个集，使得任意的有理数可以表为该集中有限多个不同元素的倒数和？

关于埃及分数的不定方程，参看**不定方程 $\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$**.

参考文献　[18, pp. 158～166].

（单　墫　谈祥柏　眭秋生）

家政问题(Ménage problem) n 对夫妇围着圆桌坐下，要求男女相间并且每对夫妇不得相邻，有多少种不同的坐法？

这个著名问题最初由 E. Lucas 于 1891 年提出. 更早一点，P. G. Tait 曾提出一个等价的问题，这个问题源自他在纽结方面的研究. 许多学者讨论过这个问题，并找到多种解法，但并未给出家政数 M_n(即上述坐法的种数)的明显表达式. 直至 1934 年，J. Touchard 才发表 M_n 的表达式，但未给出证明. 1943 年，I. Kaplansky 给出 Touchard 公式的证明. 公式

$$M_n = 2\cdot n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}\cdot(n-k)! \qquad ①$$

证明如下：

设至少有 k 对夫妇相邻(男女相间)的坐法有 W_k 种，则由容斥原理得

$$M_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k W_k. \qquad ②$$

从 n 对夫妇中确定 k 对有 C_n^k 种方法. 由于男女相间，任一坐位上如果确定由男士坐(或由女士坐)，那么其他坐位上坐的性别也就随之确定，因而各个坐位上坐的性别有 2 种不同方式. 设选出 k 对相邻坐位的方法有 d_k 种. 将这 k 对坐位让确定的 k 对夫妇坐，这 k 对夫妇之间的排列有 $k!$ 种，其余$(n-k)$对夫妇中，$n-k$ 名男士的排列有$(n-k)!$ 种，女士的排列也有$(n-k)!$ 种. 又可以求得

$$d_k = \frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}, \qquad ③$$

所以

$$W_k = 2\cdot C_n^k\cdot\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!.$$

从而①式成立.

最后证明③成立. 可以将圆桌视为一个圆周，上面有 $2n$ 个点.

选定 k 对相邻的点后，将圆周剪开，选定的 k 对不分开，有 $2n-k$ 种剪法. 剪开后拉成直线(顺时针方向变为直线上从左到右的顺序)，共得到 $(2n-k)\cdot d_k$ 种直线上的排列. 由于圆周上每一种坐法，可绕圆周旋转产生 $2n$ 种坐法，然后剪开产生同一种直线上的排列，所以直线上的排列数应为 $\frac{2n-k}{2n}d_k$ 种. 另一方面，从直线上 $2n$ 个点中选出 k 对相邻的点可以看成从 $2n-k$ 个点中选 k 个点(在选定的每点后面放一个点就成为 $2n$ 个点)，共有 C_{2n-k}^{k} 种. 所以

$$\frac{2n-k}{2n}d_k=C_{2n-k}^{k},$$

即③成立.

(谈祥柏　单　墫)

夫妻围坐问题(Couples sitting on a round table)　见家政问题.

公开密钥(Public key cryptography)　将加密的密钥公开的一种密码体制，它以大合数的素因数分解作为基础.

为了保密，需要将信息加工成密码传送出去. 收到密码后，又需要解密，将密码还原成信息. 加密与解密需要密钥，例如密码本. 密钥，过去是保密的，需要专人秘密传送，如果被敌方发现，后果不堪设想.

公开密钥，无需专人秘密传送，也不必担心被敌方发现.

1976 年，美国斯坦福大学工程师 Diffie 与 Hellmann 提出了公开密钥的想法. 1978 年，麻省理工学院的 Rivest，Shamier 与 Adleman 提供了有效的装置. 所以这种编码系统简称为 RSA 系统. 它的基本原理如下：

取一个大合数 n，例如

n=114 381 625 757 888 867 669 235 779 976 146 612 010 218 296 721 242 362 562 561 842 935 706 935 245 733 897 830 597 123 563 958 705 058 989 075 147 599 290 026 879 543 541

它是一个 64 位的素数 p 与一个 65 位的素数 q 的乘积，再取一个数 $s=9\,007$（这个数必须与 $(p-1)(q-1)$ 互质），n、s 就是加密的密钥，可以公开. 一家大公司可以将这两个数交给用户，用户如果要传送一句话，如

It's all greek to me

（"我对它一窍不通"——莎士比亚的剧本《凯撒大帝》中的一句话），首先按照通常的做法，将字母变为两个数字，即 $a=01, b=02, \cdots, y=25, z=26$，词与词的间隔变为 00. 这样上面的话就变成一个数

$$692\,019\,000\,011\,212\,000\,718\,050\,511\,002\,015\,001\,305=M.$$

然后将它加密（如果 M 大于 n，那么先分成若干段，每一段小于 n，如果 M 与 n 不互素，应在 M 的尾巴上添上 a 即 01 或其他的字母，使所得的数与 n 互素. 这样处理后再加密），即先将 M 做 s 次方，再求出 $M^s \bmod n$ 的余数. 用计算机（或专门的密码发生机）执行，不到 1 秒时间就可以产出密码 $M'(\equiv M^s(\bmod n))$. 例如上面那句话的密码 M' 是

19 993 513 149 780 510 045 231 712 274 026 064 742 320 401 705 839 146 310 370 371 740 625 971 608 948 927 504 309 920 962 672 582 675 012 893 554 461 353 823 769 748 026.

公司收到密码后，可以利用自己掌握的解密的密钥 t（不公开）进行解密. t 满足

$$ts \equiv 1(\bmod\ (p-1)(q-1)).$$

根据欧拉定理 $M^{\varphi(n)} = M^{(p-1)(q-1)} \equiv 1(\bmod n)$，所以

$$(M')^t \equiv M^{st} \equiv M(\bmod n).$$

因此，只需将 M' 做 t 次方就可得到 M.

类似地，公司还可根据用户发来的密码断定发密码的用户是

谁(然后启用相应的密钥).

由于 n 的分解极为困难,敌方虽然知道 n 也无法知道 p、q,得不出解密的钥匙 t.

公开密钥问世以来,引起很多方面的关注,也受到一些批评.但无论如何,它是数论在编码中的一项重要的应用.

参考文献 [20,pp.123～128].

(单 墫)

数学黑洞(Mathematics black hole) 设 f 是定义在自然数集上的函数,如果对任一个自然数 n,数列

$$f(n),f(f(n)),\cdots,f(f(\cdots f(n)\cdots))$$

中都出现自然数 k,并且 $f(k)=k$,那么 k 就称为(对于 f 的)数学黑洞.更一般地,设 f 是定义在自然数集上的函数,如果对任一个自然数 n,数列

$$f(n),f^{(2)}(n)=f(f(n)),\cdots,f^{(j)}(n)=f(f(\cdots f(n)\cdots)),\cdots \quad ①$$

中都只有有限多个不同的项,那么 f 就称为黑洞(函数).

数学黑洞的例子很多,下面举几个著名的例子.

1. Sisyphus 数列.

任取一个自然数,例如9 288 759,其中数字为偶数的有 3 个,数字为奇数的有 4 个,数字共 7 个,定义 $f(n)$为 n 中偶数数字、奇数数字、全部数字的个数依次排成的新数,即

$$f(9\,288\,759)=347,$$

或写作

$$9\,288\,759\rightarrow 347.$$

照此进行,347→123,而 123→123.又如

$$25\ 897\ 031\ 257\rightarrow 4\ 711\rightarrow 134\rightarrow 123.$$

123 就是一个数学黑洞. 证明如下：

设 n 是 m 位数，m 是 l 位数. 这时 $n \geqslant 10^{m-1}$，n 的数字个数为 m，奇数数字、偶数数字的个数均不超过 m，所以

$$f(n) < 10^{3l}.$$

而在 $l \geqslant 2$ 时，

$$m-1 \geqslant 10^{l-1}-1 \geqslant 2^{l-1} \cdot 5-1 \geqslant 5l-1 > 3l,$$

因此

$$n > f(n). \qquad ②$$

在 $l=1$ 而 $m \geqslant 4$ 时，显然有

$$n \geqslant 1\,000 > 999 > f(n),$$

即①仍然成立.

于是，在 $n \geqslant 1\,000$ 时，$f(n)$ 严格小于 n，经过若干项后，①中出现小于 1 000 的数. 不难验证对小于 1 000 的 n，①中迟早要出现黑洞 123.（实际上，对任一个三位数 n，$f(n)$ 必为 33，123，213，303 中的一个，而 33 → 22 → 202 → 303 → 123，213 → 123）

许多黑洞问题都可以用类似的方法证明. 首先，当 n 足够大时，②成立. 它表明"大的输入得出较小的输出"，从而将无限的"宇宙"（自然数集）化为有限的世界. 然后再就有限多种情况加以验证.

Sisyphus 是古希腊的暴君. 传说他被罚推石上山，但石块推上去后又滚回山下，因此永远服役，没有尽期，如同 123→123→123→…

2. 数字的平方和.

对任一个自然数 n，它的各位数字的平方和为 $f(n)$，例如 $f(384)=89$，这样继续下去，

$$384 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89,$$

其中只有有限多个不同的项，89，145，42，20，4，16，37，58 等数形

成一个圈，反复出现.

用类似方法不难证明在 $n \geqslant 163$ 时，②成立. 而对 $n < 163$ 的数进行验证可知①或者出现 1，或者出现 4. 前者变成 $1 \to 1 \to 1 \to \cdots$ 后者形成上面所说的圈.

对数字的立方和或更高次方的和也有类似的现象发生.

3. Kaprekar 常数

对任一四位数 n（它的数字不全相同），用它的四个数字组成一个最大数和一个最小数，再将两个数相减，所得的差作为 $f(n)$（当 n 的位数小于 4 时，可在 n 前面补零，如 $n=99$ 可看做"四位数"0 099）. 不难验证①将成为

$$6\,174 \to 6\,174 \to 6\,174 \to \cdots$$

还有很多数字黑洞的例子，不少属于趣味数学，但其中也有很难的问题，例如 **Collatz 猜想**，至今仍未解决.

参考文献 [24，p. 6，p. 8].

（谈祥柏　单　墫）

到一正方形顶点距离为有理数的点（Rational distances from the corners of a square） 是否有一点到单位正方形的四个顶点的距离全为有理数？

这个问题至今仍未解决，它是波兰数学家 Hugo Steinhaus 提出的，见他的著作《又一百个数学问题》题 11. 原题为"能不能作一个正方形，它的边长是整数，并且在它所在的平面上能找出一点，该点到正方形四个顶点的距离都可以用整数表示."这与上面的问题是等价的.

最初曾认为没有非平凡的点（即不在正方形边上的点）到三个顶点的距离均为有理数，但 J. Conway 与 M. Guy 发现方程

$$(s^2+b^2-a^2)^2+(s^2+b^2-c^2)^2=(2bs)^2$$

有无穷多组整数解，这里 a、b、c 是一点到边长为 s 的正方形三个顶点的距离. 于是由余弦定理便可得出有无穷多个点到三个顶点的距离为有理数.

参考文献 [18，pp. 181～185].

（单 墫）

$3x+1$ 猜测（The $3x+1$ conjecture） 对自然数 x 施行如下变换：如果 x 是偶数，将它除以 2；如果 x 是奇数，将它乘以 3 再加 1，这样进行下去，经过若干次就得到 1.

这一猜测也称为 Collatz 问题，Syracuse 问题，Kakutani（角谷）问题，Hasse 算法，Ulam 问题.

L. Collatz 30 年代在汉堡大学当学生时，受兰道，O. Perron，I. Schur 等人的影响，对数论函数产生兴趣. 他对图论也有兴趣，于是产生用有向图来表示数论函数的想法，函数的性质与图的构造就联系在一起了. 在 1932 年 6 月 1 日的笔记本中，他考虑了函数

$$g(n)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}n, & 若\ n\equiv 0 \pmod 3,\\ \dfrac{4}{3}n-\dfrac{1}{3}, & 若\ n\equiv 1 \pmod 3,\\ \dfrac{4}{3}n+\dfrac{1}{3}, & 若\ n\equiv 2 \pmod 3,\end{cases}$$

并提出问题

$$g^{(k)}(8)(=\underbrace{g(g(\cdots g}_{复合k次}(8)\cdots)))$$

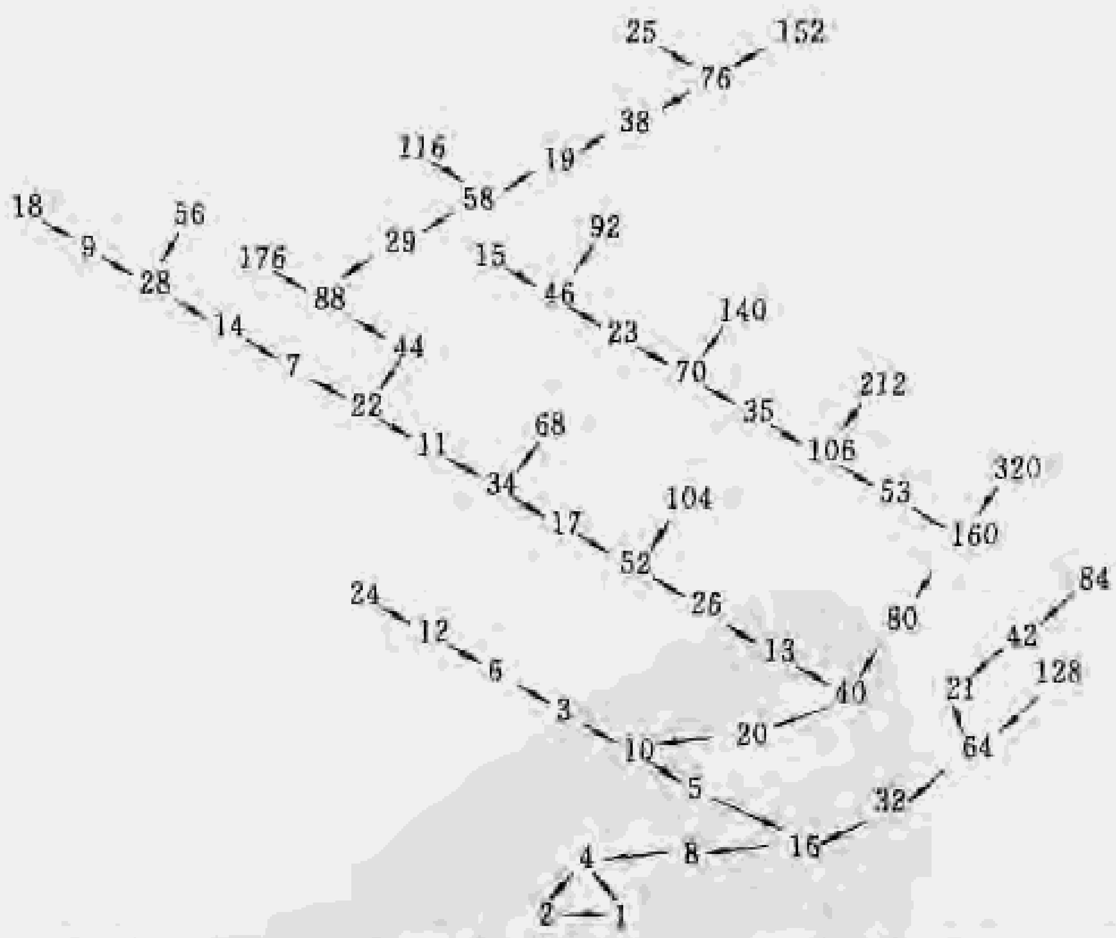
是否有界？这可称为原来的 Collatz 问题. Collatz 未曾公开发表他的问题，仅在 1950 年国际数学会议期间作过交流. 直到现在 $g^{(k)}(8)$ 是否有界仍未解决，倾向性的看法认为 $g^{(k)}(8)$ 无界.

真正的 $3x+1$ 猜测是 B. Thwaites 于 1952 年发现的.

Collatz 的同事 H. Hasse 对 $3x+1$ 猜测甚有兴趣，而且和很多

人讨论过它的推广，所以这一猜测也被称为 Hasse 算法. Hasse 在 50 年代访问过 Syracuse 大学(Syracuse 是美国纽约州中部的城市)，Syracuse 问题就是他提出的名称. 1960 年左右，Kakutani 听到这个问题后很感兴趣，与不少人交流过. 他说:"大概有一个月的时间，耶鲁大学的每一个人都在做它，毫无结果. 我在芝加哥大学提及这个问题后，也发生了同样的现象. 因此流传一则笑话，说这个问题是为了延缓美国数学研究的阴谋."随着该问题的传播，$3x+1$ 猜测又被称为 Kakutani 问题. S. Ulam 也听到这个问题并在一些地方介绍，所以在某些圈子中也称为 Ulam 问题.

下图是对一部分自然数 x 作出的，从 x 发出的箭头指向 $3x+1$(如果 x 是奇数)或 $\frac{x}{2}$(如果 x 是偶数).



已经对 $x \leqslant 2 \cdot 10^{12}$ 进行过验证，$3x+1$ 猜测均成立. 1993 年，Eliahou 还证明了如果有非平凡的圈(即不是 $4 \to 2 \to 1 \to 4$)，那么

这个圈的长≥17 087 915.

$3x+1$ 改为 $3x-1$ 时似乎最终会出现圈{1,2},{5,14,7,20,10}或{17,50,25,74,37,110,55,164,82,41,122,61,182,91,272,136,68,34}.对 $x\leqslant 10^8$ 已经作了验证.还可以考虑更一般的

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{p}, 若\ p\mid a_n,\\ a_nq+r, 若\ p\nmid a_n.\end{cases}$$

$3x+1$ 猜测及其推广,看上去简单,实际上非常困难,以致 Erdös 认为"数学还没有成熟到能够解决这样的问题",奉劝大家"别去碰它!"

另一方面,已经发现 $3x+1$ 猜测十分重要,它与一些重要不定方程(如费马大定理)、$\log_2 3$ 的丢番图逼近、序列 $\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^k\right\}$ 的 mod 1 分布、Z_2(2-adic 整数)的遍历理论、可计算理论等都有密切联系.

参考文献 [18,pp.215~218].

(单 墫)

Collatz 猜测(Collatz's conjecture) 见 **$3x+1$ 猜测**.

Langford 问题(Langford's problem) 能否将两个1,两个2,…,两个 n 排成一列,使两个1之间恰有1个数,两个2之间恰有2个数,…,两个 n 之间恰有 n 个数?

C. Dudley Langford 是一位数学爱好者.1958年,他在 Math. Gaz. 42(1958),p.228 上提出一个有趣的问题.他说:

"几年前,我的儿子还很小,他常常玩颜色块.每种颜色的木块各有两块.有一天,他把颜色块排成一列,两个红的间隔1块,两个蓝的间隔2块,两个黄的间隔3块.我发现可以添上一对绿的,间隔4块,不过需要重新排列.

一般地,能否将两个1,两个2,…,两个 n 排成一列,使两个1之间恰有1个数,两个2之间恰有两个数,两个3之间恰有3个

数，…，两个 n 之间恰有 n 个数？”

例如，在 $n=4$ 时（即红蓝黄绿四种颜色），

$$23421314$$

就是一个合乎要求的排列.

并不是对所有 n 都有合乎要求的排列存在. 1986 年，我国在南开大学举办的数学冬令营，为选拔参加国际数学竞赛的选手，曾出过这样的问题：

“能否将两个 1，两个 2，…，两个 1 986 排成一列，使两个 i 之间恰好相隔 i 个数（$i=1,2,\cdots,1\,986$）？”（这是 Langford 问题的特殊情况：$n=1\,986$）.

答案是不能. 假设有一个满足要求的排列，这时每一个数 $i\in\{1,2,\cdots,1986\}$ 有两个“坐标”，前一个坐标 x_i 是 i 第一次出现时的位置，后一个坐标 y_i 是 i 第二次出现时的位置. 显然

$$y_i = x_i + i + 1.$$

现在用两种方法考虑所有坐标的和的奇偶性. 一方面，$2\times 1\,986$个坐标的和应为

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+(2\times 1\,986)\\=&1\,986\times(2\times 1\,986+1)\end{aligned}$$

是一偶数.

另一方面，每个数 $i\in\{1,2,\cdots,1\,986\}$的两个坐标之和

$$x_i + y_i = 2x_i + i + 1,$$

因而所有坐标之和为

$$\sum_i 2x_i + \sum_i (i+1) = \text{偶数} + \frac{1\,986\times(1\,986+3)}{2}$$

是一奇数. 矛盾！

对一般的 n，采用上面的、比较奇偶性的方法，同样可得，在

$n\equiv 1$或 2(mod 4)时，上述排列不存在.

剩下的问题是在 $n\equiv 0$ 或 3(mod 4)时，上述的排列是否存在？

答案是肯定的，不但所述的排列一定存在，而且在 n 增大时，合乎要求的排列数大得惊人. 在 $n=3$、4 时虽仅有一种，但在 $n=7$ 时就有 27 种之多(我们将一个排列与它的“颠倒”——改从左到右数为从右到左数，算作同一个).

但设计一种方法，使对所有的 $n\equiv 0$ 或 3(mod 4)都能构造出满足要求的排列并不很容易. 这个问题是 Roy. O. Davies 解决的(载 *Math. Gaz.* 43(1958), pp. 253—255). 其方法如下：

对于 $n=4m$ $(m>1)$，排法是

$$\overbrace{4m-4,4m-2,\cdots,2m}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},4m-2,\overbrace{2m-3,2m-5,\cdots,1}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},$$

$$4m-1,\overbrace{1,3,\cdots,2m-3}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},\overbrace{2m,\cdots,4m-4}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},4m,$$

$$\overbrace{4m-3,\cdots,2m+1}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},4m-2,\overbrace{2m-2,\cdots,2}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},2m-1,$$

$$4m-1,\overbrace{2,\cdots,2m-2}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},\overbrace{2m+1,\cdots,4m-3}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},2m-1,4m.$$

例如，在 $m=2$ $(n=8)$时，得到

$$4617148562372538.$$

对于 $n=4m-1$ $(m>1)$，排法是

$$\overbrace{4m-4,\cdots,2m}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},4m-2,\overbrace{2m-3,\cdots,1}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},4m-1,$$

$$\overbrace{1,\cdots,2m-3}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},\overbrace{2m,\cdots,4m-4}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},2m-1,$$

$$\overbrace{4m-3,\cdots,2m+1}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}},4m-2,\overbrace{2m-2,\cdots,2}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},2m-1,4m-1,$$

$$\overbrace{2,\cdots,2m-2}^{\text{连续偶数}m-1\text{个}},\overbrace{2m+1,\cdots,4m-3}^{\text{连续奇数}m-1\text{个}}.$$

例如，在 $m=2$ $(n=7)$时得到

46171435623725.

于是，有定理：当且仅当 $n\equiv 0$ 或 3(mod 4)时，可以将两个 1，两个 2，…，两个 n 排成一列，使两个 i 之间恰好间隔 i 个数($i=1,2,\cdots,n$)。

参考文献 [7，pp. 108~115].

（谈祥柏 单 墫）

参考文献

1 钱宝琮校点. 算经十书. 北京：中华书局，1963

2 秦九韶著. 数书九章. 北京：商务印书馆，1937

3 华罗庚著. 数论导引. 北京：科学出版社，1957

4 潘承洞，潘承彪著. 哥德巴赫猜想. 北京：科学出版社，1981

5 潘承洞，潘承彪著. 解析数论基础. 北京：科学出版社，1991

6 单墫著. 趣味数论. 北京：中国青年出版社，1987

7 王子侠，单墫著. 对应. 上海：科学技术文献出版社，1989

8 中国大百科全书出版社编辑部编. 中国大百科全书(数学). 北京：中国大百科全书出版社，1988

9 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986

10 陆乃超，袁小明编著. 世界数学名题选. 上海：上海教育出版社，1989

11 [英]李约瑟著. 中国科学技术史(第三卷(数学)). 北京：科学出版社，1978

12 [德]H. 德里著. 100 个著名初等数学问题——历史和解. 上海：上海科学技术出版社，1982

13 [苏]B.Д. 契斯佳可夫著. 初等数学古代名题集. 北京：科学普及出版社，1984

14 [日]日本数学会编. 数学百科辞典. 北京：科学出版社，1984

15 Dickson. *History of the theory of numbers*, Vol. I. Washington: Carnegie Institution, 1919

16 Dickson. *History of the theory of numbers*, Vol. Ⅰ. Washington: Carnegie Institution, 1920
17 Dickson. *History of the theory of numbers*, Vol. Ⅱ. Washington: Carnegie Institution, 1923
18 Guy. *Unsolved problems in number theory*. New York: Springer-Verlag New York Inc. second edition, 1994
19 Hardy and Wright. *An Introduction to the theory of numbers*. London: Oxford University Press, fifth edition, 1981
20 P. Ribenboin. *The book of prime number records*. New York: Springer-Verlag New York Inc. second edition, 1989
21 Shanks. *Solved and unsolved problems in number theory*, Vol. I. Washington, D.C., 1962
22 L. J. Mordell. *Diophantine equations*. London: Academic press Inc. (London) LTD, 1969
23 M. N. Huxley. *The distribution of prime numbers*. London: Oxford University Press, 1972
24 M. Ecker 著,刘强译. 数学黑洞的魅力. 世界科学,1993 年第 10 期

代　数

一　数与式

Avicenna 问题(Avicenna problem)　若某自然数被 9 除余 1 或余 8,则该数的平方被 9 除必余 1.

该题由塔吉克百科全书式学者 Avicenna (即 Ibn sinā,Abū ʻAli Al-Husayn ibn ʻAbd-allāh, 980～1037)提出.他的数学著述只有关于算术的一篇传到今天,是他的医学著作《医书》的组成部分(《医书》现存英国莱顿图书馆).

设 $M=9n+1$,则 $M^2=(9n+1)\times(9n+1)$,即

$$M^2=81n^2+18n+1=9(9n^2+2n)+1,$$

故数 M 的平方被 9 除必余 1.

又设 $N=9n+8$,则

$$N^2=81n^2+144n+64=9(9n^2+16n+7)+1,$$

故数 N 的平方被 9 除也必余 1.因此,某数被 9 除不论余 1 或余 8,它的平方被 9 除必余 1.

参考文献　[27,p.20,p.135].

(葛　军)

Germain 定理(Germain theorem)　求证:对任意自然数 $a>1$,所有形如 a^4+4 的数一定是合数.

该问题是由法国数学家 Sophie Germain(1776～1831)提出的.

数 a^4+4 可以进行如下分解:

$$
\begin{aligned}
a^4+4&=a^4+4a^2+4-4a^2\\
&=(a^2+2)^2-4a^2\\
&=[(a-1)^2+1][(a+1)^2+1].
\end{aligned}
$$

当 $a>1$ 时，$(a-1)^2+1$ 与 $(a+1)^2+1$ 均为大于 1 的自然数，所以，当 $a>1$ 时，形如 a^4+4 的数一定是合数.

参考文献 [27,p.39,pp.204～205],[29,p.74].

（葛 军）

循环小数的一个性质（A property of recurring decimal） 若有理数 $\frac{n}{p}$（其中 p 是一个不等于 2 与 5 的素数）的循环小数表示式中，最短循环节是偶数位数字组成的，那么把这个循环节的前半段与后半段看做通常数时，其和全部由数字 9 组成.

这一结论及其证明出自美国人 R. Honsberger 1970 年出版的《数学中的智巧》一书.

先看一些特例：

(i) $\frac{1}{7}=0.\dot{1}42\,85\dot{7}$;

(ii) $\frac{1}{13}=0.\dot{0}76\,92\dot{3}$;

(iii) $\frac{1}{17}=0.\dot{0}58\,823\,529\,411\,764\,\dot{7}$;

(iv) $\frac{1}{19}=0.\dot{0}52\,631\,578\,947\,368\,42\dot{1}$.

由它们可得出

$$
\begin{array}{l}
142\\
\underline{857}\\
999
\end{array},\quad
\begin{array}{l}
076\\
\underline{923}\\
999
\end{array},\quad
\begin{array}{l}
05882352\\
\underline{94117647}\\
99999999
\end{array},\quad
\begin{array}{l}
052631578\\
\underline{947368421}\\
999999999
\end{array}.
$$

一般地，证明上述结论要用到费马小定理：若 p 是一个素数，$(a,p)=1$，则 $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$，即 $p\mid a^{p-1}-1$.

令 $a=10$，如果 p 是一个不等于 2 与 5 的素数，那么由费马

小定理知，存在一个整数 c，使得

$$10^{p-1}-1=cp.$$

两边取倒数，然后再乘以 c，即得

$$\frac{1}{p}=\frac{c}{10^{p-1}-1},$$

所以，有

$$\frac{n}{p}=\frac{nc}{10^{p-1}-1}. \qquad ①$$

由于 $n<p$，所以我们知道 $nc<10^{p-1}$，因此 nc 最多有 $(p-1)$ 位. 可以看出，①式右边的部分是几何级数的和

$$\frac{n}{p}=\frac{nc}{10^{p-1}}+\frac{nc}{10^{2(p-1)}}+\cdots$$

它表示一个循环小数，其循环节有 $(p-1)$ 位，代表着数目 nc，因此 $\frac{n}{p}$ 的最短循环节的长度要么是 $p-1$，要么是 $p-1$ 的某个因数（在例(i)、(iii)、(iv)中，最短循环节的长度为 $p-1$，而在例(ii)中，最短循环节的长度是 $\frac{p-1}{2}$）.

类似于由费马小定理推出①式那样，我们可推出下列事实：

若 k 是任意一个正整数，使得 $p\mid 10^k-1$，则

$$\frac{n}{p}=\frac{R}{10^k-1}, \qquad ②$$

其中 R 是一个小于 10^k 的正整数，这样 $\frac{n}{p}$ 的小数表达式中在 k 位之后出现循环.

反之，若 $\frac{n}{p}$ 的小数表达式中在 k 位之后开始循环，那么

$$\frac{n}{p}=\frac{P}{10^k-1},$$

其中 P 是 $\frac{n}{p}$ 展式的循环节. 所以

$$p\cdot P=n(10^k-1),$$

p 不能整除 n,因此 p 必整除 10^k-1.

现在我们可以断言：$\frac{n}{p}$ 的小数表示式中在 k 位之后出现循环,当且仅当 10^k-1 能被 p 整除,特别地,$\frac{n}{p}$ 的最短循环节的位数 u 是被 p 整除的 10^k-1 中的最小整数 k.

于是,$\frac{n}{p}$ 的循环节的长度只依赖于 p,不依赖于 n.

现在,我们来证明题条中的结论.

假设 $\frac{n}{p}$ 的小数表示式中最短循环节 P 有偶数位数字,比如有 $2t$ 位. 我们把 P 写成下列形式

$$P=M\cdot 10^t+N,N<10^t, \tag{③}$$

其中 M 与 N 是 t 位数,把 P 分成两段. 我们要证明

$$M+N=\underbrace{99\cdots 9}_{t\text{位}}=10^t-1.$$

此时

$$\frac{n}{p}=\frac{P}{10^{2t}-1}, \tag{④}$$

所以

$$p\cdot P=n(10^{2t}-1)=n(10^t-1)(10^t+1).$$

由于 $\frac{n}{p}$ 是既约分数,故 p 不能整除 n. 又 p 不能整除 10^t-1,因为若 p 能整除 10^t-1,则 $\frac{n}{p}$ 的循环节的长度必将是 t 而不是

$2t$. 因此，素数 p 能整除 10^t+1. 我们利用 P 的表达式③，把④式写成下列形式

$$\frac{n}{p}=\frac{P}{10^{2t}-1}=\frac{M\cdot 10^t+N}{(10^t-1)(10^t+1)},$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{n(10^t+1)}{p}&=\frac{M\cdot 10^t+N}{10^t-1}=\frac{M\cdot 10^t-M+M+N}{10^t-1}\\&=\frac{M(10^t-1)+M+N}{10^t-1}\\&=M+\frac{M+N}{10^t-1}.\end{aligned}\tag{5}$$

等式⑤的左边部分是一个正整数，因为 p 可整除 10^t+1. 所以 $\frac{M+N}{10^t+1}$ 也是整数.

数 M 与 N 每一个都有 t 位，即

$$0<M+N\leqslant 10^t-1+10^t-1,$$

即

$$0<\frac{M+N}{10^t-1}\leqslant 2.$$

仅当 $M=N=10^t-1$ 时，上式中的等号才成立，而在这种情形下，P 中每位必定都是 9，但这时最短循环节就只有一位，与最短循环节的长度为偶数的假设相矛盾. 因此，

$$\frac{M+N}{10^t-1}=1,$$

即

$$M+N=10^t-1.$$

这正是我们所要证的.

参考文献 [25,pp. 183~186],[28,p. 152].

（张恩华）

3的一个奇特的性质(A curious property of 3) 试证明:如果 m 和 n 是两个自然数,那么 $\sqrt[n]{m}$ 和 $\sqrt[m]{n}$ 之一总是小于或等于 $\sqrt[3]{3}$.

此题选自《美国数学月刊》1970年第768页问题E2 190.该题由Purdue大学Harry Pollard提出.

设 $m=n$,欲证 $\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}$ 或 $n^{\frac{1}{n}}\leqslant3^{\frac{1}{3}}$,亦即 $n^3\leqslant3^n$,可用数学归纳法.

当 $n=1,2,3$ 时,显然命题正确.假设当 $n\geqslant3$ 时,有

$$n^3\leqslant3^n,$$

于是

$$\begin{aligned}3^{n+1}&=3\cdot3^n\geqslant3n^3\\&=n^3+3n^2+3n+(n-3)n^2+(n^2-3)n\\&>n^3+3n^2+3n+1\\&=(n+1)^3.\end{aligned}$$

因此,对于 $m=n$,命题得证.

如果 $m\neq n$,不妨设 $m<n$,此时有

$$\sqrt[n]{m}<\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3},$$

而且,等号只当 $m=n=3$ 时成立.

参考文献 [30,p. 203].

(张恩华)

棣莫弗公式(De Moivre formula) 若复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则对任何自然数 n,有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

1722年,棣莫弗在他的笔记中,利用1707年已得到的结果,得出代表比为 $1:n$ 的两个角的正矢 $(\mathrm{vers}\ \alpha=1-\cos\alpha)$ 的 x 和

t 之间的关系,这可由消去两个方程 $1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t$ 和 $1-2z+z^2=-2zx$ 中的 z 得到.这里棣莫弗认为 n 为正整数.实际上,在这个结论中已隐含着棣莫弗公式,这只要令 $x=1-\cos\theta$, $t=1-\cos n\theta$ 就可导出.但棣莫弗没有明确得到上述公式,完整的棣莫弗公式是欧拉于 1748 年提出的,并给出了证明,还把它推广到 n 为任意实数.棣莫弗间接地得到下面的公式:

$$\begin{aligned}&[\sqrt{m^n}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]^{\frac{1}{n}}\\&=\sqrt{m}\left(\cos\frac{2k\pi\pm\alpha}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi\pm\alpha}{n}\right),\\&k=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2},\ n\text{ 为奇数};\\&k=1,2,3,\cdots,\frac{n}{2},\ n\text{ 为偶数}.\end{aligned}$$

棣莫弗公式可用数学归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,等式显然成立;

当 $n=2$ 时,由复数乘法定义可知

$$\begin{aligned}z^2=z\cdot z=r^2[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathrm{i}(\cos\theta\cdot\sin\theta\\+\sin\theta\cdot\cos\theta)]=r^2(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta),\end{aligned}$$

等式依然成立.

假定 $n=k(k\geqslant 2,k$ 为自然数)时等式成立,则当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}z^{k+1}&=z^k\cdot z=r^k(\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\&=r^{k+1}[(\cos k\theta\cdot\cos\theta-\sin k\theta\cdot\sin\theta)+\\&\quad\mathrm{i}(\cos k\theta\cdot\sin\theta+\sin k\theta\cdot\cos\theta)]\\&=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+\mathrm{i}\sin(k+1)\theta],\end{aligned}$$

因此,对任何自然数 n,等式成立.

棣莫弗公式的一个直接的应用是:根据复数相等的定义,可以得

到用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的幂来分别表示 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 的公式，即

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \cdots$$

$$\sin n\theta = C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \cdots$$

它的一个重要应用则是：复数域中，1 恰有 n 个不同的 n 次方根，它们可以用单位圆的一个内接正 n 边形的顶点来表示. 历史上欧拉还曾用该公式导出了著名的公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，并由此推动了对解析三角学的研究.

参考文献　[5, pp. 38～39], [17, pp. 128～129], [20, pp. 631～633].

（张恩华　马　复）

四平方和的欧拉恒等式(Euler identity)　若 $n_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$，$n_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$，则 $n_1n_2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$，其中

$$A = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$
$$B = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3,$$
$$C = x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_4 + x_4y_2,$$
$$D = x_1y_4 - x_4y_1 - x_3y_2 + x_2y_3.$$

此恒等式可证明如下：

求出 A^2, B^2, C^2, D^2 并求和，即知所有系数为 2 的项都合并为 0. 例如，我们写出包含 y_1y_2 的项

$$2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_3x_4y_1y_2 + 2x_3x_4y_1y_2,$$

合并后为 0. 包含 y_1，y_2，y_3，y_4 的其他乘积 y_1y_3、y_1y_4、y_2y_3、y_2y_4、y_3y_4 的项也同样合并为 0. 于是

$$\begin{aligned} & A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \\ = & x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + \cdots + x_4^2y_4^2 \text{（共 16 项）} \\ = & (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2). \end{aligned}$$

根据这一恒等式，可得出数论中著名的拉格朗日四平方和定理(1770年得出)：每个正整数均可表为四个整数的平方和.

参考文献 [12,pp.86～88],[21,pp.49～50].

(张恩华)

拉格朗日恒等式(Lagrange identity) 拉格朗日恒等式指的是:

$$\begin{aligned}&(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-\\&(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2\\=\ &(x_1a_2-x_2a_1)^2+(x_1a_3-x_3a_1)^2+\cdots+\\&(x_{n-1}a_n-x_na_{n-1})^2.\end{aligned} \qquad ①$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{j=1}^{n}a_j^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2=\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\begin{vmatrix}x_k & x_l\\ a_k & a_l\end{vmatrix}^2.$$

由于

$$\begin{aligned}&(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\\=\ &(x_1^2a_1^2+x_1^2a_2^2+\cdots+x_1^2a_n^2)+(x_2^2a_1^2+x_2^2a_2^2+\cdots+x_2^2a_n^2)+\\&\cdots+(x_n^2a_1^2+\cdots+x_n^2a_n^2)\end{aligned}$$

$$(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2=a_1^2x_1^2+\cdots+a_n^2x_n^2+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}2x_kx_la_ka_l,$$

于是①式左端合并掉了所有形如 $x_i^2a_i^2$ 的项，把剩下的项加以归并，左端表示成

$$\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(x_k^2a_l^2-2x_kx_la_ka_l+x_l^2a_k^2)=\sum(x_ka_l-x_la_k)^2.$$

由此即知拉格朗日恒等式的正确性.

由这恒等式还可立即导出著名的柯西不等式.

参考文献 [21,p.49].

(张恩华)

斐波那契恒等式(Fibonacci identity)

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax\mp by)^2+(bx\pm ay)^2.$$

这两个恒等式是1202年斐波那契在他的《算盘书》中给出的.它们说明：如果两个数都能表示成两个平方数的和，那么，它们的乘积也能表示成两个平方数的和.可以证明，这两个恒等式包含正弦和余弦的加法公式.这两个恒等式后来成为算术二次型的高斯理论以及现代代数中某些发展的起源.

斐波那契恒等式实际上是拉格朗日恒等式的特例($n=2$时).

参考文献 [4,p.85],[21,p.49].

（张恩华）

Bhāskara 等式（Bhāskara's equality） Bhāskara 等式，指的是在 Bhāskara 著作中出现的关于两个或多于两个二次无理数相加的运算的等式.

Bhāskara 是12世纪印度著名天文学家和数学家，他擅长对无理数以及解方程的研究.他的著作中出现过关于两个或多于两个二次无理数相加的运算式.例如，设有无理数 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{12}$，则

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+\sqrt{12}&=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\times 12}}\\&=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.\end{aligned}$$

其一般原理可表示为

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}.$$

Bhāskara 还给出无理数加法法则："较大的无理数除以较小的，所得之商加1，再平方，然后乘以较小的无理数的平方，积的（算术）平方根即为两无理数之和."即

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)^{2}\times b}.$$

另外，Bhāskara 还给出了更复杂的含有根式的等式，如：

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5},$$

$$\sqrt{16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6},$$

等等.

参考文献　[16,p.211],[27,p.17,p.125].

（张恩华）

贾宪三角形　我国宋代数学家已掌握了利用二项式展开的各项系数间的关系来开方解方程,并把它们画出图表来,这就是南宋杨辉收集在《详解九章算法》里的“开方作法本源图”(如图 3-1).我国古代把解方程称为“开方”.这个二项式展开的各项系数图,可以直接用于“开方”,为创造高次方程数值解法提供了条件.



图 3-1　开方作法本源图

由于杨辉指出这个图是从北宋数学家贾宪(1050 年前后)的著作中发现的，所以我国现在称这个呈三角形的图为“贾宪三角形”，又称为“杨辉三角形”. 元初数学家朱世杰把这个图由 7 层推广到 9 层(8 次幂)，为高阶等差级数求和问题和高次招差法的发展，提供了有力的数学工具.

贾宪三角形有如下重要性质：

(1) 该三角形的两条侧边(腰)上的数都是 1，而其余各数都等于它的肩上两个数的和，用组合记号表示，可写成

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1},$$

这里 $r = 1,2,\cdots,n$，且令 $C_n^0 = 1, C_{n-1}^n = 0$.

这个组合数等式是贾宪三角形的最基本的性质，称为贾宪等式或杨辉等式.

(2) 除贾宪三角形两条侧边上的数外，其余各数都等于它的右肩上平行于该三角形右侧边(或本身)的斜行上各数的和，即

$$C_r^r + C_{r+1}^r + C_{r+2}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}.$$

当然其余各数也都等于它的左肩上平行于左侧边(或本身)的斜行上各数的和.

上述两个等式的证明，见组合数等式.

一般认为，贾宪三角形是基于性质(1)给出的，而实际上贾宪本人则是由性质(2)构造出来. 如图 3－1，从右边开始各斜行中数(除 1 外)构造如下：

第二斜行	第三斜行
1+1=2	1+2=3
1+1+1=3	1+2+3=6
1+1+1+1=4	1+2+3+4=10
1+1+1+1+1=5	1+2+3+4+5=15
1+1+1+1+1+1=6	

第四斜行

$1+3=4$

$1+3+6=10$

$1+3+6+10=20$

第五斜行

$1+4=5$

$1+4+10=15$

第六斜行

$1+5=6$

在西方,16 世纪时也已有人知道这个三角形的系数图了.如德国的 Apianus(1495~1552),在他 1527 年出版的《算术》封面上就有这个图表了.不过,这个图表却是以 17 世纪法国数学家帕斯卡的名字来命名的,而帕斯卡是 1653 年才提出这个图表的.

参考文献 [1, p.144],[3, p.427],[7, p.360],[15, p.297],[103]

(眭秋生)

开方作法本源图 见贾宪三角形.

杨辉三角形 见贾宪三角形.

帕斯卡三角形(Pascal triangle) 见贾宪三角形.

李善兰恒等式 $\sum_{k=0}^{p}(C_p^k)^2C_{n+2p-k}^{2p}=(C_{n+p}^p)^2$,其中 k、p 是正整数.

李善兰(1811~1882)是我国清代数学家,他在朱世杰等前辈数学家对垛积问题研究的基础上,利用贾宪三角形的性质,对各种堆垛进行深入的研究,写成《垛积比类》四卷.书中对各种堆垛及其各层的结构、层与积的关系,以及各种变化的规律进行了探讨,将各种垛进行科学分类,并把各种垛全部归结为有关三角垛积的计算(杨辉、朱世杰研究的三角垛积是

$$S=1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\Big),$$

将我国古代传统的垛积术提高到了一个新的水平,丰富了我国级

数理论、组合数学等内容.

1939 年,我国数学家章用(1911～1939)在论文《〈垛积比类〉疏证》中,首次将李善兰关于垛积研究的成果归纳为一个恒等式,称之为“李善兰恒等式”. 1954 年,匈牙利数学家 Paul Turán 院士来我国访问,曾以李善兰恒等式作学术报告. 国内外对这个恒等式已有多种证明,现介绍一种证法.

首先注意到

$$C_{n+k}^{p+q}=\sum_{j}C_{k}^{j}C_{n}^{p+q-j}, \tag{①}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{k}C_{p}^{k}C_{q}^{k}C_{n+k}^{p+q}&=\sum_{k}C_{p}^{k}C_{q}^{k}\sum_{j}C_{k}^{j}C_{n}^{p+q-j}\\&=\sum_{j}C_{n}^{p+q-j}\sum_{k}C_{p}^{k}C_{q}^{k}C_{k}^{j}\text{(交换和号)}\\&=\sum_{j}C_{n}^{p+q-j}C_{q}^{j}\sum_{k}C_{p}^{k}C_{q-j}^{q-k}\\&=\sum_{j}C_{n}^{p+q-j}C_{q}^{j}C_{p+q-j}^{q}\text{(利用 ①)}\\&=C_{n}^{p}\sum_{j}C_{p}^{j}C_{n-p}^{q-j}\\&=C_{n}^{p}C_{n}^{q}\text{(利用 ①)},\end{aligned}$$

即已推得

$$\sum_{k}C_{p}^{k}C_{q}^{k}C_{n+k}^{p+q}=C_{n}^{p}C_{n}^{q}. \tag{②}$$

②的两边都是 n 的 $(p+q)$ 次多项式. 对于自然数 n,②成立,从而对一切 n 两边相等. 将 n 换为 $-1-n$,则

$$C_{n}^{p}=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

成为$\dfrac{(-1-n)(-2-n)\cdots(-n-p)}{p!}=(-1)^{p}C_{n+p}^{p}$.

同样 C_{n}^{q}、C_{n+k}^{p+q} 成为 $(-1)^{q}C_{n+q}^{q}$ 及 $(-1)^{p+q}C_{n+p+q-k}^{p+q}$. 这时②就成为

$$\sum_{k=0}^{p}C_{p}^{k}C_{q}^{k}C_{n+p+q-k}^{p+q}=C_{n+p}^{p}C_{n+q}^{q}. \tag{③}$$

特别地，当 $p=q$ 时，③即为

$$\sum_{k=0}^{p}(C_p^k)^2 C_{n+2p-k}^{2p}=(C_{n+p}^p)^2.$$

参考文献 [1，pp. 325～328]，[2，pp. 386～400，pp. 409～420].

（眭秋生 张恩华）

组合数等式（Combinatorial equalities） 关于组合数的等式，最常用的有：

(1) $C_m^k=C_m^{m-k}$;

(2) $C_{m+1}^k=C_m^k+C_m^{k-1}$;

(3) $C_k^k+C_{k+1}^k+\cdots+C_m^k=C_{m+1}^{k+1}$;

(4) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

现证明如下.

$$(1)\ C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{m!}{(m-k)![m-(m-k)]!}=C_m^{m-k}.$$

也可这样考虑：从 m 个相异元素中，每取出一个 k 元组合，同时必留下另一个 $(m-k)$ 元组合，二者是一一对应的，因此(1)式成立.

$$\begin{aligned}(2)\ C_m^k+C_m^{k-1}&=\frac{m!}{k!(m-k)!}+\frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)!}\\&=\frac{m![(m-k+1)+k]}{k!(m-k+1)!}\\&=\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}\\&=C_{m+1}^k.\end{aligned}$$

(3) 由(2)有

$$C_{k+l}^k=C_{k+l+1}^{k+1}-C_{k+l}^{k+1},$$

令 $k=0,1,2,\cdots,m-k$，得 $(m-k+1)$ 个等式，将它们一起相加，并注意 $C_{k+1}^{k+1}=C_k^k$，即得(3)式.

等式(3)通常称为朱世杰恒等式，是我国元朝数学家朱世杰在1300年左右发现的.

(4) 在二项展开式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

中，令 $a=b=1$，即得(4)式.

也可以这样考虑：从 n 个相异元素中，取1个、2个、…、n 个的组合，再加上每个元素都不取的一种情形，恰是每个元素都取或者不取这两种可能的一切情形. 前者的总数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$，后者的总数为 2^n，因此(4)式成立.

注：除了以上4个常用组合数等式外，还有一些较常用的组合数等式，如：

(5) $C_n^0-C_n^1+\cdots+(-1)^kC_n^k+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$；

(6) $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$；

(7) $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right]$；

(8) $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]$；

(9) $C_n^0C_m^p+C_n^1C_m^{p-1}+\cdots+C_n^pC_m^0=C_{m+n}^p$；

(10) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$；

(11) $1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$，

等等.

组合数等式的证明，可以采取各种方法，特别可以

① 直接由组合本身研究；

② 借助于恒等变形；

③ 根据多项式性质(特别地，利用牛顿二项式)；

④ 应用数学归纳法，

以确定这些等式的成立.

参考文献　[10,pp.434～437],[22,pp.536～540].

（张恩华）

关于二项式系数（On binomial coefficients）　试问数 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, C_{2n}^5, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 的最大公约数是什么？

这是《美国数学月刊》1971 年第 201 页上的问题 E2 227，由 Manitoba 大学 N. S. Mendelsohn 提出，由 St. Olaf 学院的学生给出了解答.

注意到

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1},$$

且所给数的每个公约数均整除这些数之和，故这些数的最大公约数 g 可以整除 2^{2n-1}，所以它是 2 的幂.

假设整除 n 的最大的 2 的幂是 2^k，$n = 2^k q$，q 是一个奇数，即 $C_{2n}^1 = 2n = 2^{k+1}q$. 由于 g 是 C_{2n}^1的一个约数，且是 2 的幂，所以 g 不可能大于 2^{k+1}. 若把 g 表示成 $g=2^{k+1}$，对于 $r=1,3,5,\cdots,2n-1$，因为

$$\begin{aligned} C_{2n}^r &= \frac{(2n)!}{(2n-r)!r!} \\ &= \frac{2n}{r}\cdot\frac{(2n-1)!}{(2n-r)!(r-1)!} \\ &= \frac{2n}{r}\cdot C_{2n-1}^{r-1} \\ &= \frac{2^{k+1}q}{r}C_{2n-1}^{r-1}, \end{aligned}$$

所以 $2^{k+1} \mid C_{2n}^r$.

于是，2^{k+1} 即为 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 的最大公约数.

参考文献　[30,pp.212～213].

（张恩华）

初等对称多项式（Elementary symmetrical palynomial）

n元多项式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \qquad (\text{记作 } \sigma_1);$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n \qquad (\text{记作 } \sigma_2);$$

……………………………………

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_n \qquad (\text{记作 } \sigma_{n-1});$$

$$x_1x_2x_3\cdots x_n \qquad (\text{记作 } \sigma_n)$$

称为初等对称多项式，又称为基本对称函数.

解四次以上高次方程的主要精力集中在解一般性的方程上.在朝着这一目标前进的过程中，一些关于对称函数的辅助性工作被证明是重要的.当17世纪的代数学家注意到，而且牛顿证明了，多项式根的乘积的各种和可以用方程的系数表示出来的时候，研究对称函数的兴趣就产生了.

在高等代数中证明了对称多项式基本定理，即：任何对称多项式都可以唯一地表成初等对称多项式的多项式.

可以通过递推关系，用初等对称多项式表示某些对称多项式.例如，对于k次幂的和$S_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k$（k是自然数），

$n=2$时，$S_k=x_1^k+x_2^k$的递推公式为

$$S_k=\sigma_1S_{k-1}-\sigma_2S_{k-2};$$

$n=3$时，$S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k$的递推公式为

$$S_k=\sigma_1S_{k-1}-\sigma_2S_{k-2}+\sigma_3S_{k-3}.$$

一般地，有如下两个等式（称为牛顿公式）：

(1) 当$k\leqslant n$时，

$$S_k=\sigma_1S_{k-1}-\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^k\sigma_{k-1}S_1+k(-1)^{k+1}\sigma_k;$$

(2) 当 $k>n$ 时,

$$S_k=\sigma_1 S_{k-1}-\sigma_2 S_{k-2}+\cdots+(-1)^{n+1}\sigma_n S_{k-n}.$$

参考文献 [8,pp. 269～275],[17,pp. 354～355].

(张恩华)

一个对称式(A symmetrical expression) 证明

$$||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z$$

是对称式,并求出能使该式的对称性变得明显的值.

此题出现在波兰著名学者 H. D. Steinhaus(1887～1972)的《数学 100 题》上,作者自己编题并给出了如下解答.

用字母 w 表示所要证明的式子,不难得到

$$w=\begin{cases}2|x-y|+2x+2y, & \text{当 } |x-y|+x+y-2z\geqslant 0 \text{ 时;}\\ 4z, & \text{当 } |x-y|+x+y-2z<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

再考虑到 $x-y\geqslant 0$ 和 $x-y<0$ 两种情况,则得

$$w=\begin{cases}4x, & \text{若 } x-z\geqslant 0 \text{ 且 } x-y\geqslant 0;\\ 4y, & \text{若 } y-x\geqslant 0 \text{ 且 } y-z\geqslant 0;\\ 4z, & \text{若 } z-y\geqslant 0 \text{ 且 } z-x\geqslant 0.\end{cases}$$

即 $w=4\max\{x,y,z\}$. 该式的对称性由此得到证明,且该式的值即为 $4\max\{x,y,z\}$.

我们给出另一解法:

因为 $|x-y|+x+y=2\max\{x,y\}$,所以

$$\begin{aligned}&||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z\\ =&|(|x-y|+x+y)-2z|+(|x-y|+x+y)+2z\\ =&2\max\{2\max\{x,y\},2z\}\\ =&4\max\{x,y,z\}.\end{aligned}$$

参考文献 [26,p. 3,p. 56].

(单 墫 张恩华)

拉格朗日插值多项式(Lagrange interpolation polynomial) 给定两组实数 $x_i, y_i (i=0,1,\cdots,n)$,其中 $x_i \neq x_j (i \neq j)$,存在唯一的 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_i) = y_i (i=0,1,\cdots,n). \quad ①$$

这个结果是拉格朗日在1795年给出的.实际上,满足条件①的 n 次多项式 $P_n(x)$ 是容易构造的.考虑形如

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad ②$$

的 n 次多项式,其中 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是 n 次多项式.如果 $l_i(x)$ 满足条件

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, j \neq i, \\ 1, j = i, \end{cases} \quad i,j = 0,1,2,\cdots n, \quad ③$$

那么由②式确定的 n 次多项式满足条件①.因此,只需确定满足条件③的 n 次多项式 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$.由于 $l_i(x_j)=0(j \neq i)$,所以 $l_i(x)$ 可以表示为

$$l_i(x) = a_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 a_i 为某个常数.又由于 $l_i(x_i)=1$,所以

$$a_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

从而

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \quad ④$$

如果令 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$,那么 $l_i(x)$ 可以写为

$$l_i(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)},\qquad ⑤$$

其中 $\omega'(x_i)=\left[\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_i}$.

上面证明了满足条件①的 n 次多项式的存在性，现在来证明这种多项式的唯一性.

设 $Q_m(x)$ 是满足条件①的另一多项式，其次数 $m\leqslant n$. 作差函数 $R_n(x)=P_n(x)-Q_m(x)$，则 $R_n(x)$ 是次数不超过 n 的多项式. 因为 $P_n(x)$ 与 $Q_m(x)$ 均满足条件①，所以 $R_n(x_i)=0(i=0,1,\cdots,n)$，即 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $R_n(x)$ 的 $n+1$ 个根. 根据代数学基本定理，$R_n(x)$ 至多有 n 个根. 因此，$R_n(x)$ 恒为零，从而 $P_n(x)=Q_m(x)$. 这就证明了满足条件①的 n 次多项式是唯一的.

多项式②（其中 $l_i(x)$ 由④或⑤确定）叫做拉格朗日插值多项式，给定的数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 叫做插值结点（当相邻两个结点的距离均相等时叫做等距结点，否则叫做不等距结点），条件①叫做插值条件.

从历史上看，我国隋朝数学家刘焯（544～610）首先提出了等距结点插值公式，而唐朝数学家张遂（683～727）提出了不等距结点插值公式，这比拉格朗日发表相应结果要早 1 000 多年.

拉格朗日插值多项式的基本功能是用来代替比较复杂的函数或解析式未知的函数，以便进行函数值的近似计算. 因此，它在数值分析的许多分支，如数值积分、数值微分、微分方程数值解、曲线拟合、曲面拟合等方面均有应用. 中学生常用的“数学用表”中，许多初等函数值的计算，实际上是用线性插值多项式来确定修正值的.

参考文献　[9,pp. 1～4].

（陈永林）

欧拉公式(Euler formula)　设 $i^2=-1$，y 为实数，则

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

英国数学家 Roger Cotes (1682～1716)于 1714 年发表了一个有关复数的定理，即

$$iy=\log e(\cos y+i\sin y),$$

实质上，他用另一形式给出了欧拉公式中的前一个，但未能引起人们的重视. 1740 年，欧拉在给约翰·伯努利的信中，讲到 $2\cos y$ 和 $e^{iy}+e^{-iy}$ 应该相等；1743 年，又发表了 $\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ 和 $\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$ 的结果；1748 年，他重新发现了 Roger Cotes 得到的上面那个定理(显然也可以从 1743 年得到的结果导出). 欧拉还将上述公式作了广泛的应用，从而为人们所知. 但当时公式中未用 i 而用 $\sqrt{-1}$，直到 1777 年欧拉才用 i 表示 $\sqrt{-1}$.

为了导出欧拉公式，我们可先把无穷幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 所定义的超越整函数叫做复数域内的指数函数 e^z，即

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad ①$$

然后设 z 为纯虚数 iy，并代入①，整理得

$$\begin{aligned}e^{iy}&=\left[1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right]+\\&\quad i\left[y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\right]\\&=\cos y+i\sin y.\end{aligned}$$

同样可得 $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$，从而导出

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

当 $y=\pi$ 时，据欧拉公式的第一式，得

$$e^{i\pi}+1=0.$$

它把数学中最重要的五个数：e、i、π、1、0 联系在一起了. 欧拉还获得了其他许多奇妙的关系式，如 $i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$ 等.

参考文献　[6,p. 87],[17,p. 128],[18,p. 413],[24,pp. 486～487].

（张恩华　郑君文）

$f(\cos x)=\cos 17x$ 的一个性质（A property of $f(\cos x)=\cos 17x$）　若 $f(\cos x)=\cos 17x$，则 $f(\sin x)=\sin 17x$.

本题为美国《数学杂志》1954 年问题 Q103，由 Norman Anning 提出.

令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则 $\sin x=\cos y$，进一步可得

$$\begin{aligned}\sin 17x&=\sin\left[17\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]=\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}-17y\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-17y\right)=\cos 17y=f(\cos y)\\&=f(\sin x).\end{aligned}$$

此题可推广，即题中的 17 可以用形如 $4k+1$ 的任何整数代替.

若 $f(\cos x)=\cos[(4k+1)x]$，则

$$f(\sin x)=\sin[(4k+1)x]. \tag{①}$$

由①还可类似地得到：

若 $f(\sin x)=\sin[(4k+1)x]$，则

$$f(\cos x)=\cos[(4k+1)x]; \tag{②}$$

若 $f(\text{tg}\, x)=\text{tg}[2(k+1)x]$，则

$$f(\cot x)=\cot[(2k+1)x]; \tag{③}$$

若 $f(\cot x)=\cot[(2k+1)x]$，则

$$f(\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}[(2k+1)x]. \quad ④$$

参考文献 [30,p.18].

（张恩华 郑君文）

富兰克林"遗嘱"问题(Franklin's problem) 本杰明·富兰克林(Benjamin Franklin，1706～1790)是美国著名的政治家.《本杰明·富兰克林文集》中载有他的"遗嘱"，其中有这样一段话："1 000金镑赠给波士顿的市民.如果他们接受了这笔钱，应该把它托付给一些公选出来的公民，让他们按5%的年利率借给一些年轻的艺匠去生息.这笔款子100年后将增加到131 000金镑.我希望那时候用100 000金镑建造一座公共建筑物，剩下的31 000金镑去继续生息.再经过100年，在第二个100年的末了，款额将增加到4 061 000金镑，其中1 061 000金镑还是由波士顿的市民来支配，而其余的3 000 000金镑让马萨诸塞州的公众来管理.过此以后，我可不敢多作主张了."现在的问题是：这个遗嘱实际吗？

这是一个复利问题.已知本金1 000金镑，年利率为5%，则100年后本利和为 $x=1\,000\times(1+5\%)^{100}$ 金镑.

$$\lg x=\lg 1\,000+100\lg(1+5\%)=5.118\,9,$$

所以 $x=131\,000$，这和遗嘱内容相符.

又31 000金镑到第二个100年末了，变为

$$y=31\,000\times(1+5\%)^{100}=4\,076\,500,$$

这个数目与遗嘱上所说的4 061 000相差不大.

可见，立遗嘱人的想法是实际的，是完全合理的.

参考文献 [14,pp.226～227].

（张恩华）

火柴游戏(A game of matches) 关于火柴游戏，有下面几种：

1. 共有 54 根火柴，两个人轮流取，每次最多只能取 5 根（即每次可取 1～5 根），谁拿到最后一根就是胜利者. 这个游戏称为"抢最后一根".

2. 把一些火柴分为几堆，最常见的是分为三堆，各堆的数目分别是 3、5、7. 两个人轮流拿，比赛规则是：① 每次只能在某一堆中拿，但数目不限；② 拿到最后一根者为胜.

3. 将火柴分成两堆. 开始时每堆的火柴数目是任意的，譬如说各是 m 与 n 根，游戏的规则是，每次移走火柴必须是下列三种移法之一：① 从第一堆中移走一些火柴；② 从第二堆中移走一些火柴；③ 从两堆中各移走同样数目的火柴. 谁取走最后一根火柴，谁获胜. 这种游戏称为威索夫(Wythoff)游戏.

这三种游戏中的前两种，在《数学古今纵横谈》（梁之舜、吴伟贤编著，科学普及出版社广州分社，1982 年 12 月）一书中收录；第三种是 1907 年数学家威索夫发明的.

火柴游戏问题的解决，关键在于找所谓的"胜利局势".

先来解第一种游戏. 因为每次最多只能拿 5 根，若现在只有 6 根火柴，则谁先拿谁就要失败. 这种谁先取谁就失败的局面称为"胜利局势". 竞赛者一定要想法制造出"胜利局势"，然后让对方去拿，则对方无论如何也是失败的. 不难知道，除了 6 是"胜利局势"外，12、18、…、$6k$、…都是"胜利局势". 如一开始只有 $6k$ 根火柴，则谁先拿谁就要输，因为若对方取 r 根，按规定 $0<r<6$，则余下的根数为 $6k-r=6(k-1)+6-r$；另一方只要取 $6-r$ 根，余下 $6(k-1)$ 根，这样下去，到最后剩下 6 根火柴，就回到上述最简单情形. 这样，我们证明了 $6k$ 是"胜利局势".

若开头不是"胜利局势"，而是有 $6k+r$ 根火柴，其中 $0<r<6$，则谁先拿谁就胜利，因为只要先取 r 根，使其回到 $6k$ 根这个"胜利局势"，就可稳操胜券.

现在因 $54=6\times9$，是"胜利局势"，所以谁先拿谁就输. 当然，

若与一个不懂得这个秘诀的人比赛，则先拿也有可能取胜，因为只要对方有一次取错而没有回到"胜利局势"，你就可立刻乘机创造"胜利局势"而取胜.

下面，我们来解第二种游戏. 仿上，我们先分析这种游戏中的"胜利局势".

(1) 若只剩下两堆，而且两堆的数目相等，则这是一个"胜利局势". 因为只要按对方拿多少根，你就在另一堆中也拿同样多根，这样一定能取得最后一根而获胜.

(2) (1,2,3)这个局势是"胜利局势"，因为无论对方如何取，你可以立刻把它化为两堆数目相同.

(3) (1,4,5)是"胜利局势"，因为无论对方如何取，你总可以把它化为上述两种"胜利局势".

(4) 进一步可得(2,4,6)是"胜利局势"，然后(3,4,7)，(2,5,7)，(3,5,6)都是"胜利局势".

(5) 开始的(3,5,7)不是"胜利局势"，故只要懂得秘诀，先拿者一定胜利. 因为先拿者第一次就可把它化为(3,4,7)或(3,5,6)或(2,5,7)等"胜利局势"而稳操胜券.

以上分析"胜利局势"的方法，存在内在的数学规律，这就是下面的判别法则：

把各堆的数目化为二进制数，然后把各数位上的数字分别相加，若都得到偶数，则这种局势必为"胜利局势"；否则，不是"胜利局势".

例如，局势(1,2,3)和(1,4,5)均为"胜利局势"，这是因为

$$\begin{array}{rl} & (1)_{10}=(0\ 0\ 1)_2 \\ & (2)_{10}=(0\ 1\ 0)_2 \\ +) & (3)_{10}=(0\ 1\ 1)_2 \\ \hline & \quad\quad 0,2,2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & (1)_{10}=(0\ 0\ 1)_2 \\ & (4)_{10}=(1\ 0\ 0)_2 \\ +) & (5)_{10}=(1\ 0\ 1)_2 \\ \hline & \quad\quad 2,0,2 \end{array}$$

但初始局势(3,5,7)不是"胜利局势"，因为

$$\begin{array}{rl} & (3)_{10}=(0\ 1\ 1)_2 \\ & (5)_{10}=(1\ 0\ 1)_2 \\ +) & (7)_{10}=(1\ 1\ 1)_2 \\ \hline & \quad\quad\quad 2,2,3 \end{array}$$

其中有一个数字是奇数.

注：上述判别法则不仅对三堆火柴游戏适合，对四堆、五堆、…火柴游戏也适合. 例如(2,3,6,7)是“胜利局势”，因为

$$\begin{array}{rl} & (2)_{10}=(0\ 1\ 0)_2 \\ & (3)_{10}=(0\ 1\ 1)_2 \\ & (6)_{10}=(1\ 1\ 0)_2 \\ +) & (7)_{10}=(1\ 1\ 1)_2 \\ \hline & \quad\quad\quad 2,4,2 \end{array}$$

熟练地掌握了判别法则后，我们就能在这类火柴游戏中取胜.

最后，我们来解第三种火柴游戏.

我们用数偶(a,b)表示在每次移走后两堆中余下的火柴根数，并用这种方法来记录游戏过程中的状态. 游戏开始状态为(m,n). 用代数方法表达这种游戏的规则就是，把(m,n)变为下列三种数偶之一：

$$\text{(i)}\ (m-t,n);\ \text{(ii)}\ (m,n-t);\ \text{(iii)}\ (m-t,n-t).$$

在所有情形中，均有$t\geqslant 1$，因为每次至少有一根火柴必须被取走. 谁取走最后一根火柴，谁就获胜.

我们定义数偶(a,b)对于玩者A来说是一个“胜利局势”，如果存在一个策略，使得不论B如何从(a,b)中取走多少，A总能在比赛中获胜(不一定在一次移动中取胜). 从最末一个“胜利局势”$(0,0)$开始，我们可以构造一张包含所有“胜利局势”的表，用这种办法可以证明任意一个数偶或者是“胜利局势”或者是“失败局势”. 然而，这种麻烦的手续是完全可以避免的. 威索夫给出了一个刻画所有“胜利局势”特征的公式. 他指出，“胜利局势”是由下列数

偶给出的：(0,0)和(a_n, b_n) $(n=1,2,3,\cdots)$，其中$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是对应于无理数$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$的比特数列，即：不妨设$a_n \geqslant b_n$，则$a_n=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$，$b_n=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$.

注：这一结论的证明，可详见《数学中的智巧》中译本 pp. 106～109.

参考文献　[13,pp. 14～17],[28,pp. 104～109].

（张恩华）

三角函数的加法定理（Sum theorem of trigonometric function）

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \qquad (S_{\alpha\pm\beta})$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta, \qquad (C_{\alpha\pm\beta})$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (T_{\alpha\pm\beta})$$

托勒密在他的《大汇编》中，利用已证得的引理（现称为托勒密定理），实际上已导出了公式$S_{\alpha\pm\beta}$（由图 3-2 可得$BD\cdot AC=AB\cdot CD+AD\cdot BC$，即

$$2R\sin(\alpha+\beta)\cdot 2R=2R\cos\beta\cdot 2R\sin\alpha+2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\beta,$$

也即$S_{\alpha+\beta}$. 同样由图 3-3 可导出$S_{\alpha-\beta}$)，并且还得到用$\sin\alpha$表示$\sin\frac{\alpha}{2}$、$\sin 2\alpha$等的公式.

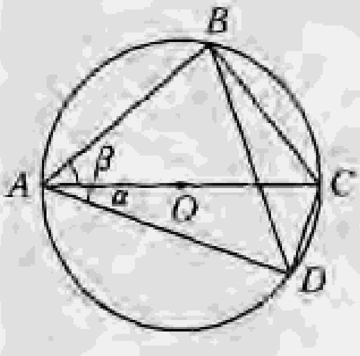


图 3-2

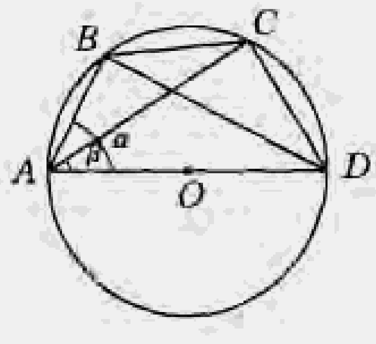


图 3-3

韦达补充引进了和差化积公式

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

与正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}},$$

以及用 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 表示 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 的公式，而三角函数的积化和差公式，在欧洲最早为 J. Werner（1468～1528）所使用，所以有时被称作 Werner 公式. 下面 $C_{\alpha-\beta}$ 的证法选自 П. М. Котельников 的学位论文.

如图 3-4，设 P、Q 各是角 α、β 的终边与单位圆的交点，其坐标各为 $x_P=\cos\alpha, y_P=\sin\alpha, x_Q=\cos\beta, y_Q=\sin\beta$. 于是有

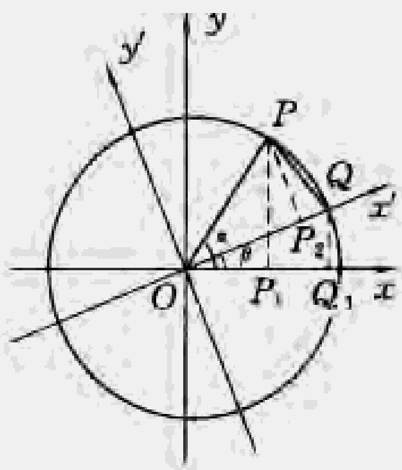


图 3-4

$$\begin{aligned}PQ^2 &= (x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2\\ &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\ &= 2(1-\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

把坐标轴旋转角 β，则有

$$x'_P=\cos(\alpha-\beta), y'_P=\sin(\alpha-\beta), x'_Q=1, y'_Q=0,$$

所以又有

$$\begin{aligned}PQ^2 &= (x'_P-x'_Q)^2+(y'_P-y'_Q)^2\\ &= [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\ &= 2[1-\cos(\alpha-\beta)].\end{aligned}$$

因此，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

用$-\beta$替换β,则可由$C_{\alpha-\beta}$得到$C_{\alpha+\beta}$;当用$\frac{\pi}{2}-\alpha$替换α,就可由$C_{\alpha\pm\beta}$得到$S_{\alpha\pm\beta}$,据同角三角函数关系式与$S_{\alpha\pm\beta}$、$C_{\alpha\pm\beta}$便可导出$T_{\alpha\pm\beta}$.

公式$C_{\alpha+\beta}$也可利用向量等知识来证明.

参考文献 [4,p.151,pp.168~169],[16,pp.138~139,pp.277~278],[23,pp.98~100].

(郑君文 张恩华)

二 方程与方程组

求问禾实 今有上禾三秉(捆),中禾二秉,下禾一秉,实(谷)三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三秉,实二十六斗.问上、中、下禾实一秉各几何?

本题为《九章算术》卷八"方程"的第1题.

设上、中、下禾每秉实分别为x、y、z,则本题即为求解三元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26,\end{cases}$$

得 上禾每秉$9\frac{1}{4}$斗,中禾每秉$4\frac{1}{4}$斗,下禾每秉$2\frac{3}{4}$斗.

在我国,古代解线性方程组的方法称为"方程术".方程术不仅以其完整的解法领先于世界,而且使得我国对负数概念的认识和正负数的运算也遥遥领先于世界,它也是我国高次方程(组)、不定方程得以发展的基础.

参考文献 [31,p.221].

(眭秋生)

肆中饮　肆中听得语吟吟，薄酒名醨厚酒醇.
好酒一瓶醉三客，薄酒三瓶醉一人.
共同饮了一十九，三十三客醉醺醺.
试问高明能算士，几多醨酒几多醇？

这是明代程大位所著《算法统宗》第十三卷中的一题.题目以诗歌形式出现.其中"醨酒"就是度数较低的"薄酒"，设为 x 瓶，"醇酒"就是度数较高的"厚酒"("好酒")，设为 y 瓶.则依题意有

$$\begin{cases} x + y = 19, \\ \dfrac{1}{3}x + 3y = 33. \end{cases}$$

解得醨酒为 9 瓶，醇酒为 10 瓶.

参考文献　[34,p.817].

（眭秋生）

三才运元　今有股弦较除弦和和与直积等.只云勾弦较除弦较和与勾同.问弦几何？

我国宋元时代已掌握四元高次方程组的解法，并称之为"四元术".本题为朱世杰著的《四元玉鉴》中的一题.

设以 a、b、c 代表勾、股、弦，则"股弦较"是弦与股的差 $c-b$，"弦和和"是弦 c 与勾股和的和 $c+(a+b)$，"直积"是勾股的乘积 ab，"勾弦较"是 $c-a$，"弦较和"是 $c+(b-a)$.于是本题即是解方程组

$$\begin{cases} (a+b+c) \div (c-b) = ab, \\ (-a+b+c) \div (c-a) = a, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

解得弦 $c = 5$.

参考文献　[36,p.334].

（眭秋生）

遥度圆城 问有圆城不知周径，四门中开.北外三里有乔木(A)，出南门(B)便折东行九里(C)，乃见木.欲知城周、径各几何？

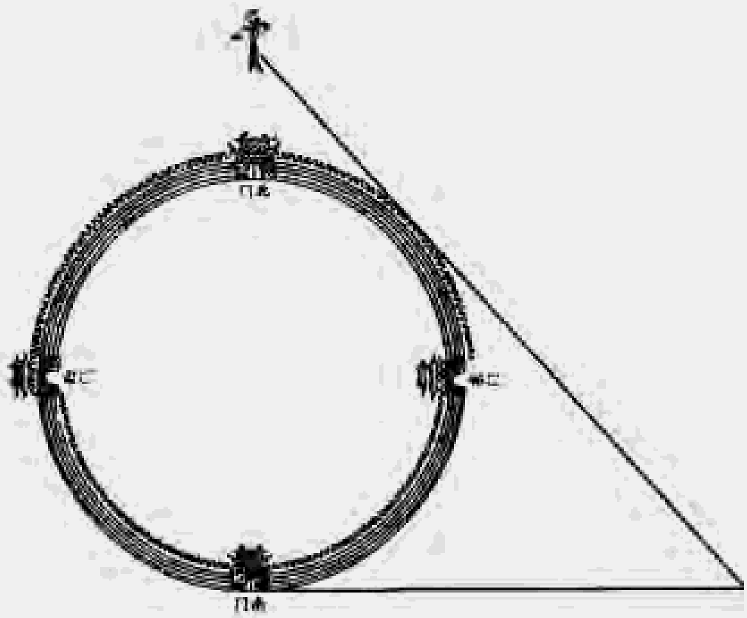


图 3-5 遥度圆城图

本题是南宋数学家秦九韶的著作《数书九章》测望类第八卷中的一题.

题意如图 3-6 所示，其中 AC 正好与圆城相切于 D 点.

若设圆城直径为 d，连结圆心 O 与切点 D，则可知

$$\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle ADO.$$

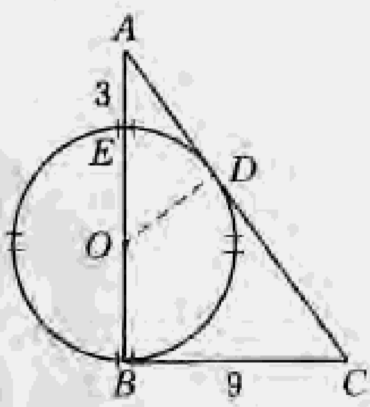


图 3-6

于是
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AO},$$

即
$$\frac{3+d}{\sqrt{\left(3+\dfrac{d}{2}\right)^2-\left(\dfrac{d}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{(3+d)^2+9^2}}{3+\dfrac{d}{2}},$$

得
$$d^4+6d^3+9d^2-972d-2\,916=0.$$

解方程即可求得圆城直径 $d=9$(里)，粗取 $\pi\approx 3$，则圆城周长为 27 里.

上述方程是高次方程.我国在《九章算术》里已论述解数字系数一元二次方程的一般方法(开方术)了.唐代已掌握一元三次方程的解法.到了宋元时代已掌握了一元高次方程的数值解法.特别是秦九韶在继承前人研究成果的基础上改进方法,整理提高,得出一元高次方程数值解法——"正负开方术".在本题的解法里,秦九韶是通过适当的变换,将求解方程变换成

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11\,664x^2-34\,992=0,$$

然后解之,从而来说明他已掌握了任意一元高次方程的数值解法.

在欧洲,法国的 P. Ruffini(1765~1822)、英国的霍纳也发现了高次方程的数值解法(常称"霍纳法").不过,比秦九韶要晚 500 多年.

参考文献 [35,p.183],[32,p.159].

(睦秋生)

圆城周径 假令有圆城一所,不知周径,四面开门.或问丙出南门直行一百三十五步而立,甲出东门直行一十六步见之,周径几何?

本题是我国金元时代数学家李冶(1192~1279)所著《测圆海镜》卷七的第 2 题.李冶在总结概括前人研究成果的基础上创立了"天元术":设立未知数建立方程("立天元一"),并应用高次方程的数值解法求出问题的解.《测圆海镜》是系统研究各种勾股形(直角三角形)的边与相关圆直径(勾股容圆)问题,其中"天元术"和高次方程数值解法也得到了全面地介绍.

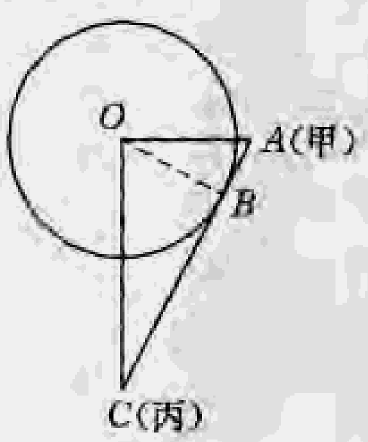


图 3-7

本题的题意如图 3-7 所示,AB 与圆 O 相切于 B 点,连结 OB.

$\because\ \mathrm{Rt}\triangle OAB \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAO,$

$\therefore\ \dfrac{OA}{CA}=\dfrac{OB}{CO},$

即 $OA\cdot CO=CA\cdot OB.$ ①

设半径 $OB=x$，则依题设条件有 $OA=x+16$，$OC=x+135$.

而 $AC^2=OA^2+OC^2$，将①式两端平方并分别代入，得

$$(x+16)^2(x+135)^2=[(x+16)^2+(x+135)^2]x^2,$$

整理得 $x^4-8\,640x^2-652\,320x-4\,665\,600=0$.

解方程得 $x=120$(步).

所以圆城的直径是 240 步，圆城的周长是 720 步(习惯粗取 $\pi=3$).

参考文献 [35,p.169],[33,p.446].

(睦秋生)

蜂群问题(Number of bees) 有一群蜜蜂，半数的平方根只蜜蜂飞进茉莉花丛，$\frac{8}{9}$留在家里，还有一只去寻找在荷花瓣里嗡嗡叫的一只雄蜂.问蜂群中有多少只蜜蜂?

本题选自 12 世纪印度数学家 Bhāskara 的小册子《天文学之王冠》.

设蜂群中有 $2x^2$ 只蜜蜂，由题意得方程:

$$2x^2=x+\frac{16}{9}x^2+2,$$

即 $2x^2-9x=18$. 解之，得

$$x=6,2x^2=72.$$

故蜂群中有 72 只蜜蜂.

参考文献 [39,p.76],[27,p.17,p.126],[29,pp.116～117].

(葛 军)

斐波那契问题(Fibonacci's problem) 一人对另一人说:"给我 7 个第纳里(古罗马银币名)，我将比你富 5 倍."另一个回答说:"给我 5 个第纳里，我将比你富 7 倍."问每人各有多少第纳里?

此题选自斐波那契的著作《算盘书》.斐波那契对科学的伟大功绩在于最早把代数和印度计数法介绍到欧洲.

设两人各有 x、y 个第纳里，则根据题意得方程组

$$\begin{cases} x+7=5(y-7), \\ y+5=7(x-5). \end{cases}$$

解之，得 $x=7\frac{2}{17}, y=9\frac{14}{17}$.

因此，第一人有 $7\frac{2}{17}$ 个第纳里，第二人有 $9\frac{14}{17}$ 个第纳里.

参考文献 [18,p. 274],[27,p. 34,pp. 166～167].

（葛 军）

卡丹问题(Cardan problem) 试将 10 分成两部分，而使两者之积等于 40.

本题出自意大利数学家卡丹的代数学著作《大法》.在 16 世纪，人们认为"负数的平方根"是没有意义的，尽管如此，卡丹在解本题时指出，如果把答案写成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 这两个怪模怪样的表达式，就可以满足要求了.后人对这两个表达式的进一步研究，导致了复数的产生和代数学的发展.

设一数为 x，则另一数为 $10-x$. 根据题意有

$$x(10-x)=40,$$

即 $x^2-10x+40=0$. 解之，得

$$x_1=5+\sqrt{15}\mathrm{i}, x_2=5-\sqrt{15}\mathrm{i} \quad (\mathrm{i}^2=-1).$$

参考文献 [14,pp. 135～138],[27,p. 35,pp. 170～171].

（葛 军）

解一个 45 次方程(Solve an equation of degree 45) 解方程

$$45x-3\,795x^3+95\,634x^5-\cdots\cdots+ \\ 945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=C.$$

求解该方程是比利时数学家 A. van Roomen(1561～1615)于 1593 年向欧洲数学家提出的问题. 为了解这个方程，当时法国国王亨利四世召见了韦达. 韦达来到后，就看出了这个方程相当于单位圆中给定一弧所对的弦，要求该弧的$\frac{1}{45}$所对的弦，也就是用 $\sin\alpha$ 去表示 $\sin 45\alpha$，并求出 $\sin\alpha$ 的值. 于是他运用三角学知识，很快就求出了一个根. 第二天他找到了该方程的全部 23 个正根，但他没有给出负根，因为那时人们认为正弦值为负是不合理的. 两年后，韦达在他的《回答》(*Responsum*，1595)一书中，给出了这个方程的解法.

因为 $45 = 3\times3\times5$，所以可先将这一弧 5 等分，然后把每一份接连作两次 3 等分，并使它们各与一个五次方程和两个三次方程相对应. 这样，上述方程的求解，就归结为先求出方程 $3y - y^3 = C$ 的根 y，再求出方程 $3t - t^3 = y$ 的根 t，最后解方程 $5x - 5x^3 + x^5 = t$，则可得出两根，即为原方程的根. 令 $C = 2\sin\varphi$，则有 $x = 2\sin\frac{\varphi}{45}$. 这里提出的两个三次方程和一个五次方程，是依据表示 $\sin 3\theta$ 和 $\sin 5\theta$ 的倍角公式而得到的.

由于上述求解过程中遇到了用 $\sin\theta$ 表示 $\sin n\theta$ 的问题，后来韦达又专门写了一篇论文《截角术》(*Ad angularium sectionum*)，讨论了倍角公式. 就应用而言，他已能给出当 n 为任意正整数时的倍角公式了.

参考文献 [6，pp. 151～152]，[16，p. 278].

（张恩华 郑君文）

遗产问题(The problem of distributing a legacy) 一位父亲临终时，让他的几个孩子按如下方式分配他的遗产：第一个儿子先分，分得 100 克朗以及剩下遗产的$\frac{1}{10}$；接着第二个儿子分，分得 200 克朗以及剩下遗产的$\frac{1}{10}$；然后第三个儿子分，分得 300 克朗以及

剩下遗产的$\frac{1}{10}$……最后发现这种分法好极了，因为所有儿子分得的遗产一样多．问这位父亲共有几个儿子，每个孩子分得多少遗产？

本题出自于欧拉的著作《代数基础》．

设每个儿子分得 x 克朗，遗产共 y 克朗．

第一个儿子分得　$x = 100 + \frac{y - 100}{10}$；

第二个儿子分得　$x = 200 + \frac{y - x - 200}{10}$，

第三个儿子分得　$x = 300 + \frac{y - 2x - 300}{10}$；

……

依次类推，老大与老二（老二与老三，…）的差额是

$$100 - \frac{x + 100}{10} = 0,$$

解之，得 $x = 900, y = 8\,100$．

故老人共有 8 100 克朗遗产，9 个儿子，每个儿子分得 900 克朗．

参考文献　[14，pp. 146～147]．

（蒿　军）

钟针的对调（Exchanging clock needles）　时钟上的时针和分针在什么位置时，它们可以互相对调，并仍能指示某一实际可能的时刻？

有一次著名物理学家爱因斯坦病了，他的朋友、传记作家莫希柯夫斯基给他出了上面的这个题目作消遣．

爱因斯坦画了一个草图，很快就解决了这个问题．



图 3－8

钟盘上共有 60 个刻度，分针运转的速度是时针的 12 倍.

设所求的钟针位置是在 x 点 y 分，此时分针在离 12 点有 y 个刻度的位置，时针在离 12 点有 z 个刻度的地方.

时针所指的时间，需分针从 12 点起转过 $60x+y$ 个刻度. 由于时针运转速度是分针的 $\frac{1}{12}$，所以时针转过的刻度是

$$z=\frac{60x+y}{12}.$$

把时针、分针对调以后，设时针所指时刻为 x_1 点 z 分，这时时针离 12 点有 y 个刻度，则

$$y=\frac{60x_1+z}{12}.$$

这样，就有

$$z=\frac{60x+y}{12},\quad y=\frac{60x_1+z}{12},$$

其中 x 和 x_1 是不大于 11 的正整数或 0.

由此可得 $12\times12=144$ 组解，但因 $x=0, x_1=0$ 与 $x=11$, $x_1=11$ 是同一组解，故满足要求的对调位置有 143 个. 如：$x=1$ 时，$x_1=1$，解出 $y=5\frac{5}{11}$，$z=5\frac{5}{11}$，说明 1 点 $5\frac{5}{11}$ 分，两针重合，可以对调；$x=2, x_1=3$ 时，解出 $y=15\frac{135}{143}$，$z=11\frac{47}{143}$，就是说 2 点$15\frac{135}{143}$分与 3 点 $11\frac{47}{143}$分时，两针可以对调.

参考文献 [29, pp. 102～105].

（葛　军）

三次代数方程的解法及卡丹求根公式（Solution of cubic algebraic equation and cardan's formula on roots） 研究三次代数方程解法的历史甚为悠久. 古代巴比伦人借助于由 n 的值求 n^3+n^2 的值的数表，解出了某些特殊的三次方程.

古希腊最著名的数学家阿基米德首次用图像方法解三次方程，而且从由评注家 Eutocius 保存下来的古代文献的片断中可以看到，阿基米德曾经讨论过三次方程具有正实根的条件.

630 年左右，我国隋唐王孝通的《缉古算经》中记载了 20 个涉及建造观象台、修筑堤坝、开挖沟渠等的体积容积问题，他用开带从立方法求解由这些问题归结成的三次方程. 因此，王孝通是世界上最早提出三次方程的代数解法的人.

波斯的数学家 Omar Khayyam（约 1044～约 1123）较系统地研究了三次方程的几何解法——用圆锥曲线的图像来解. 他的研究成果发表在 1079 年出版的《代数学》一书中. 他考虑了所有形式的三次方程，但系数只限于正数，并只考虑正根. 他将一、二、三次方程归结为 25 类，属于三次方程的 14 类，每一类都给出几何解法. Omar Khayyam 也曾探索过三次方程的算术（代数）解法，但没有成功.

意大利数学家斐波那契在其著作《繁花》(*Flos*)中给出了三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的一个根的近似值（用十进记数法表示）1.368 808 107 5，精确到九位数字，但他没有作出任何解释，所以人们至今不知他是如何求出这个根的.

印度数学家 Bhāskara 也曾考虑过三次方程.

总之，在 12 世纪以前，只能解一些特殊的三次方程，从解法上讲，比较成功的是几何解法. 直到 16 世纪，意大利的数学家们才用代数方法解出一般的三次方程，接着又解出四次方程.

关于意大利数学家求解三次方程的代数方法，有一个离奇而生动的故事.

大约在 1515 年，博洛尼亚大学数学教授 S. del Ferro（1465—1526）用代数方法成功地解出不含二次项的三次方程，但他只是将它秘传给他的学生 A. M. Fior. 后来，大约在 1535 年，N. Fontana（1499—1557），即塔尔塔利亚（Tartaglia，意为“口吃者”）宣称，他已经发现了不含一次项的三次方程的代数解法. Fior 不相信，并

向他挑战,要与他进行一场公开的竞赛:在规定的时间内,求解由两人事先提出的同样多的三次方程.塔尔塔利亚接受了挑战,在竞赛的前几天里,他发现了不含二次项的三次方程的代数解法.这样,在竞赛时,塔尔塔利亚能解两种类型的三次方程,而 Fior 却只能解一种类型的方程,塔尔塔利亚获胜.后来,曾在米兰讲授数学兼行医的卡丹,在宣誓保守秘密的情况下,从塔尔塔利亚那里骗取了三次方程代数解法的关键.1545 年,卡丹在德国纽伦堡出版了他的拉丁文代数学巨著《大衍术》(*Ars magna*),在其中公布了塔尔塔利亚的三次方程解法.

现在来介绍一般的三次方程的代数解法.

设有复系数三次方程 $y^3+ay^2+by+c=0$. 利用变量替换 $y=x-\frac{a}{3}$,则得不含二次项的三次方程

$$x^3+px+q=0. \tag{①}$$

由代数基本定理知,方程①有三个复数根.设 x_0 是其任一根.考察复系数二次方程

$$u^2-x_0u-\frac{p}{3}=0, \tag{②}$$

方程②有两个复数根 α 与 β. 由韦达定理,得

$$\alpha+\beta=x_0, \tag{③}$$

$$\alpha\beta=-\frac{p}{3}. \tag{④}$$

将③代人①得

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0,$$

或

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0.$$

注意到④,我们有

$$\alpha^3+\beta^3=-q. \tag{⑤}$$

又由④得
$$\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{⑥}$$

⑤与⑥表明，α^3 与 β^3 是复系数二次方程
$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \tag{⑦}$$
的根. 解⑦，得
$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$
从而得
$$\begin{aligned}\alpha&=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\\ \beta&=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.\end{aligned} \tag{⑧}$$
所以
$$\begin{aligned}x_0=\alpha+\beta=&\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\\ &+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.\end{aligned} \tag{⑨}$$

公式⑨通常称为卡丹公式.

考虑到历史的真实面貌，H. Eves 在其数学史著作 *Great Moments in Mathematics* 中称公式⑨为卡丹—塔尔塔利亚求根公式.

在意大利数学家发现了三次方程的代数解法以后，还有许多数学家研究三次方程的解法.

韦达提出了求解三次方程
$$x^3+3ax=2b \tag{⑩}$$

的一个巧妙方法，但直到他死后的 1615 年才发表.

设

$$x=\frac{a}{y}-y,$$

方程⑩变成

$$y^6+2by^3=a^3,$$

这是关于 y^3 的二次方程，因此可以求出 y^3，然后求出 y，最后求出 x.

1732 年，欧拉首次指出三次方程有三个根，并指出如何去求出它们.

参考文献 [36，p. 195]，[8，pp. 295～304]，[41，pp. 130～157].

（陈永林）

四次代数方程的费拉里解法与笛卡尔解法（Ferrari's and Descartes' methods for solving quartic equation） 设有复系数的四次方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \qquad ①$$

先把方程①写成

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d\right]=0. \qquad ②$$

再引进参数 t，将②变成

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}-b+t\right)x^2+\left(\frac{at}{2}-c\right)x+\frac{t^2}{4}-d\right]=0. \qquad ③$$

选取 t 的值使方括号中 x 的二次多项式是一个完全平方式. 为此，需使它的判别式等于零，即

$$\left(\frac{at}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+t\right)\left(\frac{t^2}{4}-d\right)=0,$$

整理得

$$t^3-bt^2+(ac-4d)t-a^2d+4bd-c^2=0. \quad ④$$

④是关于 t 的三次方程,用求解三次方程的方法可以解出 t. 设 t_0 是方程④的任一根,则当 t 取 t_0 时,方程③变成

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t_0}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\,x+\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)^2=0. \quad ⑤$$

方程⑤可分解为以下两个二次方程:

$$x^2+\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\right)x+\left(\frac{t_0}{2}+\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)=0, \quad ⑥$$

与

$$x^2+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\right)x+\left(\frac{t_0}{2}-\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)=0. \quad ⑦$$

解方程⑥与⑦,可以得到方程①的四个根.

以上就是费拉里的四次方程解法. 费拉里是卡丹的学生,这个解法被卡丹写进他于 1545 年出版的 *Ars magna* 一书中.

此后,笛卡尔于 1637 年提出了求解四次方程

$$x^4+bx^2+cx+d=0 \quad ⑧$$

的待定系数法. 设方程⑧的左端等于乘积

$$(x^2+kx+h)(x^2-kx+m),$$

令所得等式两端对应项的系数相等,则得关于 k,h,m 的三个等式. 从这三个等式消去 h 与 m,就得到关于 k^2 的三次方程. 于是,求解四次方程⑧化为求解这个三次方程.

参考文献 [8,pp.295～304],[41,pp.151～158].

(陈永林)

因式定理(Factor theorem) 多项式 $f(x)$ 有因式 $x-a$ 的充要条件是 $f(a)=0$.

笛卡儿在1637年发表了著作《方法论》,书中附有"折光"、"气象"和"几何"三个附录,本定理就是他在"几何"第三编中提出的.笛卡儿还利用这个定理和他提出的其他事实,建立了求多项式方程有理根的现代方法.

设 $f(a)=0$,则由余数定理(多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数等于 $f(a)$,余数定理又称为Bezout定理)知,$f(x)$ 除以 $x-a$ 的余数等于0,设商式为 $Q(x)$,则 $f(x)=(x-a)Q(x)$.因此 $f(x)$ 有因式 $x-a$.

反之,设 $f(x)$ 有因式 $x-a$,则 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数等于0,根据余数定理,有 $f(a)=0$.

根据因式定理,可以得到以下重要推论:

(1) 如果 $a\neq b$,多项式 $f(x)$ 在且只在 $f(a)=f(b)=0$ 时有因式 $(x-a)(x-b)$;

(2) 如果 $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$,则 $qx-p$ 必是多项式 $f(x)$ 的因式;

(3) $x=a$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根的充要条件是多项式 $f(x)$ 有因式 $x-a$.

参考文献 [40,pp.429～431],[16,p.316].

(张恩华 郑君文)

笛卡尔符号法则(Descartes' rule of sign) 多项式方程 $f(x)=0$ 的正根的最多个数等于系数变号的次数,而负根的最多个数等于两个正号与两个负号连续出现的次数.

这一符号法则是笛卡儿在"几何"里未加证明而陈述了的.在今日的教科书里,后一个法则的说法是:负根的最多个数等于

$f(-x)=0$ 里的系数变号的次数.

这法则被 18 世纪的好几个数学家所证明.

现今高等代数书上的笛卡儿符号法则是这样表述的：实系数多项式 $f(x)$ 的正根个数(k 重根按 k 个计算)或者等于这个多项式的系数组的变号数，或者比系数组的变号数少一个正偶数；负根个数(k 重根按 k 个计算)或者等于多项式 $f(-x)$ 的系数组的变号数，或者比这个变号数少一个正偶数.

证明中要用到下面的引理：

Ⅰ. 令 α 是一个正数，那么实系数多项式 $f(x)$ 的系数组的变号数比乘积 $(x-\alpha)f(x)$ 的系数组的变号数少一个正奇数；

Ⅱ. 设实系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_tx^{n-t}(a_0\neq 0,a_t\neq 0)$$

没有正根，那么 $f(x)$ 的首项系数 a_0 与末项系数 a_t 同号.

假定 $f(x)$ 一共有 k 个正根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，那么

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\phi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是一个没有正根的实系数多项式. 由引理Ⅱ，$\varphi(x)$ 的首项与末项系数同号，因此 $\varphi(x)$ 的系数组的变号数是一个偶数. 现在依次应用引理Ⅰ到多项式

$$\varphi(x),(x-\alpha_1)\varphi(x),(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\varphi(x),\cdots,f(x)$$

上就得到多项式 $f(x)$ 的系数组的变号数与 k 的差是一个偶数. 故对于正根个数的符号法则为真.

对于负根个数，显然也可得到有关法则成立.

参考文献 [8,pp. 316~318],[16,p. 315].

(张恩华)

斯图姆定理(Sturm theorem) 设实系数多项式 $f(x)$ 没有重根，并且实数 a 与 $b(a<b)$ 都不是 $f(x)$ 的根，那么，$f(x)$ 在 a 与 b

之间的实根个数等于 $f(x)$ 的斯图姆组在 $x=a$ 与 $x=b$ 时的变号数的差 $V(a)-V(b)$.

1829 年,法国数学家斯图姆得出了求实系数代数方程在已知区间上的实根个数的简单方法——斯图姆方法,而这方法的依据就是斯图姆定理.刘维尔说:"由于这一巨大的发现,斯图姆立即简化并且完整了代数的原理,用新的解法充实了它们."

注:关于斯图姆定理的证明可参阅张禾瑞、郝钢新编《高等代数》(高等教育出版社,1958 年 8 月版)下册 pp. 312~314.

参考文献 [8,pp. 310~316],[44,pp. 132~136].

(张恩华)

代数方程根与系数关系的韦达公式(Viète's Formula on Roots and coefficients of algebraic equation) 代数方程根与系数的关系问题,伴随着代数方程的求解问题而被注意.

卡丹在其 1545 年出版的《大衍术》(*Ars magna*)中发表过关于三次方程的根与系数间关系的结果:

设三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根为 α,β,γ,则

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,$$
$$\alpha\beta\gamma=-r.$$

现行中学教材中的韦达定理在韦达之前就已发现了.

韦达是 16 世纪法国的伟大数学家,他为代数学的符号化的发展作出了重大贡献.他在 1591 年完成,但直到 1615 年在巴黎出版的重要著作《方程的认识和订正》一书中发表了根与系数的关系:

设 n 次方程 $x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n=0$ 的 n 个正根为 x_1, $x_2,\cdots,x_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-p_1,$$

$$\sum_{i<j} x_i x_j = p_2,$$

……

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n p_n.$$

(又说这个结果是他在1595年发表的)这个结果中"根"的前面多了个"正"字.直到1629年,这个"正"字才由荷兰数学家Girard删掉,此时韦达已去世20多年了.

牛顿在《普遍的算术》中也叙述了根与系数的关系,但未给出证明.

现在通常所称的韦达定理如下:设复系数方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad ①$$

的 n 个根是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,则

$$a_k = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}, k = 1, 2, \cdots, n. \quad ②$$

参考文献 [37,pp.287~290],[8,p.250].

(陈永林)

柯西方程(Cauchy equation) 以下两个函数方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad ①$$

与

$$g(xy) = g(x) + g(y), \quad ②$$

称为柯西方程.

方程①在有理数范围内的解是

$$f(x) = f(1) \cdot x, \quad ③$$

并且,方程①在实数范围内的连续解也是③.

事实上，不难用归纳法证明：当 n 为自然数时，

$$f(nx)=nf(x). \quad ④$$

在①中令 $x=y=0$，则得 $f(0)=0$，从而有

$$f(-x)=-f(x),$$

进而可得

$$f(-nx)=-nf(x)\ (n\text{ 为自然数}). \quad ⑤$$

在④与⑤中令 $x=1$，得

$$f(n)=nf(1), f(-n)=-nf(1), \quad ⑥$$

其中 n 为自然数.

设 p 与 q 都是自然数，则由④、⑤、⑥得

$$pf(1)=f(p)=f\left(q\cdot\frac{p}{q}\right)=qf\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$-pf(1)=f(-p)=f\left(q\cdot-\frac{p}{q}\right)=qf\left(-\frac{p}{q}\right),$$

因此有

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f(1)\cdot\frac{p}{q}, f\left(-\frac{p}{q}\right)=f(1)\cdot\left(-\frac{p}{q}\right).$$

这就证明了方程①在有理数范围内的解是③.

另外，若 $f(x)$ 是连续的，则因任一实数可用一有理数列逼近，故通过极限过程可知，①在实数范围内的连续解也是③.

方程②在正实数范围内的连续解是

$$g(x)=C\ln x\ (C\text{ 为常数}). \quad ⑦$$

实际上，若令

$$f(x)=g(e^x)\ (e\text{ 为自然对数的底}),$$

则由②得

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

当 $g(x)$ 连续时，$f(x)$ 是连续的. 由关于方程①的结论知

$$g(e^x)=Cx \ (C\ \text{为常数}),$$

经变量替换即得

$$g(x)=C\ln x.$$

柯西方程①与②的意义在于用函数方程来定义初等函数 Cx 与 $C\ln x$.

（陈永林）

三 不等式

（一）一般不等式

算术平均值-几何平均值不等式（Arithmetic-mean-Geometric-mean inequality） 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，它们的算术平均值 $A_n(a)$ 定义为

$$A_n(a)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

它们的几何平均值 $G_n(a)$ 定义为

$$G_n(a)=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

则

$$A_n(a)\geqslant G_n(a), \qquad ①$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

最早使用两个正实数的算术平均值、几何平均值概念的大概是毕达哥拉斯，他似乎已经知道不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad (a,b>0),$$

但是其证明是由欧几里得给出的.

1897 年,柯西第一个给出了 AG 不等式①的证明.他在证明中首先使用了向前向后归纳法(也称倒推归纳法、反归纳法).此后,许多数学家基于不同的数学原理给出了 AG 不等式①的多种证法.许多证法可以在哈代,利特尔伍德与波利亚,Beckenbach 与 Bellman, Mitrinović与 Vasić等关于不等式的专著中找到.下面介绍的是柯西的证法.

对于两个正数 a_1,a_2,我们有

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant (a_1a_2)^{\frac{1}{2}},$$

当且仅当 $a_1=a_2$ 时等号成立.

用 $\frac{a_1+a_2}{2}$ 代替 a_1,$\frac{a_3+a_4}{2}$ 代替 a_2,则得

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} &\geqslant \left[\frac{(a_1+a_2)}{2}\cdot\frac{(a_3+a_4)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\geqslant \left[(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}(a_3a_4)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= (a_1a_2a_3a_4)^{\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

当且仅当 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 时等号成立.

重复上述论证 m 次,我们有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^m}}{2^m} \geqslant (a_1a_2\cdots a_{2^m})^{\frac{1}{2^m}}, \tag{②}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^m}$ 时等号成立.

今设正整数 m 满足 $2^m>n$. 取

$$b_i=a_i(i=1,\cdots,n),$$

$$b_{n+1}=\cdots=b_{2^m}=A_n(a),$$

并将不等式②用于 $b_1,\cdots,b_{2^m}$，则得

$$a_1a_2\cdots a_n(A_n(a))^{2^m-n}\leqslant\left[\frac{nA_n(a)+(2^m-n)A_n(a)}{2^m}\right]^{2^m}$$
$$=(A_n(a))^{2^m},$$

化简之即得①.

AG 不等式①有其重要的极值意义. 实际上，早在 1729 年，马克劳林就以几何语言叙述道："若将线段 *AB* 分成任意多个部分 *AC*，*CD*，*DE*，*EB*，则所有这些部分之积当这些部分均相等时达到极大."

AG 不等式有加权的形式. 若 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个正数(权)，则

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\geqslant(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}.\qquad ③$$

若引进新的权数

$$q_i=\frac{p_i}{p_1+p_2+\cdots+p_n},i=1,2,\cdots,n,$$

则加权 *AG* 不等式③变为

$$q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n\geqslant a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n},\qquad ④$$

式中 $q_1,\cdots,q_n$ 为正数，且 $q_1+\cdots+q_n=1$.

当 $p_i=1$ 或 $q_i=\frac{1}{n}$ 时，③或④均变为①. 反之，从①出发，通过一个极限过程，可以获得③与④. 所以，许多不等式命题尽管是就加权平均值立论的，但其证明则只要考虑通常的平均值也就够了. 自然，就实用性而言，加权形式的 *AG* 不等式③或④在使用时较为方便灵活些.

AG 不等式是最重要最基本的不等式之一，它在初等数学与高等数学中有非常广泛的应用.

参考文献 [42,pp.16～19],[38,pp.131～134].

（陈永林）

柯西不等式(Cauchy inequality) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组实数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),\qquad ①$$

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时等式成立.

柯西不等式①也称柯西-Schwarz 不等式,或柯西-Schwarz-Buniakowski 不等式.这个不等式首次出现在柯西于1821年出版的著作《代数分析》(*Analyse algebrique*)里.柯西不等式有多种证法,下面是常见的一种.

考虑关于 x 的二次多项式(可设 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0$):

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)^2\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2.\end{aligned}\qquad ②$$

由于恒有 $f(x)\geqslant 0$,故其判别式 $\Delta\leqslant 0$;当且仅当 $\Delta=0$ 时 $f(x)=0$ 有等根.由此可得①以及①取等号时的条件.

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组复数,则不等式①写成

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right),\qquad ③$$

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时等式成立.

柯西不等式有不少推广.例如,Wagner 不等式:若 $0\leqslant x\leqslant 1$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+x\sum_{i\neq j}a_ib_j\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2x\sum_{i<j}a_ia_j\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\right);$$

Callebaut 在 1965 年证明：若 a_i, b_i 均是正数，$1 \leqslant z \leqslant y \leqslant 2$ 或 $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^y b_i^{2-y}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-y} b_i^y\right)$$
$$\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^z b_i^{2-z}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-z} b_i^z\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2;$$

Mclaughlin 在 1966 年证明：若 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n}$ 是实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\right)^2$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} (a_{2i} b_{2i-1} - a_{2i-1} b_{2i})\right)^2.$$

柯西不等式的积分形式是：设 f 与 g 是在 $[a,b]$ 上的实可积函数，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\right), \qquad ④$$

当且仅当 f 与 g 是线性相关函数时等式成立.

不等式④称为 Schwarz 不等式或 Buniakowski-Schwarz 不等式. 实际上，不等式④似乎由 Buniakowski 给出在先(1859)，由 Schwarz 给出在后(1885).

柯西不等式是最重要、最基本的不等式之一，它在初等数学与高等数学中的应用非常广泛.

参考文献　[38,pp. 40～41,pp. 54～56].

（陈永林）

Wagner 不等式　见柯西不等式.

契比雪夫不等式(Tchebycheff inequality) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两组实数,且

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n \text{ 与 } b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

或

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n \text{ 与 } b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n,$$

则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i, \qquad ①$$

当且仅当 a_i 相等或 b_i 相等时等式成立.

契比雪夫不等式的积分形式是:设 f 与 g 是$[a,b]$上的实可积函数,且同为递增的或同为递减的,则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\\ \geqslant&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad ②\end{aligned}$$

契比雪夫不等式①首次出现的年代不详,可能是不等式②出现较早,因为 1918 年 Fujiwara 对之作了推广.

现在介绍契比雪夫不等式的一个证法.因为

$$\begin{aligned}&n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\\ =&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i-a_ib_j)\\ =&\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_jb_j-a_jb_i)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j-a_ib_j-a_jb_i)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以可得①，且可得等式成立的充分必要条件.

契比雪夫不等式可以推广到两组以上数的情形.若

$$0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n,$$
$$0\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$0\leqslant l_1\leqslant\cdots\leqslant l_n,$$

则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}l_i}{n}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\cdots l_i}{n}.$$

契比雪夫不等式在不等式、积分论与逼近论中有重要应用.

参考文献 [43,pp.47～53].

（陈永林）

排序不等式(**An inequality concerning rearrangements**) 设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_{i_k}\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_jb_j,\qquad ①$$

当且仅当 a_i 相等或 b_i 相等时等式成立.

一般地，若两组实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 对 $1,2,\cdots,n$ 的某个排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 有

$$x_{k_1}\leqslant x_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant x_{k_n} \text{ 与 } y_{k_1}\leqslant y_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant y_{k_n},$$

则称这两组实数 x_i 与 y_i 是同序的，而若

$$x_{k_1}\leqslant x_{k_2}\leqslant\cdots\leqslant x_{k_n} \text{ 与 } y_{k_1}\geqslant y_{k_2}\geqslant\cdots\geqslant y_{k_n},$$

则称这两组实数 x_i 与 y_i 是反序的.若两组实数既不是同序的也不

是反序的，则称它们是乱序的.用同序、反序与乱序的术语，排序不等式①可以简单地写成

$$\text{反序积和} \leqslant \text{乱序积和} \leqslant \text{同序积和}. \quad ②$$

为了证明不等式①，我们将 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n}$ 改记为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 考虑积和

$$S = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n. \quad ③$$

若所有的 a_i 相等或所有的 b_i 相等，则显然③式中的积和都相等. 今设 $a_r > a_s$，并考虑两个积和

$$S_1 = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_rc_r + \cdots + a_sc_s + \cdots + a_nc_n$$

与

$$S_2 = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_rc_s + \cdots + a_sc_r + \cdots + a_nc_n,$$

S_1 与 S_2 不同的仅是 c_s 与 c_r 调换了位置. 因为

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= a_rc_s + a_sc_r - a_rc_r - a_sc_s \\ &= (a_r - a_s)(c_s - c_r), \end{aligned}$$

所以，若 $c_r < c_s$，则 $S_2 > S_1$；若 $c_r > c_s$，则 $S_2 < S_1$. 这就是说，a_s，a_r 与 c_s, c_r 同序时的积和大，反序时的积和小. 现在对任一对 s, r 调整 c_s, c_r 在积和中的位置，则可知当两组数 a_i 与 b_i 同序时的积和最大，反序时的积和最小. 这就证明了不等式①.

排序不等式①在不等式的证明中很有用，例如，可用它来证明算术平均值-几何平均值不等式、柯西不等式、契比雪夫不等式等. 在经济生活中，工件加工的安排、生产过程的调度以达到工时最少、效益最大、能耗最少等涉及排序的问题，有时可用排序不等式来解决.

参考文献 [42, pp. 260～265].

（陈永林）

Gram 不等式(Gram inequality) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实的或复

的内积空间的向量，则称矩阵

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}(x_1,x_1) & \cdots & (x_1,x_n)\\ \vdots & & \vdots\\ (x_n,x_1) & \cdots & (x_n,x_n)\end{pmatrix}$$

为向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 Gram 矩阵，它的行列式

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\det G(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

称为向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 Gram 行列式. 我们有

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0, \qquad ①$$

当且仅当向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性相关时等式成立. 不等式①称为 Gram 不等式.

若 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$D(a,b)=\det\begin{pmatrix}(a,a) & (a,b)\\ (b,a) & (b,b)\end{pmatrix}\geqslant 0, \qquad ②$$

当且仅当 a 与 b 线性相关，即 a_i 与 b_i 成比例时等式成立. 不等式②即柯西不等式.

Gram 不等式还有积分的形式.

从历史上看，大概积分形式的 Gram 不等式出现较早，例如，C. Andreief 在 1883 年就著文论及它.

Gram 不等式在高等代数、积分论、不等式论中都有应用.

参考文献 [46，pp. 59～63]，[45，pp. 59～61，p. 88].

（陈永林）

Young 不等式（Young inequality） 设 $a,b\geqslant 0,p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\geqslant ab. \qquad ①$$

这个不等式，实际上是非负数 a,b 的加权形式的算术平均值—几何平均值不等式. 它可以写成

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}\geqslant ab,$$

从而可看出

$$\frac{1}{p}a^p=\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x,\ \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}=\int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}x,$$

而 $f(x)=x^{p-1}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{p-1}}$，故可推广为积分形式的 Young 不等式：设 f 是在 $[0,c]$ $(c>0)$ 上的实值连续且严格递增函数，若 $f(0)=0$，$a\in[0,c]$ 且 $b\in[0,f(c)]$，则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x\geqslant ab, \qquad ②$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数，当且仅当 $b=f(a)$ 时②取等号.

不等式②是 W. H. Young 在 1912 年证明的. 令

$$g(a)=ab-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x. \qquad ③$$

由于 $g'(a)=b-f(a)$ 且 f 严格递增，因此有

$$g'(a)\begin{cases}>0, \text{当 } 0<a<f^{-1}(b) \text{ 时},\\ =0, \text{当 } a=f^{-1}(b) \text{ 时},\\ <0, \text{当 } a>f^{-1}(b) \text{ 时}.\end{cases}$$

故当 $a=f^{-1}(b)$ 时，$g(a)$ 取到 g 的最大值，即有

$$g(a)\leqslant \max g(x)=g(f^{-1}(b)). \qquad ④$$

分部积分，得

$$g(f^{-1}(b))=bf^{-1}(b)-\int_0^{f^{-1}(b)}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{f^{-1}(b)}xf'(x)\mathrm{d}x.$$

作代换 $y=f(x)$，则上面的积分变为

$$g(f^{-1}(b))=\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y, \tag{⑤}$$

将③与⑤代入④即得②.

Young 不等式①在积分论中有重要应用，并可用它来证明赫尔德不等式.

参考文献 [43,pp.63～66,pp.38～39].

（陈永林）

赫尔德不等式（Hölder inequality） 若 $a_i\geqslant 0, b_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，且 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\geqslant\sum_{i=1}^n a_ib_i, \tag{①}$$

当且仅当存在非负常数 α 与 β，使 $\alpha^2+\beta^2>0$ 且 $\alpha a_i^p=\beta b_i^q(i=1,2,\cdots,n)$ 时等式成立.

不等式①是赫尔德于 1889 年获得的.

若 $\sum\limits_{i=1}^n a_i^p=0$ 或 $\sum\limits_{i=1}^n b_i^q=0$，则①中取等号.

今假定 $\sum\limits_{i=1}^n a_i^p>0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n b_i^q>0$. 在 Young 不等式

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\geqslant ab \tag{②}$$

中令

$$a=\frac{a_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, b=\frac{b_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}, \tag{③}$$

得

$$\frac{1}{p}\frac{a_j^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_j^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q}\geqslant\frac{a_jb_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

将这些不等式从 $j=1$ 到 $j=n$ 相加，得

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

由于 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，这个不等式等价于①.

因为当且仅当 $a^p=b^q$ 时②取等号，因此据③推出，为使①取等号，必要且只要对 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}=\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q},$$

即 $\alpha a_i^p=\beta b_i^q$. 这样就证明了①.

对于 $0<p<1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的情形，①中的不等号反向. 即：若 $a_i>0,b_i>0(i=1,2,\cdots,n),\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，其中 $0<p<1$ 或 $0<q<1$，则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\sum_{i=1}^n a_ib_i,\tag{4}$$

当且仅当存在非负常数 α 与 β，使 $\alpha^2+\beta^2>0$ 且 $\alpha a_i^p=\beta b_i^q(i=1,2,\cdots,n)$ 时等式成立.

事实上，若假定 $0<q<1$，则 $p<0$. 令 $Q=\frac{1}{q},P=-\frac{p}{q}$，则 $Q>1$ 且 $\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=1$. 因此，据①有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} B_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} A_i B_i, \qquad ⑤$$

其中 $A_i > 0, B_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$. 在⑤中令 $A_i = a_i^{-q}$ 与 $B_i = a_i^q b_i^q$, 得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{-\frac{q}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{q} \geqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^q,$$

两边取 q 次方根，即得④.

不等式④通常也称为赫尔德不等式.

显然，柯西不等式是 $p = 2$ 时的赫尔德不等式①.

赫尔德不等式有各种拓广. 较为常用的一种拓广是：若 $a_{ij} (i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m)$ 是正数，且正数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 满足 $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_m} \geqslant 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1}^{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_2}^{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_m}^{\alpha_m}\right)^{\frac{1}{\alpha_m}}. \qquad ⑥$$

不等式⑥是由 J. L. W. V. Jensen 在 1906 年给出的.

参考文献 [43, pp. 66~71], [42, p. 29].

（陈永林）

闵科夫斯基不等式(Minkowski inequality) 若 $a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0$ $(i = 1,2,\cdots,n), p > 1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad ①$$

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时等式成立.

不等式①是闵科夫斯基于 1896 年获得的.

D. E. Daykin 与 C. I. Eliezer 于 1968 年证明了更一般的结果：

若 $a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,n)$, 且 $p > 1$, 则不等式①成立，并且

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{p}}\right)^p + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{p}}\right)^p \leqslant \left(\sum (a_i + b_i)^{\frac{1}{p}}\right)^p. \quad ②$$

对于 $0 < p < 1$, ①与②中的不等号反向.

若 $a_i > 0, b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, $p < 0$, 则①中不等号反向.

在每一种情形下,等号成立的充分必要条件都是 a_i 与 b_i 成比例.

有时也将不等式①以及 $p < 0$ (这时设 $a_i > 0, b_i > 0$) 与 $0 < p < 1$ 时①的反向不等式,都称为闵科夫斯基不等式.

现在介绍不等式①的证明. 将恒等式

$$(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$$

对于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 相加,得到

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}. \quad ③$$

据赫尔德不等式,对于 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

注意到 $q(p-1) = p$, 两式相加,得

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

两边同除以 $\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ 即得①.

对于 $0 < p < 1$ 的情形,可用 $0 < p < 1$ 时的赫尔德不等式导

出闵科夫斯基不等式.

闵科夫斯基不等式的一个推广是:

若 $a_{ij} \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m)$,且 $p>1$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad ④$$

对于 $0<p<1$ 或 $p<0$(此时设 $a_{ij}>0$),不等式④反向成立.

在每一种情形下,等号成立的充分必要条件都是 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ 成比例.

闵科夫斯基不等式在不等式论、泛函分析等学科中有重要应用.

参考文献 [43,pp. 72~75],[45,pp. 19~21].

(陈永林)

Aczél 不等式(Aczél inequality) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是两组实数,且有

$$b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0 \text{ 或 } a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0,$$

则

$$\begin{aligned}&(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2)\\ \leqslant&(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^2,\end{aligned} \quad ①$$

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时等式成立.

不等式①是由 J. Aczél 于 1956 年得到的.

为了证明①,我们首先假定 a_i 与 b_i 不成比例且 $b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0$,这时有

$$\begin{aligned}f(x)&=(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2)x^2-2(a_1b_1-a_2b_2-\cdots\\&\quad -a_nb_n)x+(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)\\&=(b_1x-a_1)^2-(b_2x-a_2)^2-\cdots-(b_nx-a_n)^2.\end{aligned}$$

其次,据上述假定,有 $b_1 \neq 0$,且因 a_i 与 b_i 不成比例,故

$$f\left(\frac{a_1}{b_1}\right)=-\left(b_2\frac{a_1}{b_1}-a_2\right)^2-\cdots-\left(b_n\frac{a_1}{b_1}-a_n\right)^2<0.$$

因为当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$ 有两个零点，它们分别属于区间 $\left(-\infty,\frac{a_1}{b_1}\right)$ 与 $\left(\frac{a_1}{b_1},+\infty\right)$. 因此，$f(x)$ 的判别式为正.

当 a_i 与 b_i 成比例时，①显然成为等式.

根据对称性，当用 $a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0$ 代替条件 $b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2>0$ 时，证明是相同的.

T. Popoviciu 于 1959 年给出了不等式①的下述推广：

若 $a_i\geqslant 0, b_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，且对某个 $p\geqslant 1$ 有

$$a_1^p-a_2^p-\cdots-a_n^p>0 \text{ 或 } b_1^p-b_2^p-\cdots-b_n^p>0, \qquad ②$$

则

$$(a_1^p-a_2^p-\cdots-a_n^p)(b_1^p-b_2^p-\cdots-b_n^p)$$
$$\leqslant(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^p. \qquad ③$$

不等式③称为 Popoviciu 不等式.

R. Bellman 于 1956 年证明了：

若 $a_i\geqslant 0, b_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 且满足条件②，则对于 $p>1$ 有

$$(a_1^p-a_2^p-\cdots-a_n^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p-b_2^p-\cdots-b_n^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant[(a_1+b_1)^p-(a_2+b_2)^p-\cdots-(a_n+b_n)^p]^{\frac{1}{p}}. \qquad ④$$

不等式④称为 Bellman 不等式.

参考文献 [43, pp. 76～78].

（陈永林）

Schweitzer 不等式(Schweitzer inequality) 设 $0<m\leqslant a_i\leqslant M$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm},\qquad ①$$

等式成立的充分必要条件是 k 个 a_i 等于 m，且其余 $n-k$ 个 a_i 等于 M，这里的 k 由下式确定：

$$k=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}\text{ 或 }\dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,}\\ \dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时.}\end{cases}$$

不等式①可以写成：

设 $0<m\leqslant a_i\leqslant M, i=1,2,\cdots,n$，则当 n 为偶数时有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leqslant n^2+\frac{n^2}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}-\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2;\qquad ②$$

当 n 为奇数时有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\leqslant n^2+\frac{n^2-1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}-\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2.\qquad ③$$

不等式①是由 P. Schweitzer 于 1914 年证明的. 他同时证明了积分形式的不等式：

若 $f(x)$ 与 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 可积，且在 $[a,b]$ 上有 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2.\qquad ④$$

下面介绍不等式①的证明. 令 $u=a_1+\cdots+a_{n-1}, v=\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}$，$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是固定的，a_n 是变动的，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=uv+1+a_nv+\frac{u}{a_n}$$

是 a_n 的函数.

考虑函数 $f(x)=vx+\frac{u}{x}$,则 $f^2(x)=\left(vx-\frac{u}{x}\right)^2+4uv.$

因此,当 $vx=\frac{u}{x}$,即 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}$ 时,$f(x)$取极小值. 容易证明 $m\leqslant\sqrt{\frac{u}{v}}\leqslant M$. 于是可证明:

当 $x\in\left[m,\sqrt{\frac{u}{v}}\right]$时,$vm+\frac{u}{m}-\left(vx+\frac{u}{x}\right)\geqslant 0$;

当 $x\in\left[\sqrt{\frac{u}{v}},M\right]$时,$vM+\frac{u}{M}-\left(vx+\frac{u}{x}\right)\geqslant 0$.

这表明,在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$固定的情况下,乘积 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$ 仅当 $a_n=m$ 或 $a_n=M$ 时才能达到最大值. 现在让各个 a_i 都变动,则可知乘积 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$ 仅当某些 a_i 等于 m,而其余的 a_i 等于 M 时才能达最大.

设有 k 个 a_i 等于 m,$n-k$ 个 a_i 等于 M,则

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)&=[km+(n-k)M]\left(\frac{k}{m}+\frac{n-k}{M}\right)\\&=n^2+k(n-k)\left(\sqrt{\frac{M}{m}}-\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2.\end{aligned}\qquad ⑤$$

因为 $k(n-k)\leqslant\frac{n^2}{4}$,且此式成为等式当且仅当 $k=n-k$;当 n 为偶数时,$k=\frac{n}{2}$,而当 n 为奇数时,易证 $k(n-k)\leqslant\frac{n^2-1}{4}$ 且等号

成立当且仅当 $k=\frac{n+1}{2}$ 或 $\frac{n-1}{2}$. 这样就证明了②与③，亦即证明了①.

用不等式①与定积分的定义，可以证明④. 事实上，若令 $h=\frac{b-a}{n}$, $x_0=a$, $x_i=x_0+ih$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $0<m\leqslant f(x_i)\leqslant M$，且据①得

$$\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i)}h\right]\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2.$$

让 $n\to\infty$，即得④.

参考文献 [43,pp.79～81].

（陈永林）

Diaz-Metcalf 不等式（Diaz-Metcalf inequality） 设 $i=1,2,\cdots,n$, b_i、$a_i\neq 0$ 是实数，且 $m\leqslant\frac{b_i}{a_i}\leqslant M$，则

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2+mM\sum_{i=1}^{n} a_i^2\leqslant(m+M)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i, \qquad ①$$

当且仅当对每个 i，或者 $b_i=ma_i$ 或者 $b_i=Ma_i$ 时等式成立.

不等式①是由 J. B. Diaz 与 F. T. Metcalf 在 1963 年给出的，其证明是初等的：因为

$$\left(\frac{b_i}{a_i}-m\right)\left(M-\frac{b_i}{a_i}\right)a_i^2\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n,$$

求和得

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-ma_i)(Ma_i-b_i)\geqslant 0, \qquad ②$$

即

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[b_i^2-(m+M)a_ib_i+mMa_i^2\right]\geqslant 0,$$

由此可得①. 为使①中等式成立,当且仅当②中每一项 $(b_i - ma_i)(Ma_i - b_i)$ 等于零,此即 $b_i = ma_i$ 或 $b_i = Ma_i$.

1964 年,J. B. Diaz, A. J. Goldman 与 F. T. Metcalf 证明的不等式①与 B. C. Rennie 在 1963 年获得的如下不等式是等价的:

设 $i = 1,2,\cdots,n, a_i \neq 0$ 是实数, p_i 是正数,且 $0 < m \leqslant a_i \leqslant M, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i + mM \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{a_i} \leqslant m + M. \qquad ③$$

Diaz 与 Metcalf 同时还证明了:

设 $a_i \neq 0, b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是复数,且对于 $i = 1,2,\cdots,n$ 有

$$m \leqslant \mathrm{Re}\,\frac{b_i}{a_i} + \mathrm{Im}\,\frac{b_i}{a_i} \leqslant M,$$

$$m \leqslant \mathrm{Re}\,\frac{b_i}{a_i} - \mathrm{Im}\,\frac{b_i}{a_i} \leqslant M,$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 + mM \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leqslant (m + M)\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}. \qquad ④$$

不等式①包含了波利亚-舍贵不等式与 Kantorovich 不等式.

参考文献 [43,pp. 81~88].

(陈永林)

波利亚-舍贵不等式(Pólya-Szegö inequality) 设 $0 < m_1 \leqslant a_i \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_i \leqslant M_2, i = 1,2,\cdots,n$, 则

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2} \leqslant \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right]^2, \qquad ①$$

当且仅当对每个 i，或有 $m_2a_i=M_1b_i$，或有 $m_1b_i=M_2a_i$.

不等式①是由波利亚与舍贵于 1925 年得到的.

不等式①可由 Diaz-Metcalf 不等式推出. 事实上，从关于 a_i、b_i 的假设可得 $\frac{m_2}{M_1}\leqslant\frac{b_i}{a_i}\leqslant\frac{M_2}{m_1}$，在 Diaz-Metcalf 不等式中令 $m=\frac{m_2}{M_1}$，$M=\frac{M_2}{m_1}$，则得

$$\sum_{i=1}^{n}b_i^2+\frac{m_2}{M_1}\frac{M_2}{m_1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\left(\frac{M_2}{m_1}+\frac{m_2}{M_1}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i. \qquad ②$$

将②与

$$0\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{m_2}{M_1}\frac{M_2}{m_1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

相加，得到

$$0\leqslant\left(\frac{M_2}{m_1}+\frac{m_2}{M_1}\right)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-2\left(\frac{m_2}{M_1}\frac{M_2}{m_1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}\leqslant\frac{1}{4}\cdot\frac{M_1m_1}{M_2m_2}\left(\frac{M_1M_2+m_1m_2}{M_1m_1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)^2.$$

参考文献 [43, pp. 79～82].

（陈永林）

Kantorovich 不等式（Kantorovich inequality） 设 $0<m\leqslant\lambda_i\leqslant M(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}u_i^2\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)^2, \qquad ①$$

当且仅当对每个 i，或有 $\lambda_i = m$ 或有 $\lambda_i = M$ 时等式成立.

不等式①是由 L. B. Kantorovich 于 1948 年得到的，他还指出不等式①是波利亚-舍贵不等式的特例.

参考文献 [43, pp. 79~82].

（陈永林）

Greub-Rheinboldt 不等式(Greub-Rheinboldt inequality) 设 $0 < m_1 \leqslant a_i \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_i \leqslant M_2, i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 u_i^2\right) \leqslant \frac{(M_1 M_2 + m_1 m_2)^2}{4 M_1 M_2 m_1 m_2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i u_i^2\right)^2. \quad ①$$

不等式①是由 W. Greub 与 W. Rheinboldt 于 1959 年给出的.

由假设知 $m = \frac{m_1}{M_2} \leqslant \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{M_1}{m_2} = M$. 在 Kantorovich 不等式中，将 λ_i 换成 $\frac{a_i}{b_i}$，将 u_i 换成 $\sqrt{a_i b_i} u_i$，则 Kantorovich 不等式变为这里的不等式①.

参考文献 [43, pp. 79~81].

（陈永林）

Ostrowski 不等式(Ostrowski inequality) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是两组不成比例的实数，并设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1, \quad ①$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2}, \quad ②$$

当且仅当

$$x_k=\frac{b_k\sum_{i=1}^{n}a_i^2-a_k\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2},k=1,2,\cdots,n \quad ③$$

时等式成立.

不等式②是由 A. Ostrowski 于 1951 年给出的，但他没有叙述使等式成立的条件.

令
$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,B=\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$
$$C=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,y_i=\frac{Ab_i-Ca_i}{AB-C^2}. \quad ④$$

不难验证 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足①. 而对于适合①的任意实数 x_1，$x_2,\cdots,x_n$，必有

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\frac{A}{AB-C^2},$$

特别地有
$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\frac{A}{AB-C^2}.$$

于是，
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_i^2&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

从而推出

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\frac{A}{AB-C^2},$$

此即不等式②.

由上可见，为使不等式②取等号成立，必须且只须 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$，即条件③成立.

参考文献 [43,pp.89~90].

（陈永林）

樊墈-陶德不等式(Fan-Todd inequality) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是两组实数，当 $i \neq j$ 时，$a_i b_j \neq a_j b_i$，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2} \leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j}\right)^2. \qquad ①$$

不等式①是由樊墈与陶德于 1955 年证明的.

令 $x_i = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j}, 1 \leqslant i \leqslant n,$

在二重和数

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j}{a_j b_i - a_i b_j}$$

中的 $n(n-1)$ 个项可以按下面成对的形式重新组合：

$$\binom{n}{2}^{-1}\left(\frac{a_i a_j}{a_j b_i - a_i b_j} + \frac{a_j a_i}{a_i b_j - a_j b_i}\right) (i \neq j),$$

而这两项之和为零，因此有 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. 类似地可得到 $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$. 由 Ostrowski 不等式，可得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2},$$

此即不等式①.

樊墈与陶德还证明了不等式①的下述推广：

设 $p_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$ 是实数,且满足

$$p_{ij}=p_{ji},\ P=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}p_{ij}\neq 0,$$

则对满足 $a_ib_j\neq a_jb_i(i\neq j)$ 的任意两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}\leqslant\frac{1}{P^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}a_j}{a_jb_i-a_ib_j}\right)^2.$$

参考文献 [43,pp.89~90].

(陈永林)

Jensen 不等式(Jensen inequality) 设 $a_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,$0<r<s$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^s\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}},\qquad ①$$

当且仅当某个 $a_i>0$ 而其余 a_i 均为零时等式成立.

不等式①通常称为 Jensen 不等式,但实际上 A. Pringsheim 早在 1902 年就证明了它,而 J. L. W. V. Jensen 是于 1906 年得到①的. Jensen 于 1906 年同时证明了一个不等式,可把它看做赫尔德不等式的一种拓广(参见**赫尔德不等式**).

记 $A=\sum_{i=1}^{n}a_i^r$,并设 $A>0$,则

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^s\right)^{\frac{1}{s}}}{A^{\frac{1}{r}}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^s}{A^{\frac{s}{r}}}\right)^{\frac{1}{s}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^r}{A}\right)^{\frac{s}{r}}\right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{A}\right)^{\frac{1}{s}}=\left(\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{s}}=1,$$

这就证明了不等式①.

参考文献 [42,pp.26～27,p.4].

(陈永林)

r 阶加权平均值不等式(Inequality on weighted mean of order r)

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为两组正实数，$p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为权数,另设 r 为"广义的"实数. r 阶加权平均值定义为

$$M_n^{[r]}(a;p)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^r}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{r}}\quad(r\neq 0,|r|<+\infty)\qquad①$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}p_i}}\qquad(r=0)\qquad②$$

$$=\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad(r=-\infty)$$

$$=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad(r=+\infty)$$

当 $r=-1$ 时得到加权调和平均值,当 $r=0$ 时得到加权几何平均值,当 $r=1$ 时得到加权算术平均值.

如果引进新的权数 $q_i=\dfrac{p_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$,

这时①与②变为标准加权平均:

$$M_n^{[r]}(a;q)=\left(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^r\right)^{\frac{1}{r}}(r\neq 0,|r|<+\infty)\qquad③$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i^{q_i}\quad(r=0),\qquad④$$

其中权数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$.

若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$,则当 $-\infty\leqslant r\leqslant+\infty$ 时,$M_n^{[r]}(a;p)$ 均等于 a_1;若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等,则 $M_n^{[r]}(a;p)$ 是关于 r 的严

格递增函数,即对于 $-\infty \leqslant s < t \leqslant +\infty$,有

$$M_n^{[s]}(a;p) < M_n^{[t]}(a;p). \tag{⑤}$$

不等式⑤就是关于 r 阶加权平均值的不等式,有人也称之为 Schlömilch 不等式.

为了证明,不妨假定 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. 定义函数

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$$

与

$$F(t) = t^2 \frac{f'(t)}{f(t)} = t^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\log \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)$$

$$= t \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t \log a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t} - \log \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t.$$

因为 $f(t) > 0$,所以 f' 与 F 同号. 现在来证明 $F(t) > 0$.

由于

$$F'(t) = \frac{t}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t \log^2 a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t \log a_i\right)^2\right],$$

所以据柯西不等式可知 $F'(t)$ 与 t 同号. 因此,当 $t > 0$ 时,F 是增函数,当 $t < 0$ 时,F 为减函数. 于是,当 $t = 0$ 时 F 具有极小值,这个极小值等于零. 由此可知,当 $t \neq 0$ 时,F 与 f' 皆为正.

现在考察 $f'(0)$. 首先注意到,据 $M_n^{[r]}(a;p)$ 的定义,用洛必达法则易验证 $M_n^{[r]}(a;p)$ 是 r 的连续函数,即 $f(t)$ 是 t 的连续函数. 其次,由于

$$f'(t)=\frac{F(t)f(t)}{t^2}$$

$$=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^t\right)^{\frac{1}{t}}}{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^t}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^t\log a_i}{t}-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^t}{t}\cdot\frac{\log\sum_{i=1}^{n}p_ia_i^t}{t}\right),$$

用洛必达法则求上式当 $t\to 0$ 时的极限，得

$$f'(0)=\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\left[\sum_{i=1}^{n}p_i(\log a_i)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\log a_i\right)^2\right],$$

方括号中的表达式可以写作

$$\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}p_i(\log a_i)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\log a_i\right)^2,$$

据柯西不等式知，它是非负的，仅当 $\sqrt{p_i}$ 与 $\sqrt{p_i}\log a_i$ 成比例时才为零. 因此，当 a_i 不全相等时，有 $f'(0)>0$.

这样，我们就证明了 $M_n^{[r]}(a;p)$ 是关于 r 的严格递增函数.

1858 年，O. Schlömilch 在 $p_1=\cdots=p_n$，s 与 t 是自然数或属于集合 $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$ 的情形下证明了不等式⑤. 1888 年，H. Simon 对于 $p_1=\cdots=p_n$ 与任意的 s 与 t 证明了不等式⑤.

对于任意的 $p_1,\cdots,p_n$，J. Bienaymé 于 1840 年不加证明地叙述了不等式⑤. 第一个公开发表的证明属于 D. Besso(1879).

上面给出的证明是 Mitrinović 与 Vasić 于 1970 年给出的，它是 N. Norris 于 1935 年给出的证法的改进，后者利用上述方法对于 $p_1=\cdots=p_n$ 的情形证明了不等式⑤.

利用不等式⑤，容易证明下面的不等式：

若 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\geqslant 1$，且 $\lambda_i>0$，$A_{ji}>0$，则

$$\sum_{i=1}^{m} A_{1i}^{\lambda_1} A_{2i}^{\lambda_2} \cdots A_{ni}^{\lambda_n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i}\right)^{\lambda_1} \left(\sum_{i=1}^{m} A_{2i}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ni}\right)^{\lambda_n}. \qquad ⑥$$

首先考虑 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ 的情形. 在⑤中令 $s = 0$, $t = 1, a_j = \dfrac{A_{jk}}{\sum_{i=1}^{m} A_{ji}}, p_j = \lambda_j, j = 1, \cdots, n$, 得

$$\left(\frac{A_{1k}}{\sum_{i=1}^{m} A_{1i}}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\frac{A_{nk}}{\sum_{i=1}^{m} A_{ni}}\right)^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 \cdot \frac{A_{1k}}{\sum_{i=1}^{m} A_{1i}} + \cdots + \lambda_n \cdot \frac{A_{nk}}{\sum_{i=1}^{m} A_{ni}},$$

由 $k = 1$ 到 $k = n$ 相加, 注意到 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 即得⑥.

其次考虑 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = h > 1$ 的情形. 令 $\lambda_i' = \dfrac{\lambda_i}{h}$, $A_{ji}' = A_{ji}^{h}$, 则 $\lambda_1' + \cdots + \lambda_n' = 1$, 且有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} A_{1i}^{\lambda_1} \cdots A_{ni}^{\lambda_n} &= \sum_{i=1}^{m} A_{1i}'^{\lambda_1'} \cdots A_{ni}'^{\lambda_n'} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i}'\right)^{\lambda_1'} \cdots \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ni}'\right)^{\lambda_n'} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} A_{1i}^{h}\right)^{\frac{\lambda_1}{h}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{m} A_{ni}^{h}\right)^{\frac{\lambda_n}{h}}. \end{aligned} \qquad ⑦$$

因为对于 $h > 1$ 与 $a_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h}\right)^{\frac{1}{h}}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j^{h}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{h}}\right)^{\frac{1}{h}} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{h}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{h}} = 1,$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{h}\right)^{\frac{1}{h}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i. \qquad ⑧$$

对不等式⑦的右边用不等式⑧, 可得⑥.

不等式⑥与赫尔德不等式的一个拓广即 Jensen 不等式实质上是一致的.

参考文献 [43,pp.99~105].

（陈永林）

哈代-兰道不等式(Hardy-Landau inequality) 设 $a_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，$p>1$，记 $A_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}a_j$，则

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{n}a_i^p, \qquad ①$$

当且仅当所有 a_i 皆相等时等式成立.

哈代于 1920 年证明了关于正项级数的一个不等式：若 $p>1$，$a_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，$A_n=a_1+\cdots+a_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p. \qquad ②$$

但是哈代没有能够确定②中的常数. 这一缺陷后来是由兰道于 1926 年补救的. 不等式②通常称为哈代不等式. 上面的不等式①是②的有限形式，我们称之为哈代-兰道不等式.

为了证明①，不失一般性，可以假定 $a_1>0$. 利用算术平均值一几何平均值不等式，得

$$\begin{aligned}
&A_k^p-\frac{p}{p-1}A_k^{p-1}\cdot a_k\\
&=A_k^p-\frac{p}{p-1}[kA_k-(k-1)A_{k-1}]A_k^{p-1}\\
&=A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+\frac{(k-1)p}{p-1}A_k^{p-1}A_{k-1}\\
&=A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+\frac{(k-1)p}{p-1}(A_k^p)^{\frac{p-1}{p}}(A_{k-1}^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)+\frac{k-1}{p-1}[(p-1)A_k^p+A_{k-1}^p]$$

$$=\frac{1}{p-1}[(k-1)A_{k-1}^p-kA_k^p].$$

对 $k=1$ 到 $k=n$ 相加，得

$$\sum_{k=1}^n A_k^p-\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n A_k^{p-1}a_k\leqslant-\frac{nA_n^p}{p-1}\leqslant 0.$$

再利用赫尔德不等式，则有

$$\sum_{k=1}^n A_k^p\leqslant\frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^n A_k^{p-1}a_k$$

$$\leqslant\frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n A_k^p\right)^{\frac{1}{q}},\qquad ③$$

这里 $q=\frac{p}{p-1}$. 从两边约去 $\left(\sum_{k=1}^n A_k^p\right)^{\frac{1}{q}}$ 后，再作 p 次幂即得①.

③中等号成立仅当 a_k^p 与 A_k^p 成比例，即 a_k 与 A_k 成比例. 因 $a_1=A_1$，故 $A_k=ka_k, k=1,2,\cdots,n$. 这只有所有 a_i 皆相等时才有可能.

注意，对于不等式②而言，等式成立仅当所有 a_i 皆为 0. 这是因为，若所有 a_i 皆相等且为正数，则 $\sum_{n=1}^\infty a_n^p$ 不可能收敛.

参考文献 [42, pp. 239～241].

（陈永林）

Rado 不等式(Rado inequality)　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正数，则

$$n(A_n(a)-G_n(a))\geqslant(n-1)(A_{n-1}(a)-G_{n-1}(a)).\qquad ①$$

由于 $nA_n-(n-1)A_{n-1}=a_n$，所以不等式①等价于

$$\frac{a_n+(n-1)G_{n-1}}{n}\geqslant G_n,$$

而这个不等式可将算术平均值—几何平均值不等式应用于 n 个正数 $a_n, G_{n-1}(a), \cdots, G_{n-1}(a)$ 得到. 于是不等式①中等号成立仅当 $a_n = G_{n-1}(a)$.

记 $M_n^{[r]}(a) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$，则不等式①可推广为：当 $r < 1$ 时，有

$$\begin{aligned} & nA_n(a) - nM_n^{[r]}(a) \\ & \geqslant (n-1)A_{n-1}(a) - (n-1)M_{n-1}^{[r]}(a); \end{aligned} \tag{②}$$

当 $r > 1$ 时，②中不等号反向.

不等式①与②以及形式与它们类似的不等式，有时统称为 Rado 型不等式. 不等式②是 Mitrinović与 Vasić于 1966 年用他们创立的“λ 方法”所证明的许多较一般的不等式的一个特例.

现在用“λ 方法”来证明不等式②.

考虑函数

$$f(a_n) = nA_n(a) - \lambda nM_n^{[r]}(a), \tag{③}$$

其中 $\lambda > 0$ 是一参数.

由③得到

$$f'(a_n) = 1 - \lambda a_n^{r-1}(M_n^{[r]}(a))^{1-r},$$

$$\begin{aligned} f''(a_n) = & -\lambda(r-1)\frac{n-1}{n}a_n^{r-2} \\ & \cdot (M_n^{[r]}(a))^{1-2r}(M_{n-1}^{[r]}(a))^r. \end{aligned}$$

当 $0 < \lambda^{\frac{r}{1-r}} < n$ 时，f' 仅有的一个正根是

$$a_n = \lambda^{\frac{1}{1-r}} M_{n-1}^{[r]}(a)\left(\frac{n-1}{n-\lambda^{\frac{r}{1-r}}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

因为 $r > 1$ 且 $\lambda > 0$ 时 $f''(a_n) < 0$，所以得到下面的不等式：

$$nA_n(a) - \lambda n M_n^{[r]}(a) \leqslant (n-1)A_{n-1}(a) -$$
$$\lambda(n-1)\left((n-1)^{\frac{1-r}{r}}\left(n-\lambda^{\frac{r}{1-r}}\right)^{\frac{r-1}{r}}\right)M_{n-1}^{[r]}(a), \qquad ④$$

其中 $r > 1$ 且 $0 < \lambda^{\frac{r}{1-r}} < n$.

当 $r < 1$ 且 $\lambda > 0$ 时 $f''(a_n) > 0$，所以④中的不等号反向.

若在④中令 $\lambda = 1$，则得不等式②.

参考文献 [43,pp.121~126].

（陈永林）

Popoviciu 不等式(Popoviciu inequality) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正数，则

$$\left(\frac{G_n(a)}{A_n(a)}\right)^n \leqslant \left(\frac{G_{n-1}(a)}{A_{n-1}(a)}\right)^{n-1}, \qquad ①$$

当且仅当 $a_n = A_{n-1}(a)$ 时等式成立.

将不等式 $G_n(a) \leqslant A_n(a)$ 应用于 n 个正数 $a_n, A_{n-1}(a), \cdots, A_{n-1}(a)$，即得①.

Mitrinović与 Vasić于 1966 年用"λ 方法"证明了如下两个较一般的不等式：

$$n\left(\frac{M_n^{[r]}(a)}{A_n(a)}\right)^{\frac{r}{1-r}} \geqslant (n-1)\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a)}{A_{n-1}(a)}\right)^{\frac{r}{1-r}} + 1 \ (r < 0), \qquad ②$$

$$n\left(\frac{M_n^{[s]}(a)}{M_n^{[t]}(a)}\right)^{\frac{ts}{t-s}} \geqslant (n-1)\left(\frac{M_{n-1}^{[s]}(a)}{M_{n-1}^{[t]}(a)}\right)^{\frac{ts}{t-s}} + 1 \ (ts < 0). \qquad ③$$

在 Rado 不等式的④中取 $\lambda = \dfrac{A_n(a)}{M_n^{[r]}(a)}$，可得上面的②式；在②中以 a_i^t 代替 a_i，并令 $s = rt$，则可得上面的③式.

另外，在 Rado 不等式的函数

$$f(a_n) = nA_n(a) - \lambda n M_n^{[r]}(a)$$

中令 $r = 0$，可得不等式

$$nA_n(a)-\lambda nG_n(a)$$
$$\geqslant(n-1)A_{n-1}(a)-\lambda^{\frac{n}{n-1}}(n-1)G_{n-1}(a),\quad ④$$

若在④中取 $\lambda=\dfrac{A_n(a)}{G_n(a)}$，也得不等式①.

上面的不等式①、②、③，有时统称为 Popoviciu 型不等式.

Rado 型不等式与 Popoviciu 型不等式，又可统称为 Rado-Popoviciu 型不等式. 这类不等式，已经有许多更一般的结果.

参考文献 [43,pp.121～127].

（陈永林）

Kober 不等式(Kober inequality) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆为非负数，$n>2$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全相等，则

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_i+n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}}\geqslant 0,\quad ①$$

当且仅当对某个 a_i 为 0 且其余 a_i 皆相等时等式成立.

不等式①是 H. Kober 于 1958 年证明的.

不失一般性，可以假定 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，考察函数

$$g_n(a)=(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_i+n(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}}.$$

假设对某个 $n>2$，不等式①成立，即 $g_n(a)>0$.

现令 $a_1'=a_1,a_i'=A=(a_2\cdots a_{n+1})^{\frac{1}{n}},i=2,\cdots,n+1$，则

$$g_{n+1}(a')=(n-1)a_1+(n+1)a_1^{\frac{1}{n+1}}A^{\frac{n}{n+1}}-2n(a_1A)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $a_1=0$，则 $g_{n+1}(a')=0$. 若 $a_1>0$，则

$$\frac{g_{n+1}(a')}{2na_1^{\frac{1}{n+1}}}=\frac{n-1}{2n}a_1^{\frac{n}{n+1}}+\frac{n+1}{2n}A^{\frac{n}{n+1}}-a_1^{\frac{n-1}{2(n+1)}}A^{\frac{1}{2}}.$$

利用加权的算术平均值—几何平均值不等式，得 $g_{n+1}(a')\geqslant 0$，并且当且仅当 $a_1=A$，即 $a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}$ 时等式成立，但这种情况被排除在假设之外．因此，$g_{n+1}(a')\geqslant 0$，当且仅当 $a_1=0$ 时等式成立．

再考虑差 $g_{n+1}(a)-g_{n+1}(a')$：

$$
\begin{aligned}
& g_{n+1}(a)-g_{n+1}(a') \\
=&(n-1)\sum_{i=2}^{n+1}a_i-2a_1^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i^{\frac{1}{2}}-nA^{\frac{1}{2}}\right)-2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_ia_j)^{\frac{1}{2}} \\
=&g_n(\bar{a})+\sum_{i=2}^{n+1}a_i-2a_1^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i^{\frac{1}{2}}-nA^{\frac{1}{2}}\right)-n\prod_{i=2}^{n+1}a_i^{\frac{1}{n}},
\end{aligned}
$$

其中$\bar{a}$表示 $a_2,\cdots,a_{n+1}$这组数．

因为 $a_1\leqslant A$，$(a_2\cdots a_{n+1})^{\frac{1}{n}}=A$ 与 $g_n(\bar{a})\geqslant 0$，并且 $\sum\limits_{i=2}^{n+1}a_i^{\frac{1}{2}}-nA^{\frac{1}{2}}\geqslant 0$，所以

$$
\begin{aligned}
& g_{n+1}(a)-g_{n+1}(a') \\
\geqslant&\sum_{i=2}^{n+1}a_i-2A^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i^{\frac{1}{2}}-nA^{\frac{1}{2}}\right)-nA \\
=&\sum_{i=2}^{n+1}a_i-2A^{\frac{1}{2}}\sum_{i=2}^{n+1}a_i^{\frac{1}{2}}+nA \\
=&\sum_{i=2}^{n+1}\left(a_i^{\frac{1}{2}}-A^{\frac{1}{2}}\right)^2\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

当且仅当 $a_i=A(i=2,\cdots,n+1)$，即 $a_2=\cdots=a_{n+1}$ 时等号成立．

这样就证明了不等式①．

H. Kober 于 1958 年还证明了比①更一般的不等式．记 $\Delta_n(a,q)=A_n(a,q)-G_n(a,q)$，$S_n(a)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i^{\frac{1}{2}}-a_j^{\frac{1}{2}}\right)^2$，

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负数，$q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是正数且适合 $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$. 若 $a_1,\cdots,a_n$ 不全相等，则

$$\frac{\min(q_1,\cdots,q_n)}{n-1}\leqslant\frac{\Delta_n(a,q)}{S_n(a)}\leqslant\max(q_1,\cdots,q_n).\qquad ②$$

参考文献 [43,pp. 502～503,pp. 109～110].

（陈永林）

Rasa 不等式(Rasa inequality) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆为正数，且 $0<\alpha<a_i<\beta(i=1,2,\cdots,n)$. 记 $R_n(a)=n[A_n(a)-G_n(a)]$，则

$$\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln^2\left(\frac{a_n}{G_{n-1}(a)}\right)\leqslant R_n(a)-R_{n-1}(a)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\beta\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln^2\left(\frac{a_n}{G_{n-1}(a)}\right).$$

这个不等式是 I. Rasa 于 1982 年证明的，见 Math. Rev. 84f26 024.

（陈永林）

Sierpinski 不等式(Sierpinski inequality) 若 $n\geqslant 2$，则

$$A_n(a)H_n(a)^{n-1}\leqslant G_n(a)^n\leqslant A_n(a)^{n-1}H_n(a),\qquad ①$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 皆为正数，$H_n(a)=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}$ (a_i 的调和平均值).

当 $n=2$ 时，①是等式．今设 $n>2$. 显然有

$$A_n(a)=\frac{n-1}{n}A_{n-1}(a)+\frac{a_n}{n},$$

$$H_n(a)=\frac{n}{\dfrac{n-1}{H_{n-1}(a)}+\dfrac{1}{a_n}},$$

$$[G_n(a)]^n=a_n[G_{n-1}(a)]^{n-1}$$

为证①中右边的不等式(左边的类似),设

$$f(a_n)=(n-1)\ln A_n(a)+\ln H_n(a)-\ln[G_n(a)]^n$$
$$=(n-1)\ln[(n-1)A_{n-1}(a)+a_n]-$$
$$\ln\left(\frac{n-1}{H_{n-1}(a)}+\frac{1}{a_n}\right)-\ln a_n$$
$$-\ln[G_{n-1}(a)]^{n-1}-(n-2)\ln n.$$

容易证明,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,而当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,这里 $x_0=\dfrac{(n-1)A_{n-1}(a)-H_{n-1}(a)}{n-2}$. 因此,$f(a_n)\geqslant f(x_0)$,由此可得

$$\frac{[A_n(a)]^{n-1}H_n(a)}{[G_n(a)]^n}$$
$$\geqslant\left(\frac{(n-1)^2A_{n-1}(a)-H_{n-1}(a)}{n(n-2)}\right)^{n-2}\frac{H_{n-1}(a)}{[G_{n-1}(a)]^{n-1}}$$
$$\geqslant\frac{[A_{n-1}(a)]^{n-2}H_{n-1}(a)}{[G_{n-1}(a)]^{n-1}}.$$

因此,若①中右边不等式对于 $n-1$ 成立,即

$$\frac{[A_{n-1}(a)]^{n-2}H_{n-1}(a)}{[G_{n-1}(a)]^{n-1}}\geqslant 1,$$

则得 $\dfrac{[A_n(a)]^{n-1}H_n(a)}{[G_n(a)]^n}\geqslant 1$, 即 $[G_n(a)]^n\leqslant[A_n(a)]^{n-1}H_n(a)$.

据数学归纳法原理,不等式①对任何 $n\geqslant 2$ 成立.

参考文献 [38,pp.140~141].

(陈永林)

Carlson 不等式(Carlson inequality) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆为正

数，$A_i=\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}a_j, G_i=\left(\prod_{j\neq i}a_j\right)^{\frac{1}{n-1}}, i=1,2,\cdots,n$，则当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$\frac{1}{n}(G_1+G_2+\cdots+G_n)\leqslant(A_1A_2\cdots A_n)^{\frac{1}{n}}. \qquad ①$$

为了证明①，我们对 $i,j=1,2,\cdots,n$，令

$$A_{ii}=A_i,\ G_{ii}=G_i,$$

$$A_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k-x_i-x_j}{n-2},$$

$$G_{ij}=\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}x_k}{x_ix_j}\right)^{\frac{1}{n-2}}\ (i\neq j),$$

则 $\sum_{i=1}^{n}A_{ij}=nA_j, \prod_{j=1}^{n}G_{ij}=G_i^n$. 由赫尔德不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n}G_{i1}^{\frac{1}{n}}G_{i2}^{\frac{1}{n}}\cdots G_{in}^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}G_{i1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}G_{i2}\right)^{\frac{1}{n}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}G_{in}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}G_i\leqslant\left(\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}G_{ij}\right)^{\frac{1}{n}},$$

再以 $\sum_{i=1}^{n}G_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{n}A_{ij}=nA_j$ 代入，即得不等式①.

参考文献 [38,pp.161~162].

（陈永林）

Beckenbach 不等式（Beckenbach inequality） 设 $a_i>0, b_i>0(i=1,2,\cdots,n), 1\leqslant p\leqslant 2$，并记 $S_n(a,p)=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$，则

$$\frac{S_n(a+b,p)}{S_n(a+b,p-1)}\leqslant\frac{S_n(a,p)}{S_n(a,p-1)}+\frac{S_n(b,p)}{S_n(b,p-1)}, \qquad ①$$

当 $0 \leqslant p < 1$ 时,①中不等号反向.

不等式①是 E. F. Beckenbach 于 1950 年证明的.

为了证明①,我们先说明赫尔德不等式 ($p > 1$) 可以等价地叙述为:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{R(y)} \sum_{i=1}^{n} a_i y_i, \qquad ②$$

其中 $R(y)$表示 $y_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 且满足

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1, \qquad ③$$

这里 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

实际上,若 $p > 1$ 时的赫尔德不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad ④$$

成立,注意到 a_i^p 与 y_i^q 成比例时④中取等号,显然可得到②.

反之,设②成立,对于任意的 $z_i \geqslant 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 且 z_i 不全为零,若令 $y_i = \frac{z_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$,则 $y_i \geqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1$,即 y_i 满足条件③. 于是由②得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{z_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

即
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i z_i,$$

亦即④成立. 这就证明了赫尔德不等式 ($p > 1$) 与②式的等价性.

现在考察不等式①. 对于 $p = 1$,①是等式. 设 $1 < p \leqslant 2$,用

②式若能证明

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)y_i\right]^p}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}} \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right)^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_iy_i\right)^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}}, \qquad ⑤$$

其中 $y_i \geqslant 0$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}y_i^q=1$，则利用取极值的过程，就可得到①.

为了简化⑤式，我们令

$$x^p = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_iy_i\right)^p}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}}, \quad y^p = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}b_iy_i\right)^p}{\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}}, \qquad ⑥$$

这样，⑤式可改写成

$$\frac{\left[x\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} + y\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}} \leqslant x^p+y^p. \qquad ⑦$$

为了说明⑦是成立的，我们对⑦的左边的分子应用赫尔德不等式，得

$$\begin{aligned}&\left[x\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} + y\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\ \leqslant &(x^p+y^p)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}.\end{aligned} \qquad ⑧$$

据 $1<p\leqslant 2$ 时的闵科夫斯基不等式，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}. \qquad ⑨$$

由⑧与⑨即得⑦.

由于 $0 \leqslant p < 1$ 时所用到的赫尔德不等式与闵科夫斯基不等式 $p > 1$ 时的相应不等式反向成立，所以，当 $0 \leqslant p < 1$ 时不等式①也反向成立.

参考文献 [45,pp.23—28].

（陈永林）

牛顿不等式(Newton inequality) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数，它们的 r 次对称函数定义为

$$e_r = e_r(a) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_r}, \qquad ①$$

并定义 $e_0 = e_0(a) = 1$，$a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的 r 次对称平均值为

$$p_r = \frac{e_r}{\binom{n}{r}}, r = 0, 1, 2, \cdots, n. \qquad ②$$

则对 $r = 1, 2, \cdots, n-1$ 有

$$p_r^2 \geqslant p_{r-1} p_{r+1}, \qquad ③$$

当且仅当 a_i 皆相等时等式成立.

不等式③是由牛顿提出的. 实际上，它对实数 a_i 皆成立.

考虑二元多项式

$$f(x, y) = (x + a_1 y)(x + a_2 y) \cdots (x + a_n y). \qquad ④$$

据 Rolle 定理，若对 f 取关于 x 与 y 的偏导数，则所得二元多项式(次数≥1)的根都是实数. 因为

$$f(x, y) = p_0 \binom{n}{0} x^n + p_1 \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n} p_n y^n,$$

适当地求偏导数，所得多项式的根是二次方程

$$p_{k-1} x^2 + 2 p_k x y + p_{k+1} y^2 = 0$$

的根，这些根皆为实数，故有

$$p_k^2 - p_{k-1}p_{k+1} \geqslant 0,\ k = 1,2,\cdots,n-1.$$

这就证明了不等式③.

参考文献 [45,p.11],[42,pp.52～54].

（陈永林）

马克劳林不等式(Maclaurin inequality) 设 $1 < s < t < n$，p_r 表示正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的 r 次对称平均值，则

$$p_t^{\frac{1}{t}} \leqslant p_s^{\frac{1}{s}}, \tag{①}$$

当且仅当 a_i 皆相等时等式成立.

不等式①是由马克劳林于 1729 年提出的.

据牛顿不等式，我们有

$$(p_0p_2)(p_1p_3)^2(p_2p_4)^3\cdots(p_{k-1}p_{k+1})^k \leqslant p_1^2p_2^4\cdots p_k^{2k}.$$

由此得到

$$p_k^{\frac{1}{k}} \geqslant p_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}. \tag{②}$$

因为 $s < t$，所以 $s+1 \leqslant t$，由②得

$$p_s^{\frac{1}{s}} \geqslant p_{s+1}^{\frac{1}{s+1}} \geqslant p_t^{\frac{1}{t}}.$$

这样就证明了不等式①.

参考文献 [45,p.11],[43,pp.130～131].

（陈永林）

Marcus - Lopes 不等式(Marcus-Lopes inequality) 设 $e_r(a)$ 表示正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 r 次对称函数，则对 $1 \leqslant p \leqslant r \leqslant n$，有

$$\left(\frac{e_r(a+b)}{e_{r-p}(a+b)}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\frac{e_r(a)}{e_{r-p}(a)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{e_r(b)}{e_{r-p}(b)}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{①}$$

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例或 $r=1$ 与 2，$p=1$ 时等式成立.

不等式①是由 M. Marcus 与 L. Lopes 于 1957 年提出的.

为了证明①,首先假定 $p=1$ 时①成立,则对 $p>1$ 有

$$\left(\frac{e_r(a+b)}{e_{r-p}(a+b)}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{e_{r-j+1}(a+b)}{e_{r-j}(a+b)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant\left[\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{e_{r-j+1}(a)}{e_{r-j}(a)}+\frac{e_{r-j+1}(b)}{e_{r-j}(b)}\right)\right]^{\frac{1}{p}}.\qquad ②$$

对②的右边应用拓广的赫尔德不等式,得

$$\left(\frac{e_r(a+b)}{e_{r-p}(a+b)}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{e_{r-j+1}(a)}{e_{r-j}(a)}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\prod_{j=1}^{p}\frac{e_{r-j+1}(b)}{e_{r-j}(b)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\frac{e_r(a)}{e_{r-p}(a)}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{e_r(b)}{e_{r-p}(b)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

其次,考察 $p=1$ 时的①式.显然可以假定 a_i 与 b_i 不成比例.令

$$g_r(a)=\frac{e_r(a)}{e_{r-1}(a)},\varphi_r(a,b)=g_r(a+b)-g_r(a)-g_r(b),$$

则

$$\varphi_2(a,b)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_iB_n-b_iA_n)}{2A_nB_n(A_n+B_n)},$$

其中 $A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$, $B_n=\sum_{i=1}^{n}b_i$. 可见 $p=1$ 与 $r=2$ 时,有 $\varphi_2(a,b)=0$,即①是等式.下设 $r>2$.

若用 a_i' 表示 $(n-1)$ 个数 $a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n$,则容易验证如下的恒等式:

$$re_r(a)=\sum_{i=1}^{n}a_ie_{r-1}(a_i'),$$

$$e_r(a)=a_ie_{r-1}(a_i')+e_r(a_i'),$$

$$(n-r)e_r(a)=\sum_{i=1}^{n}e_r(a_i'),$$

$$re_r(a)=A_ne_r(a)-\sum_{i=1}^{n}a_i^2e_{r-2}(a_i').$$

由此可以推出

$$rg_r(a)=A_n-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+g_{r-1}(a_i')},$$

$$\varphi_r(a,b)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i+g_{r-1}(a_i')}+\frac{b_i^2}{b_i+g_{r-1}(b_i')}-\frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i+g_{r-1}(a_i'+b_i')}\right).$$

对 r 用归纳法验证．假设有

$$g_{r-1}(a_i'+b_i')\geqslant g_{r-1}(a_i')+g_{r-1}(b_i'),\tag{③}$$

当且仅当 a_i' 与 b_i' 成比例时③为等式．由③可得

$$\varphi_r(a,b)\geqslant\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i+g_{r-1}(a_i')}+\frac{b_i^2}{b_i+g_{r-1}(b_i')}-\frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i+g_{r-1}(a_i')+g_{r-1}(b_i')}\right),\tag{④}$$

当且仅当对所有 i，a_i' 与 b_i' 皆成比例时④为等式．

将④式括号中的三项通分，得其分子为

$$(a_ig_{r-1}(b_i')-b_ig_{r-1}(a_i'))^2.\tag{⑤}$$

若对一切 i，a_i' 与 b_i' 皆成比例，即 $a_i'=\lambda b_i'$ 时，表达式⑤变为

$$(a_i-\lambda b_i)^2g_{r-1}^2(b_i').$$

由于已假定 a_i 与 b_i 不成比例，故对某个 i，⑤式的值为正．总之，我们证明了 $\varphi_i(a,b)>0$，亦即证明了：

当 a_i 与 b_i 不成比例时，严格的不等式①成立．

参考文献 [43,pp.138～140],[38,p.134].

（陈永林）

关于凸函数的 Jensen 不等式（Jensen inequality on convex function） 用 I 表示开区间 (a,b)，$\bar{I}$ 表示闭区间 $[a,b]$，f 是定义在 I 或 $\bar{I}$ 上的实函数．若对任意两点 $x,y\in\bar{I}$，不等式

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad ①$$

成立，则称函数 f 是在 $\bar{I}$ 上 Jensen 凸的（简称 J-凸的）．

若对任意两点 $x,y\in\bar{I}$，$x\neq y$，严格不等式①成立，则称函数 f 是在 $\bar{I}$ 上严格 J-凸的．

若 f 在 $\bar{I}$ 上是 J-凸的，则对任意点 $x_1,\cdots,x_n\in\bar{I}$ 以及任意非负有理数 $r_1,\cdots,r_n$，$r_1+\cdots+r_n=1$，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}r_if(x_i). \qquad ②$$

J.L.W.V.Jensen 于 1905 年首先用不等式①来定义凸函数并且注意到了它们的重要性，1906 年证明了不等式②．

但是，在 Jensen 之前就已出现了一些关于凸函数的结果．例如，1889 年赫尔德在 f 于 I 上两次可微且 $f''(x)\geqslant0$ 的条件下，证明了不等式②．赫尔德研究的 f 实际上是凸函数，虽然他在论文中没有特别阐明这一点．

凸函数的另一定义是：若对一切 $x,y\in\bar{I}$ 以及一切实数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \qquad ③$$

则称 f 在$\bar{I}$上是凸的．若 $x\neq y$，且 $0<\lambda<1$ 时，严格不等式③成立，则称 f 在$\bar{I}$上是严格凸的．

函数 f 在$\bar{I}$上的严格凸性的几何意义是，连结$(x,f(x))$与$(y,f(y))$$(x,y\in\bar{I})$两点的线段位于 f 的图像的上方．

显然，凸函数是 J-凸的，连续的 J-凸函数是凸的．

若 f 是$\bar{I}$上的凸函数，则对任意的 $x_i\in\bar{I}$，$i=1,2,\cdots,n$，以及 $q_i\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}q_i=1$，有

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}q_ix_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}q_if(x_i).\qquad ④$$

用数学归纳法，从不等式①可以证明不等式②，从不等式③可以证明不等式④．不等式④显然包含了不等式③．当 J-凸函数 f 还具有连续性时，利用极限过程，可从不等式②推出不等式④．

现在，人们通常将不等式④称为 Jensen 不等式．

Jensen 不等式还有积分形式：

设 f 是$\bar{I}$上的凸函数，φ,p 在$\bar{I}$上可积，$m\leqslant\varphi(x)\leqslant M$，$p(x)\geqslant 0(x\in\bar{I})$ 且 $\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$，则

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)\varphi(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)\leqslant\frac{\int_a^b p(x)f(\varphi(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}.\qquad ⑤$$

Jensen 不等式有许多推广．例如，J. F. Steffensen 于 1919 年证明了下面的结果：

设 f 是凸函数，$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是不增的，$c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足条件

$$0\leqslant\sum_{i=k}^{n}c_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i(k=1,2,\cdots,n)\text{ 且 }\sum_{i=1}^{n}c_i>0,$$

则

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}c_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}c_if(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}c_i}.\qquad⑥$$

这个不等式显然比不等式④更一般,因为数 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 未必全是正的.

又如,哈代于 1929 年证明的关于优劣向量的一个不等式(也称优化定理),也推广了 Jensen 不等式.

参考文献　[43,pp. 13～21;p. 146;pp. 219～220],[45,pp. 70—74].

(陈永林)

舍贵不等式(Szegö inequality)　若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{2m-1}\geqslant0$,且 f 是在 $[0,a_1]$ 上的凸函数,则

$$\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}f(a_i)\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}a_i\right).\qquad①$$

不等式①是舍贵于 1950 年得到的.

不等式①可以从 Steffensen 不等式(见 **Jensen 不等式**之不等式⑥)推出.实际上,$a_i(i=1,2,\cdots,2m-1)$ 是不增的,若令 $c_i=(-1)^{i-1}(i=1,2,\cdots,2m-1)$,则 $\sum_{i=1}^{2m-1}c_i=1>0,\sum_{j=k}^{n}c_j=0$ 或 1,因此 $0\leqslant\sum_{j=k}^{2m-1}c_j\leqslant\sum_{i=1}^{2m-1}c_i$.据 Steffensen 不等式得

$$f\left(\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}a_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}f(a_i),$$

这就证明了①.

参考文献 [43, pp. 143～146, p. 149], [45, p. 47].

（陈永林）

Bellman 不等式(Bellman inequality) 若 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$，$f$ 是$[0, a_1]$上的凸函数，且 $f(0) \leqslant 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(a_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i\right). \qquad ①$$

不等式①是 R. Bellman 于 1953 年得到的．

当 $n = 2m-1$，即 n 为奇数时，不等式①即舍贯不等式，此时条件 $f(0) \leqslant 0$ 可以省略．

当 $n = 2m$，即 n 为偶数时，不等式①可从 Steffensen 不等式(见 **Jensen 不等式**之不等式⑥)推出．此时令

$$x_i = a_i (i = 1, 2, \cdots, 2m), x_{2m+1} = 0,$$

取 $c_i = (-1)^{i-1} (i = 1, 2, \cdots, 2m+1)$，则 $\sum_{i=1}^{2m+1} c_i = 1$，且有 $0 \leqslant \sum_{j=k}^{2m+1} c_j \leqslant 1$，因此由 Steffensen 不等式得

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{2m}(-1)^{i-1}a_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{2m}(-1)^{i-1}a_i + 0\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2m}(-1)^{i-1}f(a_i) + f(0), \end{aligned}$$

由于 $f(0) \leqslant 0$，所以

$$f\left(\sum_{i=1}^{2m}(-1)^{i-1}a_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{2m}(-1)^{i-1}f(a_i), \qquad ②$$

此即 $n = 2m$ 时的不等式①.

I. Olkin 于 1959 年导出了一个较一般的不等式，而舍贯不等式与 Bellman 不等式皆是它的特例．Olkin 的结果如下：

设 $1\geqslant p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n\geqslant 0$，$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$，并设 f 是区间 $[0,a_1]$ 上的凸函数，则

$$\Big[1-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}p_j\Big]f(0)+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}p_jf(a_j)$$
$$\geqslant f\Big(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}p_ja_j\Big). \qquad ③$$

参考文献　[43,p.150,p.146],[45,p.48].

（陈永林）

Lyapunov 不等式（Lyapunov inequality）　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数，$q_i>0(i=1,\cdots,n)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$，并记 $M_r(a)=\Big(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^r\Big)^{\frac{1}{r}}$，则当 $0<r<s<t$ 时有

$$[M_s(a)]^s\leqslant\{[M_r(a)]^r\}^{\frac{t-s}{t-r}}\{[M_t(a)]^t\}^{\frac{s-r}{t-r}}, \qquad ①$$

当且仅当所有 a_i 皆相等时等式成立.

不等式①是 A. Lyapunov 于 1901 年得到的.

事实上，对某个 α，$0<\alpha<1$，有 $s=r\alpha+t(1-\alpha)$，此时不等式①就成为

$$\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^s\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^r\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^t\Big)^{1-\alpha}. \qquad ②$$

令 $u_i=(q_ia_i^r)^{\alpha}$，$v_i=(q_ia_i^t)^{1-\alpha}$. 对 $u_i,v_i(i=1,\cdots,n)$ 应用赫尔德不等式并注意到 $u_iv_i=q_ia_i^s$，即得②. ②成为等式的条件是 $u_i^{\frac{1}{\alpha}}$ 与 $v_i^{\frac{1}{1-\alpha}}$ 成比例，这等价于各个 a_i 全都相等.

参考文献　[38,p.137].

（陈永林）

Levinson 不等式（Levinson inequality）　设 $f(x)$ 在区间 $(0,2a)$

上满足 $f'''(x)>0$，并设 $0<x_i\leqslant a, p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i}-f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)$$

$$\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}p_if(2a-x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i}-f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i(2a-x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right), \qquad ①$$

当且仅当所有 x_i 皆相等时等式成立．

若令 $F(x)=f(x)-f(2a-x)$，则由条件 $f'''(x)>0$ 易知 $F(x)$是严格上凸的．由此可得不等式①.

不等式①是 N. Levinson 于 1964 年得到的．

参考文献 [38,p.162].

（陈永林）

阿达玛不等式(Hadamard inequality) 设 f 是$[a,b]$上的凸函数，$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，则

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)], \qquad ①$$

当且仅当 f 为线性函数时等式成立．

不等式①是阿达玛于 1893 年得到的．

事实上，由 f 的凸性，对于 $x_1<x<x_2$，有

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

两边从 x_1 到 x_2 积分，即得①中右边的不等式．

为证①中左边的不等式，令 $x=\frac{x_1+x_2}{2}+t$，则

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{1}{2}(x_2-x_1)}^{\frac{1}{2}(x_2-x_1)} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}+t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}(x_2-x_1)}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}+t\right)\right. \\ &\quad \left.+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^{\frac{1}{2}(x_2-x_1)} 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= (x_2-x_1)f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).\end{aligned}$$

这就证明了不等式①.

阿达玛不等式①已有许多推广.

参考文献 [43,p.18],[38,p.151].

（陈永林）

关于向量优化的哈代-利特尔伍德-波利亚不等式(Hardy-Littlewood-Pólya inequality on vectors majorization) 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 是两个实向量. 若将它们的分量重新排列之后使之成为

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n \quad 与 \quad y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n,$$

这时有

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i,\ k=1,2,\cdots,n-1, \qquad ①$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad ②$$

则称向量 x 优于向量 y，记作 $x\gg y$ 或 $y\ll x$.

哈代、利特尔伍德与波利亚于 1929 年证明了：

对于任意的在区间 I 上的凸函数 f 有

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i),\ x_i, y_i \in I, \quad ③$$

当且仅当 $x \ll y$.

不等式③是凸函数的 Jensen 不等式的推广．事实上，在③中取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$，就得到 Jensen 不等式．

现在来证明上面的结果．

定义 $f(x) = x$ 与 $g(x) = -x$，则函数 f 与 g 在任意闭区间上都是凸的，因此有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \text{ 且 } \sum_{i=1}^{n}(-x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(-y_i),$$

由此推出 $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

又若定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{当 } x \leqslant y_i \text{ 时}, \\ x - y_i, \text{当 } x > y_i \text{ 时}, \end{cases}$$

则 f 在任意闭区间上是非负的与凸的，且有 $f(x) \geqslant x - y_i$. 因此，对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$，有

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_k - k y_k &\leqslant \sum_{i=1}^{k} f(x_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} f(y_i) = y_1 + \cdots + y_k - k y_k. \end{aligned}$$

这证明了条件 $x \ll y$ 的必要性．下证这个条件也是充分的．

对于任意凸函数 f，当 $x_1 > y_1, x_2 > y_2, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ 时，有

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

记

$$D_k=\frac{f(x_k)-f(y_k)}{x_k-y_k}\ (x_k\neq y_k),$$

则 $D_k\geqslant D_{k+1}$. 从而据 $x\ll y$，有

$$\sum_{k=1}^{n-1}(X_k-Y_k)(D_k-D_{k+1})+(X_n-Y_n)D_n\leqslant 0, \qquad ④$$

其中
$$X_k=\sum_{i=1}^{k}x_i,\ Y_k=\sum_{i=1}^{k}y_i.$$

由④推出

$$\sum_{k=1}^{n-1}X_k(D_k-D_{k+1})+X_nD_n$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}Y_k(D_k-D_{k+1})+Y_nD_n,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}(X_k-X_{k-1})D_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}(Y_k-Y_{k-1})D_k.$$

因为　$X_k-X_{k-1}=x_k, Y_k-Y_{k-1}=y_k$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)D_k\leqslant 0,$$

由此推出不等式③.

1932 年，J. Karamata 重新发现了上面的结果. 因此，有人将不等式③称为 Karamata 不等式. 据 Mitrinović与 Vasić的考证，上面的结果应该归于哈代、利特尔伍德与波利亚(1929)，所以我们应称不等式③为哈代-利特尔伍德-波利亚不等式.

上面的结果有一些拓广. 例如，L. Fuchs 于 1947 年证明了：对任意凸函数 f 与任意实数 $p_1,\cdots,p_n$，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i) \quad ⑤$$

成立必要且只要

$$x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_n, y_1 \geqslant \cdots \geqslant y_n,$$
$$\sum_{i=1}^{k} p_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i y_i, k = 1,2,\cdots,n-1,$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

樊畿(Ky Fan)于 1951 年证明了一个优美的结果：

若 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$（其意义是向量 x, y 的分量均是非负数），则 $x \ll y$ 的充分必要条件是对于任何对称尺度函数 F，有

$$F(x) \leqslant F(y). \quad ⑥$$

这里，对称尺度函数(symmetric gauge function)的意义如下：

设 F 是以 n 维向量为变元的实函数，若对任意向量 x 与 y 有

$$F(x) > 0 \ (x \neq 0);$$
$$F(tx) = |t| F(x), t \text{ 为实数};$$
$$F(x+y) \leqslant F(x) + F(y);$$
$$F(x_\pi) = F(x);$$
$$F(xJ) = F(x),$$

其中 x_π 表示将 x 的分量做任意排列后得到的向量，J 是对角线上的元素为 $+1$ 或 -1 的任意对角矩阵，则称 F 为对称尺度函数.

参考文献 [43,pp. 218~227].

（陈永林）

Schur 不等式(Schur inequality) 若 x, y, z 是正数且 λ 是实数，则

$$x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-x)(y-z)$$

$$+z^{\lambda}(z-x)(z-y)\geqslant 0, \quad ①$$

当且仅当 $x=y=z$ 时等式成立.

不等式①是 I. Schur 大约在 1934 年或更早些时候得到的.

为了证明①,不妨假定 $x\geqslant y\geqslant z>0$. 令

$$a_1=y-z, a_2=x-y,$$
$$b_1=x^{\lambda}(x-y), b_2=z^{\lambda}(y-z),$$

则用柯西不等式可以得到

$$\left(a_1^{\frac{1}{2}}b_1^{\frac{1}{2}}+a_2^{\frac{1}{2}}b_2^{\frac{1}{2}}\right)^2\leqslant(a_1+a_2)(b_1+b_2),$$

即

$$(x-y)(y-z)\left(x^{\lambda}+z^{\lambda}+2(xz)^{\frac{\lambda}{2}}\right)$$
$$\leqslant(x-z)\left(x^{\lambda}(x-y)+z^{\lambda}(y-z)\right).$$

当 $\lambda\geqslant 0$ 时, $x^{\lambda}\geqslant y^{\lambda}$; 当 $\lambda\leqslant 0$ 时, $z^{\lambda}\geqslant y^{\lambda}$. 因此,当 λ 为任一实数时,总有

$$x^{\lambda}+z^{\lambda}+2(xz)^{\frac{\lambda}{2}}\geqslant y^{\lambda},$$

从而有

$$(x-y)(y-z)y^{\lambda}$$
$$\leqslant x^{\lambda}(x-y)(x-z)+z^{\lambda}(y-z)(x-z),$$

此即不等式①.

Schur 不等式①有各种推广,其中最广泛的大概是 U. C. Guha 于 1962 年证明的如下结果:

设 a,b,c,u,v,w 皆是正数,且

$$a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\leqslant b^{\frac{1}{p}}, \quad ②$$
$$u^{\frac{1}{p+1}}+w^{\frac{1}{p+1}}\geqslant v^{\frac{1}{p+1}}, \quad ③$$

则当 $p>0$ 时,

$$ubc - vca + wab \geqslant 0, \quad ④$$

当 $-1 < p < 0$ 时，不等式③与④反向，当 $p < -1$ 时，要求②与③反向．在每一种情形，欲使④取等号，必要且只要②与③均取等号，且

$$\frac{a^{p+1}}{u^p} = \frac{b^{p+1}}{v^p} = \frac{c^{p+1}}{w^p}.$$

参考文献　[43,pp.159～160],[42,p.64].

（陈永林）

Redheffer 递归不等式（Redheffer recursive inequality）　设 $D_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是给定的集合，且 $f_i = f_i(a_1,\cdots,a_i)$ 与 $g_i = g_i(a_1,\cdots,a_i)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是实值函数，其中 $a_i \in D_i(i = 1, 2,\cdots,n)$. 关于实参数 $\mu_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的不等式

$$\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_n f_n \leqslant g_1 + \cdots + g_n \quad ①$$

称为递归的，若存在函数 $F_i(\mu)$ 使得

$$\sup_{a_i \in D_i}(\mu f_i - g_i) = F_i(\mu) f_{i-1}(i = 1,2,\cdots,n; f_0 = 1), \quad ②$$

R. Redheffer 在 1967 年给出了递归不等式的上述定义，并证明了如下的定理：

为使上面定义的递归不等式对于所有的 $a_i \in D_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 成立必要且只要存在实数 $\delta_i(i = 1,2,\cdots,n)$，使 $\delta_1 \leqslant 0, \delta_{n+1} = 0$ 且

$$\mu_i = F_i^{-1}(\delta_i) - \delta_{i+1}(i = 1,2,\cdots,n), \quad ③$$

其中 $F_i^{-1}(\delta)$ 是方程　$F_i(\mu) = \delta$ 的一个解．

我们对 n 用归纳法来证明这个定理．显然，当 $n = 1$ 时定理成立．假定它对于 $n - 1$ 成立，为使不等式对 n 成立，必要且只要当它将除了 a_n 外的其他变元看做常数而 a_n 任意选取时成立．由于不等式是递归的，利用归纳假设，我们得到定理的对于 $i \leqslant$

$n-2$ 的各个关系式以及

$$F_n(\mu_n)+\mu_{n-1}=F_{n-1}^{-1}(\delta_{n-1}).$$

因此，若定义 $\delta_n=F_n(\mu_n)$，就可看出定理对于 n 是成立的．从而完成了证明．

Redheffer 的定理提出了推广各种已知不等式的一种方法．作为例子，我们来考察不等式：

$$\mu_1G_1+\cdots+\mu_nG_n\leqslant\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n,\tag{④}$$

其中 $\lambda_i>0$ 是给定实数，G_i 是 $a_1,\cdots,a_i$ 的几何平均值，而 μ_i 是使不等式④对一切 $a_i>0$ 成立的待定参数．

不等式④是递归的．为此，考察恒等式

$$\mu G_i-\lambda a_i=G_{i-1}(\mu t-\lambda t^i),$$

其中 $t^i=\dfrac{a_i}{G_{i-1}}$，$i>1$ 且 $\lambda=\lambda_i$．由此得出

$$F_i(\mu)=\begin{cases}(i-1)\lambda^{\frac{1}{1-i}}\left(\dfrac{\mu}{i}\right)^{\frac{i}{i-1}} & (\mu\geqslant 0),\\ 0 & (\mu<0).\end{cases}$$

因此，当 $\mu\leqslant\lambda_1$ 时，$F_1(\mu)=0$，当 $\mu>\lambda_1$ 时，$F_1(\mu)=+\infty$．由于 $F_i(\mu)\geqslant 0$ 意味着 $\delta_i\geqslant 0$，所以可令

$$\delta_i=(i-1)\beta_i^{\frac{1}{i-1}},$$

则有

$$\mu_i=i\left((\lambda_i\beta_i)^{\frac{1}{i}}-\beta_{i+1}^{\frac{1}{i}}\right).$$

这里 β_i 是适合 $\beta_1\leqslant 1,\beta_i\geqslant 0$ 与 $\beta_{n+1}=0$ 的任意实数．取 $\beta_i=\mathrm{e}^{(i-1)t}(t>0)$，则据拉格朗日定理，有

$$i\left(\beta_i^{\frac{1}{i}}-\beta_{i+1}^{\frac{1}{i}}\right)>-t\mathrm{e}^t.$$

假定 $a_1,\cdots,a_n$ 不全为零，且令 $\lambda_i=1$，则得

$$G_n < A_n e^{-t} + t\frac{G_1 + \cdots + G_n}{n} \ (t > 0), \qquad ⑤$$

其中 A_n 是 $a_1,\cdots,a_n$ 的算术平均值,G_i 是 $a_1,\cdots,a_i$ 的几何平均值 $(i = 1,2,\cdots,n)$.

参考文献 [43,pp.173～175].

（陈永林）

Carleman 不等式(Carleman inequality) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数,记 $a_1,\cdots,a_i$ 的几何平均值为 $G_i(i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$G_1 + \cdots + G_n < e(a_1 + \cdots + a_n). \qquad ①$$

不等式①是 T. Carleman 于 1923 年得到的.

事实上,若在哈代-兰道不等式中用 $a_i^{\frac{1}{p}}$代替 a_i,则得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}} + \cdots + a_i^{\frac{1}{p}}}{i}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

令 $p \to +\infty$,则因

$$\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}} + \cdots + a_i^{\frac{1}{p}}}{i}\right)^p \to (a_1\cdots a_i)^{\frac{1}{i}} = G_i, \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \to e,$$

所以立刻得到不等式①.

另外,不等式①也可用 Redheffer 不等式⑤(参见 **Redheffer 递归不等式**)得到:

令 $t = \frac{G_n}{G} - 1$, 这里 $G = \frac{1}{n}(G_1 + \cdots + G_n)$, 则

$$e(a_1 + \cdots + a_n) \geqslant e^{\frac{G_n}{G}} nG.$$

因为 $e^{\frac{G_n}{G}} > 1$, 所以可得出不等式①.

参考文献 [42,p.239,p.249],[43,p.175].

（陈永林）

（二）特殊不等式

Hlawka 不等式（Hlawka inequality） 设 R^m 表示 m 维实的 Euclid 向量空间．向量 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 的范数定义为

$$|a|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_m^2}.$$

则对任何 $a,b,c\in R^m$，有

$$|a|+|b|+|c|-|b+c|-\\|c+a|-|a+b|+|a+b+c|\geqslant 0. \quad ①$$

不等式①可由范数的三角不等式以及下面的 Hlawka 恒等式推出：

$$(|a|+|b|+|c|-|b+c|-|c+a|-|a+b|+\\|a+b+c|)(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|)\\=(|b|+|c|-|b+c|)(|a|-|b+c|+|a+b+c|)\\+(|c|+|a|-|c+a|)(|b|-|c+a|+|a+b+c|)\\+(|a|+|b|-|a+b|)(|c|-|a+b|+|a+b+c|). \quad ②$$

Hlawka 得到恒等式②与不等式①的确切年代，文献中似无记载．据 Mitrinović与 Vasić的著作《分析不等式》所述推断，①与②出现的年代大约在 1942 年之前．

D. D. Adamović于 1964 年得到了不等式①的一个推广：

设 $a_i\in R^m(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$(n-2)\sum_{i=1}^n|a_i|+\left|\sum_{i=1}^n a_i\right|\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i+a_j|(n\geqslant 2). \quad ③$$

D. Z. Djoković于 1963 年证明了更一般的不等式：

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}|$$

$$\leqslant\binom{n-2}{k-2}\left(\frac{n-k}{k-1}\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\right). \qquad ④$$

参考文献 [43,pp. 227～231].

（陈永林）

Hornich 不等式(Hornich inequality) 设 $a\in R^m$,$a_i\in R^m$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且适合 $\sum_{i=1}^{n}a_i=-ta$. 若 $t\geqslant 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i+a|-|a_i|)\leqslant(n-2)|a|; \qquad ①$$

若 $t<1$，则①未必成立.

下面来证明①. 由 Hlawka 恒等式得

$$\max(|a_i+a|-|a_i|+|a_j+a|-|a_j|)$$
$$\leqslant|a_i+a_j+a|-|a_i+a_j|+|a|. \qquad ②$$

②中的 max 是对所有使得 a_i+a_j 为常向量的 a_i 与 a_j 取的. 由②可以看出①式左边的和数中，当用向量 $0,a_1+a_2,a_3,\cdots,a_n$ 来代替向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 时，和的值不会减少. 同理，所得的新和数在用 $0,0,a_1+a_2+a_3,a_4,\cdots,a_n$ 来代替向量 $0,a_1+a_2,a_3,\cdots,a_n$ 时，其值仍不会减少. 重复这一过程即可推出

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i+a|-|a_i|)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(|b_i+a|-|b_i|), \qquad ③$$

其中 $b_1=\cdots=b_{n-1}=0,b_n=a_1+\cdots+a_n$，即，

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i+a|-|a_i|)$$

$$\leqslant (n-1)|a| + |a_1 + \cdots + a_n + a| - |a_1 + \cdots + a_n|.$$

应用已知条件得

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i + a| - |a_i|)$$
$$\leqslant (n-1-|t|)|a| + |t-1||a|.$$

当 $t \geqslant 1$ 时，$|t-1| - |t| = -1$，由此推出不等式①.

H. Hornich 于 1942 年给出的一个不等式是不等式①的特殊情形，其证明很长．上面的不等式①及其证明是 D. E. Djoković于 1963 年给出的．

参考文献 [43,pp. 230～231].

（陈永林）

四 数 列

节气晷长 凡八节二十四气，气损益九寸九分、六分分之一．冬至晷长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸．问次节损益寸数长短各几何？

本题是我国最古老的天文著作《周髀算经》（公元前 2 世纪）中说明测算 24 个节气的方法：立一根 8 尺标竿，在每天正午时刻测量影（晷）长．定义一年中晷最长的那天为冬至，晷最短的那天为夏至，然后在夏至到冬至之间，冬至到次年夏至之间各安排 11 个节气，每相邻两个节气的晷长相差（气损益）$99\frac{1}{6}$分，即组成以$99\frac{1}{6}$为公差的等差数列．它们分别是：

晷长(分)	160	$259\frac{1}{6}$	$358\frac{2}{6}$	$457\frac{3}{6}$	$556\frac{4}{6}$	$655\frac{5}{6}$	755	$854\frac{1}{6}$
节　气	夏至	小暑	大暑	立秋	处暑	白露	秋分	寒露
晷长(分)	$953\frac{2}{6}$	$1\,052\frac{3}{6}$	$1\,151\frac{4}{6}$	$1\,250\frac{5}{6}$	1 350	$1\,250\frac{5}{6}$	$1\,151\frac{4}{6}$	$1\,052\frac{3}{6}$
节　气	霜降	立冬	小雪	大雪	冬至	小寒	大寒	立春
晷长(分)	$953\frac{2}{6}$	$854\frac{1}{6}$	755	$655\frac{5}{6}$	$556\frac{4}{6}$	$457\frac{3}{6}$	$358\frac{2}{6}$	$259\frac{1}{6}$
节　气	雨水	惊蛰	春分	清明	谷雨	立夏	小满	芒种

参考文献 [31:p.63].

（眭秋生）

竹节容升 今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升，问中间二节欲均容，各多少？

本题是《九章算术》卷六“均输”的第19题．

一根九节的竹子，下粗上细，均匀生长．下一节的容量比上一节的容量多出的升数总是相同的．所以这是一个等差数列问题．

设自上而下各节的容量为 $a_1,a_2,\cdots,a_9$，组成公差为 d 的等差数列，则根据题意

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=3,\\ a_7+a_8+a_9=4.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4a_5+10d=3,\\ a_5+3d=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

解得 $d=\dfrac{7}{66}, a_5=\dfrac{4}{3}-\dfrac{7}{66}\times 3=1\dfrac{1}{66}.$

于是自上而下各节的容量(升)依次为

$$\frac{39}{66},\frac{46}{66},\frac{53}{66},\frac{60}{66},1\frac{1}{66},1\frac{8}{66},1\frac{15}{66},1\frac{22}{66},1\frac{29}{66}.$$

参考文献 [31,p.196].

(眭秋生)

女子善织 今有女善织,日益功疾.初日织五尺,今一月织九匹三丈,问日益几何?

本题是《张邱建算经》上卷第22题.

题中的织女一天比一天织得快,第一天织5尺,一个月(30天)共织390尺(每匹为40尺).问每天增加几尺?这是等差数列问题,已知首项、项数及和,求公差.

由 $S_n=\frac{n}{2}\{a+[a+(n-1)d]\}$,得

$$390=\frac{30}{2}\{5+[5+(30-1)d]\},$$

故 $d=\frac{16}{29}$(尺)$=5\frac{15}{29}$(寸).

《张邱建算经》中已有系统的等差数列理论,是世界上最早的.

参考文献 [31,p.347],[1,p.81].

(眭秋生)

女不善织 今有女子不善织,日减功迟.初日织五尺,末日织一尺,今三十日织讫.问织几何?

本题是《张邱建算经》上卷第23题,也是等差数列问题:已知首项a_1、末项a_n和项数n,求和S_n.张邱建的解法为"并初、末日织尺数,半之,余以乘织讫日数,即得".换句话说,张邱建已给出公式

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n.$$

对这一具体问题,有

$$S_n=\frac{5+1}{2}\times 30=90(尺).$$

参考文献 [31,p.347],[1,p.81].

(眭秋生)

分钱问题 今有与人钱．初一人与三钱，次一人与四钱，次一人与五钱，以次与之，转多一钱，与讫，还敛聚与均分之，人得一百钱，问人几何？

本题是《张邱建算经》上卷第32题．意思是：将钱分给若干人．第一人给3钱，第二人给4钱，第三人给5钱，依此类推，每人比前一人多给1钱．分完后，再把钱收回平分给各人，结果每人分得100钱．问有多少人？

原书给出的解法是："置人得数，以减初人得数，余倍之，以转多钱数加之，即得人数．"即

$$(100-3)\times 2+1=195(\text{人}).$$

实际上，这是一道求等差数列项数的问题，即：已知 $S_n=100n$，$a_1=3$，$d=1$，求 n．将已知数值代人公式 $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$ 得

$$100n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1,$$

即 $$2(100-3)=n-1,$$

于是 $$n=(100-3)\times 2+1=195.$$

注：当 $d\neq 1$ 时，原题术文（解法）就不适用了．如果在术文"即得人数"四个字前面添上"再以转多钱数除之"一句，则无论 d 是否为1均适用了．

参考文献 [31，p.353]．

（张恩华）

茭草垛问题 今有茭草积一千四百八十五束，问底面几何？

本题选自朱世杰《算学启蒙》(1299)．题意是：有一茭草垛，共计1485束，第一层1束，第二层2束，以下各层依次增加1束．问底层茭草有多少束？

此题为已知茭草垛束数总和，求底层束数问题．由于本题层数与底层束数相等，所以就是求茭草垛层数问题，即已知 $1+2+$

$3+\cdots+n=1\,485$，求 n. 因为 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $\dfrac{n(n+1)}{2}=1\,485$，即 $n^2+n-2\,970=0$. 解此方程，取正根，得 $n=54$.

参考文献 [50,pp. 122～123].

（张恩华）

分面包问题（The problem of distributing some breads） 100只面包5个人分，从第二个人起，依次比前一个人多分得相同数量的面包．此外还知道开始两人所得总数是其余三人所得总数的七分之一．问每人各得多少？

本问题出自兰德纸草书．

设第一人得面包数是 x，后一人比前一人多得的面包数是 y，则第二人得面包数为 $x+y$，第三人得面包数为 $x+2y$，第四人得面包数为 $x+3y$，第五人得面包数为 $x+4y$. 由题意得

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \quad ①$$

$$7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y). \quad ②$$

化简①式得 $x+2y=20$， ③

化简②式得 $11x=2y$. ④

联立③、④两式，解得 $x=1\dfrac{2}{3}$，$y=9\dfrac{1}{6}$.

所以，5个所得面包数分别为

$$1\frac{2}{3};10\frac{5}{6};20;29\frac{1}{6};38\frac{1}{3}.$$

参考文献 [18,pp. 41～44,p. 54],[29,pp. 149～152].

（葛 军）

Nichomachus 问题（Nichomachus' problem） 试证明：如果把

由所有奇数组成的数列从 1 开始加以分组，第一组只有一项，即 1，第二组有两项，即 3，5，以后每组递增一项，则每一组的和皆等于该组项数的立方．

公元 100 年前后的古希腊学者 Nichomachus 在他所著的《算术入门》一书中提出这一问题．《算术入门》在相当长的时期内，被作为数学教科书．阿拉伯数学家 al-Karaji 在 11 世纪前后用几何图形给出证明．

通过直接验证可知

$$1 = 1^3,$$

$$3 + 5 = 8 = 2^3,$$

$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3,$$

$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3,$$

等等．一般情形证明如下：

前 $(n-1)$ 组数的总个数为

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

于是，第 $(n-1)$ 组的最末一个数是

$$2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n(n-1) - 1.$$

由此推得第 n 组的第一个数是

$$n(n-1) - 1 + 2 = n(n-1) + 1,$$

最后一个数是

$$n(n-1) + 1 + 2(n-1) = n^2 + n - 1.$$

所以，第 n 组各项之和为

$$\frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2} \cdot n = n^3.$$

参考文献 [51,p.219,pp.221～222],[27,p.7,pp.84～85].

（葛 军 张恩华）

斯图姆问题(Sturm's problem) 一个邮递员从 A 城出发,第一天行程为 10 里约(里约为法国旧长度单位,1 里约约等于 4.5 公里),以后每天比前一天多走$\frac{1}{4}$里约．三天后,第二个邮递员从距 A 城 40 里约的 B 城沿与第一个邮递员相同的方向前进,他头一天行程为 7 里约,以后每天比前一天多走$\frac{2}{3}$里约．问第一个邮递员出发几天后两人相遇?

本题是由法国数学家斯图姆提出并解决的．

设 x 天两人相遇,第一个邮递员的总路程是一个等差数列前 x 项之和

$$10+\left(10+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(10+\frac{x-1}{4}\right)$$
$$=\frac{(79+x)x}{8}\text{(里约)}.$$

第二个邮递员走了 $x-3$ 天,总路程为

$$7+\left(7+\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left[7+\frac{(x-4)\times 2}{3}\right]$$
$$=\frac{(17+x)(x-3)}{3}\text{(里约)}.$$

由题意得

$$\frac{(79+x)x}{8}-\frac{(17+x)(x-3)}{3}-40=0,$$

即
$$5x^2-125x+552=0, \quad ①$$

解之,得 $x_1=5.72\cdots, x_2=19.27\cdots$

这两个根不是整数,没能回答题目所问．但从它们的整数部分,可知他们两人两次相遇的时间:第一次是 5 天后,第二次是 19 天后．

进一步地，验证上述两个答案．

设第一个邮递员 x 天后总行程为 a，第二个总行程加上 40 为 b，同上做法，得

$$5x^2 - 125x + 552 = 24(b - a). \quad ②$$

现分别将 $x = 5$ 和 $x = 6$ 代人方程①或恒等式②之左端，则前一个结果大于 0，后一个结果小于 0. 故对照②式得，在第 5 天末，$a < b$，而在第 6 天末，$a > b$. 这就是说，第一次相遇在第五天后，即第 6 天内．

同样道理可证，第二次相遇是在第 19 天之后，第 20 天内．

其实，容易明白这两次相遇的可能性. 第一个邮递员的速度原比第二个快，故在第 6 天赶过第二个邮递员．但第二个邮递员的速度增长得比第一个快，在第 14 天两人速度相同，以后第二个速度大于第一个，故在第 20 天又赶上了第一个邮递员，两人第二次相遇．

参考文献 [14，pp. 161～163]，[27，p. 41，pp. 221～223].

（葛 军）

望堤 今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色．问各几何？

本题是《孙子算经》下卷第 34 题，是一个等比数列问题．答案是有 9 堤，$9^2 = 81$ 木，$9^3 = 729$ 枝，$9^4 = 6\,561$ 巢，$9^5 = 59\,049$ 禽，$9^6 = 531\,441$ 雏，$9^7 = 4\,782\,969$ 毛，$9^8 = 43\,046\,721$ 色．

在古埃及纸草书中已有一题画着格子，各格之间写着 7，49，343，2 401，16 807五个数，旁边注有人，猫，鼠，大麦，容器等字．后人揣测题意："今有 7 人，每人有 7 猫，每猫食 7 鼠，每鼠食 7 个麦穗，每个麦穗可长成 7 容器的麦粒．求各项数为多少？"

参考文献 [31，p. 321]，[49，p. 318].

（眭秋生）

棋盘放米问题(The problem of putting rice into chessboard) 传说古代印度有一个人发明了国际象棋,棋盘为64个方格.献给国王后,国王玩得很高兴,便问那人要何赏赐.那人说:“第一格一粒米,第二格两粒米,第三格四粒米,…,总之,每一格比前一格放米多一倍.我只要这么多米.”国王一听,认为这点米算不了什么,就满口答应了.却不料,那人领米时,所有仓库的米也不够给他.请算一算,究竟要给他多少粒米?

这是一道等比数列求和问题.所需米粒数为

$$
\begin{aligned}
&1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{64-1}\\
&=2^{64}-1\\
&=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.
\end{aligned}
$$

参考文献 [58,p.23].

(张恩华)

买马问题(Problem of buying a horse) 有人卖一匹马,得156元钱.但买主买了后又反悔,将马退给卖主说:“这马根本不值这么多钱.”于是卖马人提出新的条件:“如果你嫌这马价钱贵,那你就只买它的马蹄铁上的钉子好了,马可以白送.每一马蹄铁上有6个钉子,第一个钉子只要给我1/4分钱,第二个钉子1/2分钱,第三个钉子1分钱,依此类推下去.”买主被这廉价交易打动了心,就接受了卖马人的条件,心里估算着,钉子总共花不了10元钱,我就白得了一匹马.请问:买主究竟要花多少钱?

本题是一道趣味名题.买主为马蹄铁上的24个钉子要付

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{24-3}\\
&=2^{22}-\frac{1}{4}=4\,194\,303\,\frac{3}{4}\,(\text{分钱}),
\end{aligned}
$$

即大约42000元钱.卖马人在这样的条件下,当然乐意把马白送了.

参考文献 [60,p.32].

（张恩华）

Hanoi 塔问题（The towers of hanoi problem） 设有甲、乙、丙三根针，在甲针上插有从小到大的 n 个圆片，最大的一片在最下层（呈塔形）. 现在要将这些圆片插到乙针上去，而每次仅能移动一片，并且要求每次移动时，不能将大圆片置于小圆片之上，丙针可作辅助用. 设把甲针上的 n 个圆片全部移到乙针所需的最少次数为 a_n，试求：(1) a_1, a_2, a_3；(2) a_n.

本题即魔针问题，也称为“世界末日”问题，来源于印度的一个古老的传说：相传在佛教圣地贝那勒斯的一个寺庙里，有一块黄铜板，板上插着三根宝石针，印度教的主神梵天在创世时，在第一根针上，自下而上串上了由大到小的 64 块金片，这就是 Hanoi 塔. 不论白天黑夜，寺内都有一个僧人按照上面所说的规定移动金片. 神预言，当这 64 片金片都移到一个针上时，世界末日就来临了.

我们来算算 a_{64} 究竟是多少. 如果 a_n 的公式求得，a_{64} 就得知了.

(1) 当甲针上只有一个圆片时，只需移动一次就可将它移到乙针上，所以 $a_1 = 1$.

当甲针上有两个圆片时，必须利用丙针作过渡，即先将第一片移到丙针上，再将第二片移到乙针上，最后将丙针上的小圆片移到乙针上，这样就完成了. 因此，$a_2 = 3$.

当甲针上有三个圆片时，由于必须一片一片地移，并且大的不许压在小的上面，所以，想要移动甲针上最底下的一个圆片，就必须将上面的两片小的先移到丙针上（这就需要 $a_2 = 3$ 次），然后就可以将最大的第三片从甲针上移到乙针上（又是 1 次），最后再将丙针上的两片通过甲针移到乙针上（又要 $a_2 = 3$ 次）. 于是，一共要 $2a_2 + 1 = 7$ 次，因此，$a_3 = 7$.

(2) 仿照以上思考过程，应有

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (a_1 = 1)$$

或
$$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1) \qquad (a_1 + 1 = 2).$$

数列$\{a_n+1\}$是等比数列，公比为2，首项为$a_1 + 1 = 2$，因此

$$a_n + 1 = (a_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

所以
$$a_n = 2^n - 1 \qquad (n = 1,2,3,4,\cdots).$$

特别地，$a_{64} = 2^{64} - 1$. 如果移动一次需要1秒，那么$(2^{64} - 1)$秒≈ 58万亿年. 这是一个非常长的时间(现代科学家估计，太阳系的寿命不过200亿年).

注：关于解Hanoi塔问题的种种算法的研究，可参阅《邮票·自行车·雨中行》一书中收录的《Hanoi塔问题及算法分析》一文.

参考文献 [55,p.195],[59,p.8].

(张恩华)

积罂求数 假令积罂，最上行纵广各二罂，最下行各十二罂，行行相次(先以上行二相次，率至十二，当十一行也)，求罂数.

本题是宋代科学家沈括(1031～1095)所著《梦溪笔谈》第十八卷的第4条. 意思是：一堆整齐堆放的酒坛，每一层都摆成正方形，最上层长宽各为2个，最下层长宽各12个，相邻两层长、宽各相差1个. 从最上层的2个往下直至底层的12个，共有11层. 求这堆酒坛的总数. 这是数列求和问题，即求

$$S = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 12^2.$$

在沈括以前，这类问题都用刍童的体积公式计算(见**刍童求积**). 沈括指出这样得出的结果是不准确的，因为由棋子、酒坛等垛成的堆体中间有空隙，不能用体积公式来计算，而应该用由他首创的"隙积术"来计算. 一般地，对于上、下都是矩形的坛堆，设最上层宽是a个，长是b个；最下层(底层)宽是c个，长是d个，共有n层，则

$$S = ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \cdots + cd$$
$$= \frac{n}{6}[a(2b+d) + c(2d+b)] + \frac{n}{6}(c-a).$$

沈括应用这个公式算出正确的答案为 649 个．而用刍童公式计算，结果是 630 $\frac{2}{3}$ 个，显然是错误的．

沈括开创了高阶等差数列求和的研究．后来南宋的杨辉、元代的朱世杰等进一步得到不少高阶等差数列的求和公式，杨辉的方法称为"垛积术"，朱世杰的方法称为"垛积招差术"．例如，杨辉在《详解九章算法》中就有：

果子垛 $S = ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \cdots + (c-1)(d-1) + cd$

$$= \frac{n}{6}[(2b+d)a + (2d+b)c] + \frac{n}{6}(c-a),$$

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$
$$= \frac{n}{3}(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right);$$

方　垛 $S = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \cdots + (b-1)^2 + b^2$

$$= \frac{n}{3}\left(a^2 + b^2 + ab + \frac{b-a}{2}\right);$$

三角垛 $S = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

等等．

参考文献　[48,p.134],[1,pp.187～197].

（眭秋生）

隙积术　见积羃求数．

垛积术　见积羃求数．

四隅垛求积问题　果子一垛，下方一十四个，问计几何？

本题选自杨辉《详解九章算法》. 题意是：有堆积成正四棱锥状的果子一垛，顶层1个，底层每边14个．问这垛果子共有多少个？

该题是“求前 n 个自然数的平方和”的特例 ($n=14$). 原题所给解法为“下方加一，乘下方为平积，又加半为高，以乘下方为高积，如三而一”，即：设果子总数为 S_n，底层每边个数为 n，则

$$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

当 $n=14$ 时，有

$$S_{14}=\frac{1}{3}\times 14\times 15\times\frac{29}{2}=1\,015.$$

参考文献 [50, pp. 119～120].

（张恩华）

如象招数 今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，每人每日支钱二百五十文，已招二万三千四百人，支钱二万三千四百六十二贯．问招来几日？

本题是朱世杰的《四元玉鉴》卷十中的一题．意思是：按立方数招兵，第一天招 3^3 个人，以后每天招的人数是下一个立方数．每人每天发饷250文钱，已招23 400人，发钱23 462贯．问共招了几天？即已知

$$3^3+(3+1)^3+(3+2)^3+\cdots+(3+n-1)^3=23\,400,$$

求 n（本题中，250文与23 462贯是多余的条件）.

元代数学家朱世杰发明“招差术”来解决这一类问题．招差术即现代的差分法．

按朱世杰的方法，把每日招兵数及各阶差列成下表：

第一天		第二天		第三天		第四天		第五天	…
27		64		125		216		343	
	37		61		91		127		
		24		30		36			
			6		6				

他的招差公式，即高阶等差数列的和

$$S_n = n\Delta + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3 + \frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4 + \cdots$$

用 $S_n = 23\,400, \Delta = 27, \Delta^2 = 37, \Delta^3 = 24, \Delta^4 = 6$（以下各阶差分为 0）代入并加整理，得

$$n^4 + 10n^3 + 37n^2 + 60n - 93\,600 = 0.$$

解得　$n = 15$（天）.

参考文献　[1, p. 200].

（睦秋生）

招差术　见如象招数.

落一形问题　今有茭草六百八十束，欲令落一形埵之，问底子几何？

本题选自朱世杰《四元玉鉴》.

意思是：现有茭草 680 束，想把它堆成落一形（即三角垛），问底层每边有几束？

原题术文为："立天元一为落一底子，如积求之，得四千八十为益实，二为从方，三为从廉，一为正隅，立方开之，合问."即：设 x 为落一形底子的束数，以 $680 \times 6 = 4\,080$ 为常数项（负），2 为一次项系数，3 为二次项系数，1 为三次项系数，得三次方程 $x^3 + 3x^2 + 2x - 4\,080 = 0$，解之即得所求.

本题为落一形（又叫三角垛）问题，所求之底层每边的束数即为该种堆垛的层数. 落一形的堆法为：第一层 1 束，第二层 $(1+2)$ 束，第三层 $(1+2+3)$ 束，…，第 n 层 $(1+2+3+\cdots+n)$ 束. 故本题即为：已知

$1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n)$

$=680$,

求 n. 因为

$$\begin{aligned}&1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\\&+(1+2+3+\cdots+n)\\=&\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\Big)\\=&\frac{1}{2}\Big[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\Big]\\=&\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),\end{aligned}$$

故方程为 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=680$, 即 $n^3+3n^2+2n-4\,080=0$（与术文表达式一致）. 解此方程可得 $n=15$, 此即为所求.

参考文献 [50,pp.123～124].

（张恩华）

撒星形问题 今有茭草一千八百二十束，欲令撒星形垛之，问底子几何？

本题选自朱世杰《四元玉鉴》. 意思是：现有茭草1 820束，想把它们堆成撒星形（即四角垛）. 问底层每边有几束？

原题术文为："立天元一为撒星形底子，如积求之，得四万三千六百八十为益实，六为从方，一十一为从廉，六为从下廉，一为正隅，三乘方开之，合问."即：设 x 为撒星形底边的束数，以 $1\,820\times24=43\,680$ 为常数项（负），6 为一次项系数，11 为二次项系数，6 为三次项系数，1 为四次项系数，得四次方程 $x^4+6x^3+11x^2+6x-43\,680=0$, 解之即得所求.

本题是撒星形（又叫三角落一形）问题. 撒星形各层为落一形（即三角垛），其堆法是：第一层 1 束，第二层 $(1+3)$ 束，第三层 $(1+3+6)$ 束，第四层 $(1+3+6+10)$ 束，…，第 n 层 $(1+3$

$+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$)束. 故此题即为：已知

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left[1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right]=1\,820,$$

求 n. 因为

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left[1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n-1)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

故 $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)=1\,820,$

即 $n^4+6n^3+11n^2+6n-43\,680=0$（与术文表达式相同）.

解此方程可得 $n=13$，此即为所求.

参考文献 [50,pp.124~126].

（张恩华）

撒星更落一形问题 今有茭草八千五百六十八束，欲令撒星更落一形埵之，问底子几何？

本题选自朱世杰《四元玉鉴》. 意思是：现有茭草8 586束，想把它们堆成撒星更落一形，问底层每边几束？

原题术文为："立天元一为撒星更落一底子，如积求之，得一百二万八千一百六十为益实，二十四为从方，五十为从上廉，三十五

为从二廉，一十为从三廉，一为正隅，四乘方开之，合问."即：设 x 为撒星更落一底层每边束数，以 $8\,568\times120=1\,028\,160$ 为常数项(负)，24 为一次项系数，50 为二次项系数，35 为三次项系数，10 为四次项系数，1 为五次项系数，得五次方程 $x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x-1\,028\,160=0$，解之可得所求.

本题是撒星更落一形问题. 撒星更落一形的堆法是：第一层 1 束，第二层 $(1+4)$ 束，第三层 $(1+4+10)$ 束，第四层 $(1+4+10+20)$ 束，…，第 n 层 $\left[1+4+10+20+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]$ 束. 题中所求的底层每边的束数，就是这种堆垛的层数. 所以该题是已知总束数，求撒星更落一形层数的问题，即：已知

$$1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots+\left[1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]=8\,568,$$

求 n. 因为

$$\begin{aligned}
&1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots+\left[1+4+10+\cdots+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]\\
=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{24}k(k+1)(k+2)(k+3)\\
=&\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}(k^4+6k^3+11k^2+6k)\\
=&\frac{1}{24}\left(\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}+6\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}+11\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\times\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
=&\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),
\end{aligned}$$

即 $n^5+10n^4+35n^3+50n^2+24n-1\,028\,160=0$（与术文表达式一致）.

解此方程可得 $n=14$，即为所求.

参考文献 [50,pp.126～128].

（张恩华）

三角撒星更落一形问题 今有三角撒星更落一形，果子积九百二十四个，问底子几何？

本题选自朱世杰《四元玉鉴》.意思是：现有果子 924 个，堆成三角撒星更落一形，问底层每边有几个？

原题术文为："立天元一为三角撒星更落一形底子，如积求之，得六十六万五千二百八十为益实，一百二十为从方，二百七十四为从上廉，二百二十五为从二廉，八十五为从三廉，一十五为从四廉，一为正隅，五乘方开之，合问."即：设 x 为三角撒星更落一形底层每边的个数，以 $924\times720=665\,280$ 为常数项（负），分别以 120、274、225、85、15、1 为一次项系数、二次项系数、三次项系数、四次项系数、五次项系数、六次项系数，得六次方程

$$x^6+15x^5+85x^4+225x^3+274x^2+120x-665\,280=0,$$

解之可得所求.

本题为三角撒星更落一形问题.三角撒星更落一形的堆法是：第一层 1 个，第二层 $(1+5)$ 个，第三层 $(1+5+15)$ 个，第四层 $(1+5+15+35)$ 个，…，第 n 层

$$\left[1+5+15+35+\cdots+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)\right]\text{束}.$$

题中所求底层每边的个数，就是求这种堆垛的层数.故此题即为：已知

$$f(n)=1+(1+5)+(1+5+15)+(1+5+15+35)$$
$$+\cdots+\left[1+5+15+35+\cdots+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)\right.$$

$$(n+3)\Big]$$
$$=924,$$

求 n. 因为

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{120}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$
$$=\frac{1}{120}\left(\sum_{k=1}^{n}k^5+10\sum_{k=1}^{n}k^4+35\sum_{k=1}^{n}k^3+50\sum_{k=1}^{n}k^2+24\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{120}\Big[\frac{n^2(n+1)(2n^3+4n^2+n-1)}{12}$$
$$+10\times\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}+35\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$+50\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+24\times\frac{n(n+1)}{2}\Big]$$
$$=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

故 $\quad \frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)=924,$

即 $\quad n^6+15n^5+85n^4+225n^3+274n^2+120n-665\,280=0$

(与术文表达式一致).

解此方程可得 $n=7$, 即为所求.

参考文献 [50,pp.129~131].

注: 以上四个条目为四种垛积的数列问题, 均为已知前 n 项之和, 求项数 n. 这几个数列均为高阶等差数列, 这类数列的求和公式可以归结为如下公式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p!}k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+p-1)$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p).$$

(张恩华)

自然数幂和问题(The problem for the sum of natural numbers

power） 求前 n 个自然数的 m 次方幂之和

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m \text{（}m\text{ 为自然数）}$$

的计算公式.

这是一个很古老的问题.

众所周知，当 $m = 1$ 时，有

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$m = 2$ 时的计算公式，早在公元前 200 多年时就被阿基米德求得：

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \end{aligned}$$

他是用几何方法证明的.

$m = 3$ 时的计算公式由 Nichomachus 给出. 他先列出

$$\begin{aligned} &1^3 = 1, \\ &2^3 = 3 + 5, \\ &3^3 = 7 + 9 + 11, \\ &4^3 = 13 + 15 + 17 + 19, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

利用这种特殊关系，再根据连续奇数和公式，他归纳得出立方和公式：

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

印度的 Brahmagupta 和 Bhāskara 都考虑过立方数的和，如

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\left(\frac{1}{2}\times10\times11\right)^2.$$

公元11世纪，中亚细亚的al-Kāshī提出立方和公式及四次方和公式，后者可写成

$$\begin{aligned}S_4=\sum_{k=1}^{n}k^4&=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4\\&=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n),\end{aligned}$$

被称为al-Kāshī恒等式.

我国清代中叶的陈世仁(1676～1722)，在所著《少广补遗》一书中，记载了继杨辉

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

之后提出的许多垛积公式，如连续奇数和公式以及

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1),$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1),$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n}{2}(1+n)\right]^2.$$

日本数学家关孝和吸收我国数学家的有关成果，对高阶等差数列又有创新，所著《括要算法》卷一是垛积总术，其中"垛积求解"创立了当 $m=1,2,3,\cdots,11$ 时的自然数幂和的公式. $m\geqslant4$ 时前 n 项和的公式如下：

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{12}(2n^6+6n^5+4n^3-n^2),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{42}(6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{24}(3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^8=\frac{1}{90}(10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^9=\frac{1}{20}(2n^{10}+10n^9+14n^8-14n^6+10n^4-3n^2),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{10}=\frac{1}{66}(6n^{11}+33n^{10}+54n^9-66n^7+66n^5-33n^3+4n),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{11}=\frac{1}{24}(2n^{12}+12n^{11}+22n^{10}-33n^8+44n^6-33n^4+10n^2).$$

我国清末数学家李善兰在《垛积比类》卷二中专题讨论了自然数幂和的公式，比关孝和的结果又进了一大步. 关于和

$$\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m,$$

李善兰认为 k^m 可以用 m 个 m 阶三角垛(拟形数)表示，如

$$k^2=\frac{1}{2!}k(k+1)+\frac{1}{2!}(k-1)k,$$

$$k^3=\frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)+4\cdot\frac{1}{3!}(k-1)k(k+1)$$
$$+\frac{1}{3!}(k-2)(k-1)k,$$

……

一般地，记 $\frac{1}{m!}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)$ 为 $\binom{k}{m}$，那么

$$k^m=A_1^m\binom{k}{m}+A_2^m\binom{k-1}{m}+\cdots+A_m^m\binom{k-m+1}{m}.$$

因此，据朱世杰揭示的三角垛前 n 项和与通项的关系，得

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = A_1^m \binom{n}{m+1} + A_2^m \binom{n-1}{m+1} + \cdots + A_m^m \binom{n-m+1}{m+1}.$$

《垛积比类》卷二附表按 m 的值显示这些 A_j^m 值，而且还给出上、下两层间系数 A_j^m 的关系

$$A_j^m = (m-j+1)A_{j-1}^{m-1} + jA_j^{m-1},$$
$$j = 2, 3, \cdots, m-1,$$

而 $A_1^m = A_m^m = 1$.

			1				$m=1$
		1		1			$m=2$
		1	4	1			$m=3$
	1	11		11	1		$m=4$
	1	26	66	26	1		$m=5$
1	57	302		302	57	1	$m=6$
…	…	…	…	…	…	…	

比较一下日本关孝和与中国李善兰，他们研究的思想有别：关把前 n 个自然数 m 次幂和看成是 $(m+1)$ 次多项式，李则看成是 m 个组合数之和. 他们研究的方法不同：关可能用待定系数法，李却用朱世杰揭示过的三角垛 n 项和与通项公式. 他们所取得的成果也不一样：关求到 $m=11$ 为止，而李则已考虑到一般，其成果可与瑞士数学家雅各布·伯努利所得的公式（见伯努利数）媲美.

关于自然数幂和公式，经过不少数学家的努力，已经找到了好些各不相同的解决办法. 下面介绍最初等、最简单的一种方法.

因为 $n=1$ 时 $\sum_{k=1}^{n} k^m = 1$，$n=2$ 时 $\sum_{k=1}^{n} k^m = 1 + 2^m$，所以不妨假定 $n \geqslant 3$. 又由于 $m=1$ 时，结论明显：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad ①$$

故还可假定 $m\geqslant 2$.

注意到

$$\begin{aligned}&(n+1)^{m+1}-1\\=&\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{m+1}-\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^{m+1}-k^{m+1}]\\=&\sum_{k=1}^{n}(k^{m+1}+C_{m+1}^{1}k^{m}+C_{m+1}^{2}k^{m-1}+\cdots+C_{m+1}^{m}k+1-k^{m+1})\\=&C_{m+1}^{1}\sum_{k=1}^{n}k^{m}+C_{m+1}^{2}\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}+\cdots+C_{m+1}^{m}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1, \qquad ②\end{aligned}$$

式中 C_i^j 为组合数.

当 $m=2$ 时,②式即为

$$\begin{aligned}(n+1)^{3}-1&=C_{3}^{1}\sum_{k=1}^{n}k^{2}+C_{3}^{2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^{2}+3\sum_{k=1}^{n}k+n.\end{aligned}$$

将①代入,有

$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^{2}&=(n+1)^{3}-1-n-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=(n+1)\left[(n+1)^{2}-1-\frac{3}{2}n\right]\\&=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

于是
$$\sum_{k=1}^{n}k^{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \qquad ③$$

当 $m=3$ 时,②式即为

$$(n+1)^{4}-1=C_{4}^{1}\sum_{k=1}^{n}k^{3}+C_{4}^{2}\sum_{k=1}^{n}k^{2}+C_{4}^{3}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

将①、③代入，得

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-1-n-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n^2(n+1)^2,$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \qquad ④$$

当 $m=4$ 时，②即为

$$(n+1)^5-1$$
$$=C_5^1\sum_{k=1}^{n}k^4+C_5^2\sum_{k=1}^{n}k^3+C_5^3\sum_{k=1}^{n}k^2+C_5^4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

将①、③和④代入，得

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4=(n+1)^5-1-n-5\cdot\frac{n(n+1)}{2}-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-10\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \qquad ⑤$$

当 $m=5$ 时，②式即为

$$(n+1)^6-1=6\sum_{k=1}^{n}k^5+15\sum_{k=1}^{n}k^4+20\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$+15\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

将①、③、④和⑤代入，得

$$6\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1),$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

循此，可依次求得

$$\sum_{k=1}^{n}k^6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^7=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$

等等.

这就解决了自然数的方幂和问题.

下面，我们来一般性地研究解法.

展开二项式 $(x+\sigma)^\lambda$，得到数 $\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\cdots,\sigma^\lambda$. 在一定条件下，这些数可看做是取决于 λ 的未知数而不管它是 σ 的幂. 用研究这些数的方法可以简化 $S_m=\sum_{k=1}^{n}k^m$ 的推导.

若记 $m+1$ 为 M，则依二项式定理有

$$(\lambda+\sigma)^M=\lambda^M+M\lambda^m\sigma+M_2\lambda^{m-1}\sigma^2+\cdots$$

及 $$(\lambda+\sigma-1)^M=\lambda^M+M\lambda^m(\sigma-1)+M_2\lambda^{m-1}(\sigma-1)^2+\cdots$$

两式相减，得

$$(\lambda+\sigma)^M-(\lambda+\sigma-1)^M$$

$$= M\lambda^m + M_2\lambda^{m-1}[\sigma^2 - (\sigma-1)^2]$$
$$+ M_3\lambda^{m-2}[\sigma^3 - (\sigma-1)^3] + \cdots \qquad (\text{I})$$

我们用下列等式

$$(\sigma-1)^2 = \sigma^2, \qquad ⑥$$
$$(\sigma-1)^3 = \sigma^3, \qquad ⑦$$
$$(\sigma-1)^4 = \sigma^4, \qquad ⑧$$
$$(\sigma-1)^5 = \sigma^5, \qquad ⑨$$

等等来规定未知数 $\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\cdots$就可将(Ⅰ)式化简为

$$M\lambda^m = (\lambda+\sigma)^M - (\lambda-1+\sigma)^M. \qquad (\text{I}_a)$$

用 $\lambda = 1,2,3,\cdots,n$ 代入,得

$$M\cdot 1^m = (1+\sigma)^M - \sigma^M,$$
$$M\cdot 2^m = (2+\sigma)^M - (1+\sigma)^M,$$
$$\cdots\cdots$$
$$M\cdot n^m = (n+\sigma)^M - (n-1+\sigma)^M.$$

将上列 n 个等式相加,得

$$M\cdot S_m = (n+\sigma)^M - \sigma^M,$$

即
$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{(n+\sigma)^M - \sigma^M}{M},$$

亦即

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{(n+\sigma)^{m+1} - \sigma^{m+1}}{m+1}. \qquad (\text{II})$$

右端的数 $\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4,\cdots$由等式⑥,⑦,⑧,⑨,…所规定.得自二项式 $(n+\sigma)^M$ 展开式的公式(Ⅱ)给出了所求幂之和.

我们应用公式(Ⅱ)来求一下 $m=1,2,3,4$ 时的结果.首先根据方程⑥,⑦,⑧,⑨确定未知数 $\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4$.由⑥得 $-2\sigma+1=0$,

故 $\sigma=\frac{1}{2}$；由⑦得 $-3\sigma^2+3\sigma-1=0$，故 $\sigma^2=\frac{1}{6}$；又由⑧得 $-4\sigma^3+6\sigma^2-4\sigma+1=0$，故 $\sigma^3=0$；最后由⑨得 $-5\sigma^4+10\sigma^3-10\sigma^2+5\sigma-1=0$，故 $\sigma^4=-\frac{1}{30}$.

因此，由(Ⅱ)式得到

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+\sigma)^2-\sigma^2}{2}$$
$$=\frac{n^2+2n\sigma}{2}=\frac{n(n+1)}{2};$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{(n+\sigma)^3-\sigma^3}{3}$$
$$=\frac{n^3+3n^2\sigma+3n\sigma^2}{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{(n+\sigma)^4-\sigma^4}{4}$$
$$=\frac{n^4+4n^3\sigma+6n^2\sigma^2+4n\sigma^3}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2;$$
$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{(n+\sigma)^5-\sigma^5}{5}$$
$$=\frac{n^5+5n^4\sigma+10n^3\sigma^2+10n^2\sigma^3+5n\sigma^4}{5}$$
$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

参考文献 [53,p.315],[49,pp.324～328],[57,pp.1～5],[44,p.46].

（张恩华）

al-Kāshi 恒等式(al-Kāshi identity) 见自然数幂和问题.

伯努利数(Bernoulli numbers) 自然数幂和 $S_m=\sum\limits_{k=1}^{n}k^m$（$m$ 为自然数）的计算公式的一般表示式问题，最早在 1713 年出版的瑞士数学家雅各布·伯努利的一部著作《猜度术》中给出. 雅各布·

伯努利运用二项式定理及递推法得到

$$S_m = n^m + \sum_{i=0}^{m} \frac{B_i C_m^i}{m-i+1} n^{m-i+1}, \qquad ①$$

其中

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{11} = 0,$$

$$\cdots\cdots \qquad ②$$

称为伯努利数.

伯努利数满足 $B_j = 0$（j 为奇数且 $j \neq 1$）及“伞形法则”：

$$B_n = (1+B)^n, \qquad ③$$

其中③的右边是

$$C_n^0 B_0 + C_n^1 B_1 + C_n^2 B_2 + \cdots + C_n^n B_n$$

的缩写，它好像二项式定理，只不过把幂指数改成了足标.

运用③可以推出②中 B_{11}后面的伯努利数是

$$B_{12} = -\frac{691}{2\,730}, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = \frac{3\,617}{510},$$

$$B_{18} = -\frac{43\,867}{798}, B_{20} = \frac{174\,611}{330}, \cdots,$$

$$B_{13} = B_{15} = B_{17} = B_{19} = B_{21} = \cdots = 0. \qquad ④$$

伯努利数有很大用处. 例如，由含伯努利数的公式①求得自然数幂和

$$S_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$S_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$$

……

另外，伯努利数与费马大定理有重要的联系. 1850 年，Kummer(1810～1893)证明了费马大定理对于正规素数成立，这是一个很大的成就，一下子证明了对一大批素数 p，费马大定理成立. 而"正规素数"的概念是由伯努利数如下定义的：

如果素数 p 不整除 $B_2, B_4, \cdots, B_{p-3}$ 的分母，那么 p 就称为正规素数；如果素数 p 整除 $B_2, B_4, \cdots, B_{p-3}$ 中某一个的分母，就称 p 为非正规素数. 例如，5 是正规素数，因为 B_2 的分母是 6，而 $5 \nmid 6$；7 也是正规素数，因为 B_2 的分母是 6，B_4 的分母是 30，$7 \nmid 6$ 且 $7 \nmid 30$.

Kummer 发现，在 100 以内只有 37、59、67 是非正规素数，在对这三个数进行特别处理后，Kummer 证明了对于 $p<100$，费马大定理成立.

参考文献 [56, pp. 220～221].

（张恩华）

Hypsicles 定理(Hypsicles' theorem) 各项与项数 $2n$ 均为偶数的等差数列，后 n 项和与前 n 项和的差为 n^2 的倍数.

本题是由亚历山大城的 Hypsicles 给出的.

设这等差数列为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$，公差 $d = a_2 - a_1$ 是整数. 我们有

$$a_{n+1} - a_1 = nd,$$
$$a_{n+2} - a_2 = nd,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{2n} - a_n = nd,$$

所以

$(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = n^2 d$ 是 n^2 的倍数.

注 本定理中“各项为偶数”可改为“各项为整数”或“公差为整数”.

参考文献 [27,p.7,pp.82～83].

（单 墫 葛 军 张恩华）

斐波那契数列(Fibonacci series) 数列$\{F_n\}$称为斐波那契数列,其中$F_1=F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n=3,4,5,\cdots)$

斐波那契是意大利著名数学家 Leonardo 的笔名.他在《算盘书》(*Liber Abbaci*, 1202)的修订本中提出了一个有名的“关于兔子繁殖的问题”,即:有一对小兔,过一个月长成大兔,一对大兔经过一个月就能生出一对小兔,并能每月生下一对小兔,而所生的一对小兔也同样过一个月长成大兔,再过一个月生下一对小兔,以后也每月能生下一对小兔.假设所有兔子一年内均不死亡,问一年后共有几对兔子?这一问题被后人称为“斐波那契问题”.

设每月兔子的对数分别为$F_1,F_2,F_3,\cdots,F_n,\cdots$本问题即求其中的第 13 项$F_{13}$.

显然$F_1=1,F_2=1$,在$n\geqslant3$时,我们可以发现,第n个月比第$(n-1)$个月增加的兔子的对数等于第$(n-1)$个月的大兔子的对数,而第$(n-1)$个月的大兔子的对数等于第$(n-1)$个月的兔子的总对数.于是有

$$\begin{aligned}&F_1=F_2=1,\\&F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad(n=3,4,5,\cdots).\end{aligned} \tag{①}$$

由此可见,各个月的兔子的对数组成数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

这一数列称为斐波那契数列.

由关系式①,不难得到$F_{13}=233$.所以,一年之后共有 233 对兔子.

下面给出常用的两种方法求数列①的通项公式.

注意数列①的特征方程为 $k^2-k-1=0$，解之得 $k_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},k_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 设通项公式为

$$F_n=A\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

分别令上式中 $n=1,n=2$，得

$$\begin{cases}1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)A+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)B,\\1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2A+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2B.\end{cases}$$

可求出 $A=\frac{1}{\sqrt{5}},B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，于是通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],n=1,2,3,\cdots$$

如果我们考虑数列①的母函数

$$f(x)=F_1+F_2x+F_3x^2+\cdots+F_nx^{n-1}+F_{n+1}x^n+F_{n+2}x^{n+1}+\cdots \quad ②$$

则

$$xf(x)=F_1x+F_2x^2+\cdots+F_nx^n+F_{n+1}x^{n+1}+F_{n+2}x^{n+2}+\cdots \quad ③$$

$$x^2f(x)=F_1x^2+F_2x^3+\cdots+F_{n-1}x^n+F_nx^{n+1}+F_{n+1}x^{n+2}+F_{n+2}x^{n+3}+\cdots \quad ④$$

②－③－④，得

$$(1-x-x^2)f(x)=F_1+(F_2-F_1)x,$$

即 $$(1-x-x^2)f(x)=1.$$

故 $$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x}$$

$$=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}}+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{\sqrt{5}+1}}. \quad ⑤$$

因 $$\frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}}=1+\frac{2x}{\sqrt{5}-1}+\left(\frac{2x}{\sqrt{5}-1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2x}{\sqrt{5}-1}\right)^n+\cdots$$

且 $$\frac{1}{1+\frac{2x}{\sqrt{5}+1}}=1+\left(-\frac{2x}{\sqrt{5}+1}\right)+\left(-\frac{2x}{\sqrt{5}+1}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{2x}{\sqrt{5}+1}\right)^n+\cdots$$

代入⑤，得

$$f(x)=\left(\frac{2}{5-\sqrt{5}}+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\right)+\left[\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}-1}+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)\right]x+\left[\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^2+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^2\right]x^2+\cdots+\left[\frac{2}{5-\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n-1}+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n-1}\right]x^{n-1}+\cdots$$

与②式比较，得

$$F_n=\frac{2}{5-\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n-1}+\frac{2}{5+\sqrt{5}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],n=1,2,3,\cdots$$

斐波那契数列是一个二阶线性递归数列.递归数列的特点是：它的任意项可以用前面若干项表示.这就是"递归"或"循环"的意思.应该说,最先提出它的是斐波那契.

人们对斐波那契数列继续研究,发现它许多奇特的性质.例如,若考虑该数列相邻两项之比构成的数列

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\cdots$$

则可证明,这个"比值数列"的极限为

$$r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

这就是黄金比值.

再如,斐波那契数列在许多场合都会出现,诸如蜜蜂的繁殖、植物的叶序、菠萝的鳞片、树枝的生长、钢琴的键盘等等.同时,它在数学的许多分支也得到广泛的应用.1963年创刊的《斐波那契季刊》的头三年中,就发表了近1 000页有关这一特殊领域的研究成果.1968年,为了解决大量稿件积压问题,还出版了三期增刊.

参考文献 [54,p. 36],[52,p. 216],[59,p. 7,p. 9],[61,p. 208].

（张恩华）

Lucas 数列（Lucas series） 数列$\{L_n\}$称为Lucas数列,其中$L_1=1,L_2=3,L_n=L_{n-1}+L_{n-2},n=3,4,5,\cdots$

这是法国数学家Lucas(1842～1891)引进的新数列,该数列的递归关系与斐波那契数列相同,但第二项不同.如果把该数列的

前面一些项写出来就是

$$1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,\cdots$$

Lucas 数列 $\{L_n\}$ 的通项公式为

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

其推证方法可参见**斐波那契数列**.

参考文献 [54,p. 39].

（张恩华）

最小和(A minimal sum) 有 n^k 个不同的 k-数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$，其中 a_i 取自集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$，并且可以重复其中的任意数. 对每个 k-数组确定最小值 a_i. 试证明一个奇特的结果：这些最小值之和恰好等于前 n 个自然数的 k 次方幂之和，即

$$\sum\min(a_1,a_2,\cdots,a_k)=\sum_{m=1}^{n}m^k.$$

本题为《美国数学月刊》1976 年第 61 页问题 E2 507，由新泽西州默累山贝尔电话实验室 R. L. Graham 提出，由多伦多大学学生 Peter G. de Buta 解答.

在把自然数 r_i 构成的数列相加时，有

$$\sum r_i=(\text{数列中大于或等于 1 的项数})$$
$$+(\text{数列中大于或等于 2 的项数})+\cdots$$

事实上，在左边，原数列的每一项 r_i 恰好对 r_i 个括号各贡献一个 1.

容易确定数列中不小于正整数 t 的项数. 因为 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\geqslant t$，当且仅当这个 k-数组中每个 a_i 不小于 t，即每个 a_i 从集合 $\{t,t+1,\cdots,n\}$ 中选取，因而均有 $(n-t+1)$ 种选法，所以，总

共有 $(n-t+1)^k$ 个所求的 k-数组. 于是, 大于或等于 t 的项数 = $(n-t+1)^k$. 从而

$$\begin{aligned}&\sum \min\langle a_1, a_2, \cdots, a_k\rangle\\ &= \sum_{t=1}^{n}(\text{大于或等于 } t \text{ 的项数})\\ &= \sum_{t=1}^{n}(n-t+1)^k\\ &= n^k+(n-1)^k+(n-2)^k+\cdots+2^k+1^k\\ &= \sum_{m=1}^{n} m^k.\end{aligned}$$

参考文献 [30, pp. 37～39].

(张恩华)

质数的和(The sums of the primes) 假设以 S_n 表示前 n 个质数的和, 即 $S_n = 2+3+5+\cdots+p_n$, 试证明, 在 S_n 和 S_{n+1} 之间存在一个平方数.

本题为《美国数学月刊》1969 年第 1 151 页问题 E2 164, 由威斯康星大学万克沙分校 R. S. Luthar 提出, 由俄勒冈大学 Ivan Nieven 解答.

该命题对于 $n=1,2,3,4$ 容易证明. 现假设 $n \geqslant 5$. 如果两个正实数 x 和 $y(x>y)$ 的平方根包围了一个自然数 m, 则平方数 m^2 应在 x 和 y 之间, 即由 $\sqrt{x}<m<\sqrt{y}$ 可得知 $x<m^2<y$. 在 $\sqrt{y}-\sqrt{x}>1$ 的情形下, $\sqrt{x}$ 与 $\sqrt{y}$ 之间的间隔已足够大, 不能不包含自然数. $\sqrt{y}-\sqrt{x}>1$ 等价于 $\sqrt{y}>1+\sqrt{x}$, 即 $y>1+2\sqrt{x}+x$, 于是 $y-x>1+2\sqrt{x}$. 因此, 如果我们对所有的 n 证明了关系式 $S_{n+1}-S_n>1+2\sqrt{S_n}$ 成立, 即得问题之所证.

已知 $S_n=2+3+5+7+11+\cdots+p_n$，当 $n\geqslant 5$ 时，S_n 不小于 $2+3+5+7+11$. 这里，不含 1 和 9 这两个奇数. 如果我们去掉 2，添上略去的那些奇数，则至少增加了 $1+9-2=8$. 由此得出

$$S_n<1+3+5+\cdots+p_n,$$

其中，右端为 1 和 p_n 之间的一切奇数之和.

1 至 $2k-1$ 的奇数之和为

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=\frac{k}{2}[1+(2k-1)]=k^2.$$

当 $p_n=2k-1$ 时，则得 $k=\frac{1}{2}(1+p_n)$. 因此，由 1 至 p_n 之间的一切奇数之和为$\frac{1}{4}(1+p_n)^2$. 这就给出

$$S_n<\frac{1}{4}(1+p_n)^2,$$

从而

$$\sqrt{S_n}<\frac{1}{2}(1+p_n)$$

或

$$2\sqrt{S_n}<1+p_n.$$

因为 p_{n+1} 不可能小于 p_n+2（p_n,p_{n+1} 不可能是连续自然数），所以

$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n=p_{n+1}&\geqslant p_n+2\\&=1+(1+p_n)>1+2\sqrt{S_n}.\end{aligned}$$

这就是我们所要证明的结论.

参考文献　[30,pp.221～222].

（张恩华）

五 概率

分赌注问题（Distribute bet problem） 两个赌徒相约赌若干局，谁先胜 s 局，便赢得全部赌注. 现在其中一人胜 $a(a<s)$ 局，另一人胜 $b(b<s)$ 局，赌博中止. 问赌注应怎样分法才合理？

分赌注问题又称得点问题(Problem of the points)，是概率论发展史上最著名的问题之一. 它早在15世纪时由意大利数学家Luca Pacioli(1445～1514)的关于计算技术的教科书《总计》中提出，但他未能给出正确结果，这曾引起了长时期的争论. 直到1651年法国统计学家、赌徒A.G.C. de Méré(1610～1685)将此问题向著名数学家帕斯卡求教，帕斯卡经过两三年的思考，提出了这样一个重要的思想，两赌徒应得赌金的比例，取决于赌博继续进行下去各自成为赢家的概率. 更为重要的是，1654年7月29日帕斯卡将该问题和他的解法写信寄给了费马，两人之间的通信不仅解决了分赌注问题，而且还为解决机会游戏的其他许多问题搭起了框架. 后来有人把他们建立联系的这一天看做是概率论的生日. 帕斯卡与费马的联系，对于激发欧洲数学家对概率论的兴趣起着重要的作用. 例如，在他们建立联系后的短时间里，年轻的荷兰数学家惠更斯专程来到巴黎，和他们一起讨论分赌注问题，在惠更斯的著作《论骰子游戏的推理》(1657)中叙述了当时的情景和问题的解.

帕斯卡和费马分别将解归结到最终获胜的概率，而惠更斯在解中则引入了数学期望的概念，三人各自从不同的理由出发，都给出了问题的正确解，获得了一致的结论，这不仅平息了拖延已久的分赌注问题的争议，而且他们所取得的成果，可以说已宣告了概率论这一新学科的诞生. 由于惠更斯的《论骰子游戏的推理》是迄今所知有关概率论的最早论著，因此有人认为概率论起源于赌博. 赌博中一些机会问题促使数学家们去思考、研究概率问题，这对概率

论的形成起到了促进作用.然而概率论能够发展成今天这样理论基础严密、应用极为广泛的庞大的数学分支，是由于概率论与实际有着密切联系的缘故.拉普拉斯说过："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题."早期的学者们对概率论的兴趣也受人口统计、保险事业的推动，到了18世纪，概率论已远不再是只与赌博问题相关联的学科了，它在自然科学、技术科学、社会科学、军事和工农业生产中都有着广泛的应用.所以概率论的产生和发展是由其巨大的实际意义所决定的.

下面介绍帕斯卡、费马和惠更斯所给出的解法.设在每局中赌徒甲胜的概率为 $p(0<p<1)$，乙胜的概率为 $q=1-p$. 由题意知，赌博中止后如果继续进行下去，甲需在乙未赢之前再先胜 $m=s-a$ 局，就能赢得全部赌注，乙需在甲未赢之前再先胜 $n=s-b$ 局才能赢得全部赌注.为能分出最终的胜负，最多需要再赌 $m+n-1$ 局.对于 $p=q=\frac{1}{2}$ 的情形，帕斯卡在1654年8月24日给费马的信中提出的简单特例及其解法如下：当赌博进行到甲还差 $m=2$ 局，乙还差 $n=3$ 局就分别达到约定胜 s 局时，他们中止了赌博，为能分出最终谁胜谁负，最多还需赌4局.若用"+"、"−"分别表示甲胜一局与乙胜一局，则共有以下16种可能的情形：

$$
\begin{gathered}
(++++),(+++-),(++-+),(+-++),\\
(-+++),(++--),(+-+-),(-++-),\\
(+--+),(-+-+),(--++),(+---),\\
(-+--),(--+-),(---+),(----).
\end{gathered}
$$

其中使甲最终获胜的有11种.也就是在继续赌的4局中乙至多胜2局的情形，用组合方法计算为

$$C_4^0+C_4^1+C_4^2=11(\text{种}).$$

其中使乙最终获胜的有 5 种，即在 4 局中甲至多胜 1 局的情形，用组合计算为

$$C_4^0 + C_4^1 = 5(\text{种}).$$

于是甲、乙最终成为赢家的概率分别为

$$P(\text{甲赢}) = \frac{11}{16}, P(\text{乙赢}) = \frac{5}{16}.$$

因此赌徒甲、乙应按比例

$$\frac{P(\text{甲赢})}{P(\text{乙赢})} = \frac{11}{5}$$

分配赌注最为合理.

1665 年出版了帕斯卡的遗著《算术三角形》，在该书中帕斯卡给出了 $p = q = \frac{1}{2}$ 情形下分赌注问题的组合解：赌徒甲、乙分配赌注的比例为

$$\begin{aligned}\frac{P(\text{甲赢})}{P(\text{乙赢})} &= \frac{P(\text{在 } m+n-1 \text{ 局中乙至多胜 } n-1 \text{ 局})}{P(\text{在 } m+n-1 \text{ 局中甲至多胜 } m-1 \text{ 局})} \\ &= \frac{C_{m+n-1}^0 + C_{m+n-1}^1 + \cdots + C_{m+n-1}^{n-1}}{C_{m+n-1}^0 + C_{m+n-1}^1 + \cdots + C_{m+n-1}^{m-1}}.\end{aligned}$$

对于 $p \neq q$ 的情形，法国数学家棣莫弗采纳帕斯卡的解题思路，于 1711 年在英国《皇家学会会报》上发表的著名论文《论赌博法》中，首先讨论了这类分赌注问题. 赌徒甲、乙应按比例

$$\frac{P(\text{甲赢})}{P(\text{乙赢})} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_{m+n-1}^i p^{m+n-1-i} q^i}{\sum_{i=0}^{m-1} C_{m+n-1}^i p^i q^{m+n-1-i}},$$

或等价地按比例

$$\frac{P(\text{甲赢})}{P(\text{乙赢})}=\frac{\sum_{i=m}^{m+n-1} C_{m+n-1}^{i} p^{i} q^{m+n-1-i}}{\sum_{i=n}^{m+n-1} C_{m+n-1}^{i} p^{m+n-1-i} q^{i}}$$

分配赌注最合理.

帕斯卡还发现,并非一定要继续赌到 $m+n-1$ 局才能决出最终胜负,实际上只需赌到第 k 局(不妨设 $m\leqslant n, m\leqslant k\leqslant m+n-1$)为止,甲恰先胜了 m 局,甲就最终获胜了.其概率为

$$C_{k-1}^{m-1} p^{m} q^{k-m}, \quad k=m, m+1, \cdots, m+n-1.$$

法国数学家 Montmort(1678～1719)在此基础上首先给出

$$P(\text{甲赢})=\sum_{k=m}^{m+n-1} C_{k-1}^{m-1} p^{m} q^{k-m};$$

$$P(\text{乙赢})=\sum_{k=n}^{m+n-1} C_{k-1}^{n-1} p^{k-n} q^{n}.$$

故帕斯卡的解法已接近下面的结果,赌徒甲、乙应按下面的比例分配赌注:

$$\frac{\sum_{k=m}^{m+n-1} C_{k-1}^{m-1} p^{m} q^{k-m}}{\sum_{k=n}^{m+n-1} C_{k-1}^{n-1} p^{k-n} q^{n}}.$$

甲赢的概率还可归结为"在出现乙胜 n 局以前甲胜 m 局或 m 局以上的概率",而乙赢的概率可归结为"在出现甲胜 m 局以前乙已取胜 n 局或 n 局以上的概率".于是应用著名的帕斯卡分布(即负二项分布),我们还能得到,赌徒甲、乙分配赌注的比例应为

$$\frac{\sum_{k=m}^{\infty} C_{n+k-1}^{k} p^{k} q^{n}}{\sum_{k=n}^{\infty} C_{m+k-1}^{k} p^{m} q^{k}}.$$

或者甲、乙分配赌注的比例还可归结为"甲胜 m 局以前乙至多胜 $n-1$ 局"与"乙胜 n 局以前甲至多胜 $m-1$ 局"的概率之比：

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_{m+k-1}^{k} p^{m} q^{k}}{\sum_{k=0}^{m-1} C_{n+k-1}^{k} p^{k} q^{n}}$$

不难证明，以上 4 种解法是等价的.

费马的解法是，设 $P_{m,n}$ 为甲胜 m 局发生在乙胜 n 局之前的概率. 考虑此事件发生之前一局胜负的可能情形，即或者甲已胜 $m-1$ 局发生在乙胜 n 局之前，或者是甲胜 m 局发生在乙胜 $n-1$ 局之前，从而得到递推方程

$$P_{m,n} = pP_{m-1,n} + qP_{m,n-1},$$

其中 $m \geqslant 1, n \geqslant 1$.

利用边界条件

$$P_{m,0} = 0, \quad P_{0,n} = 1,$$

经过计算，可解得甲最终获胜的概率为

$$P_{m,n} = \sum_{i=m}^{m+n-1} C_{m+n-1}^{i} p^{i} q^{m+n-1-i}.$$

同理可解得乙最终获胜的概率 $P_{n,m}$ 为

$$P_{n,m} = \sum_{i=n}^{m+n-1} C_{m+n-1}^{i} p^{m+n-1-i} q^{i}.$$

在惠更斯的解法中，首先考虑赌徒在一切可能获胜场合下应分得赌注的份额. 如在 $m+n-1$ 次赌博中，甲恰胜 $m+1$ 局而最终获胜的概率为

$$C_{m+n-1}^{m+1} p^{m+1} q^{n-2},$$

这时甲期望分得赌金

$$AC_{m+n-1}^{m+1}p^{m+1}q^{n-2},$$

其中 A 为全部赌注. 于是甲总计应分得赌金 X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{i=m}^{m+n-1}AC_{m+n-1}^{i}p^{i}q^{m+n-1-i}.$$

同理可得赌徒乙总计应分得的赌金 Y 的数学期望为

$$E(Y)=\sum_{i=n}^{m+n-1}AC_{m+n-1}^{i}p^{m+m-1-i}q^{i}.$$

由此可知,尽管帕斯卡、费马、惠更斯三人所用的方法不同,但所得到的解是完全一致的.

棣莫弗在《论赌博法》的论文中,还首次讨论了关于多个赌徒分配赌注的问题.

参考文献 [75,pp. 70～72,p. 82,116],[70,pp. 392～394],[72,pp. 30～32],[67,pp. 80～82],[69,pp. 119～128],[7,p. 242].

（谈祥柏 周冠廷 马 复）

下赌注问题(Place a bet problem) 两颗骰子掷 25 次,至少出现一次双 6 与不出现双 6 的概率哪一个大?

这是记录在概率论发展史中最早的著名问题之一. 17 世纪中叶,Méré 注意到在赌博中两颗骰子掷 25 次,把赌注押在"至少出现一次双 6"上比押在"不出现双 6"上有利,但他找不出原因. 后来他请教著名数学家帕斯卡,才解决了这一问题. 解法如下:

设事件 $A_i=\{$第 i 次出现双 6$\}$,$i=1,2,\cdots,25$,则

$$P\{\text{不出现双 6}\}=P\left\{\bigcap_{i=1}^{25}\overline{A}_i\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^{25}[1-P(A_i)]=\left(1-\frac{1}{36}\right)^{25}$$
$$=0.505\,5\cdots$$

此解不仅证实了 Méré 的经验是正确的，而且他的经验的精细程度令人折服. 然而经验判断未必都正确，著名的 Méré 悖论便是例证.

参考文献 [73,pp. 163～164],[67,p. 56].

（周冠廷 马 复）

Méré 悖论(Méré paradox) 一颗骰子掷 4 次至少出现一个 6 点，两颗骰子掷 24 次至少出现一次双 6，这两个事件哪一个有更多的机会发生?

Méré 依据他丰富的经验，断言"一颗骰子掷 4 次至少出现一个 6 点的可能性与两颗骰子掷 24 次至少出现一次双 6 的概率相等". 而数学家的计算指出，前者的概率比后者大. Méré 曾因此而愤怒地咒骂数学，说数学是自相矛盾的. 这就是著名的 Méré 悖论. Méré 这一错误猜测，确曾有人替它给出了证明，方法如下：设 A、B 分别为"一颗骰子掷 4 次至少出现一个 6 点"与"两颗骰子掷 24 次至少出现一次双 6"两事件. 每掷一颗骰子有 6 种可能结果，掷 4 次共有 6^4 种可能结果. 为保证所掷的 4 次中至少有一次出现 6 点，可先任意指定其中的一次出现 6 点，其余三次允许出现任何点数，故事件 A 包含 $C_4^1 \cdot 6^3$ 种可能结果，于是得到

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot 6^3}{6^4} = \frac{2}{3}.$$

再计算 $P(B)$. 两颗骰子每掷一次有 36 种可能结果，掷 24 次共有 36^{24} 种可能结果. 为保证所掷的 24 次中至少有一次出现双 6，可先任意指定其中一次恰出现双 6，余下的 23 次允许出现任何点数，故事件 B 包含 $C_{24}^1 \cdot 36^{23}$ 种可能结果，从而又得到

$$P(B) = \frac{C_{24}^1 \cdot 36^{23}}{36^{24}} = \frac{2}{3}.$$

于是得到结论，这两个事件发生的机会相等.

然而上述貌似有理的计算都是错的. 我们不难发现,指定某一次出现的 6 点(或双 6)与其余各次中出现的 6 点(或双 6),在计算中犯了重复计算的毛病. 用四个方格里自左至右的 4 个数字表示一颗骰子依次掷 4 次所得到的结果. 显然,下面两种结果

6	2	3	6

6	2	3	6

是同一个基本事件. 但在下面方格中把加括号的(6),看做是被指定出现的 6 点,

(6)	2	3	6

6	2	3	(6)

这样就把原来不能区别的同一个基本事件视为 2 个不同的基本事件了. 事实上,在 $C_4^1 \cdot 6^3$ 和 $C_{24}^1 \cdot 36^{23}$ 中都包含了许多这类重复. 正确解应为

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ &= 0.5177469\cdots \\ P(B) &= 1 - P(\overline{B}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \\ &= 0.4914038\cdots \end{aligned}$$

参考文献 [73, p. 58].

(周冠廷 马 复)

赌徒输光问题 (Gambler's ruin problem) 两个赌徒观察逐次掷硬币的结果. 每掷一次,若出现正面则乙付给甲 1 元,若出现反面则甲付给乙 1 元. 如果开始时甲有 a 元、乙有 b 元,赌博一直进行到两人中有一人输光为止,问赌徒甲输光的概率是多少?

15 世纪,意大利的一些学者开始研究赌博中的若干简单问

题.17世纪中叶,为了回答赌徒提出的分赌注等问题,帕斯卡、费马以及惠更斯等,利用组合方法研究了一些较复杂的赌博问题,赌徒输光问题就是他们共同感兴趣的著名问题之一.它又被称为赌徒破产问题.费马在均匀硬币的前提下,解得甲输光的概率为$\frac{b}{a+b}$.即甲输光的概率与赌徒乙的赌本b成正比,与两人赌本之和成反比.对于非均匀硬币的情形,首先由雅各布·伯努利解出.这个结果在他逝世8年后,由其侄子尼古拉·伯努利帮助出版的著作《推测术》(1713)中获得.

设每次甲赢1元的概率为$p\ (0<p<1)$,输1元的概率为$q=1-p$,R_x为甲手中有赌本x元时而最终输光的概率,则R_a便是甲最终输光的概率.如果在某时刻,甲手中有x元而最终输光,有两种方法实现,一种是接下去输一次而最终输光,另一种是接下去赢一次而最终输光,于是有递推等式

$$R_x=pR_{x+1}+qR_{x-1},\quad x=1,2,\cdots,a+b-1 \qquad ①$$

成立.当$x=0$时,表明甲手中无钱,已输光,故$R_0=1$;若$x=a+b$,则表明甲已赢得了乙的全部赌本,甲稳获全胜,故$R_{a+b}=0$.令$R_x=\lambda^x$,代入①式,得

$$\lambda=p\lambda^2+q,$$

其根为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{q}{p}.$$

若$p\neq q$,则方程的通解是λ_1、λ_2的线性函数:

$$R_x=c+d\left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

由边界条件可确定其中的常数为

$$c=\frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}};$$

$$d=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

从而有解

$$R_x=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

由此得到赌徒甲输光的概率为

$$R_a=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}. \qquad ②$$

当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，上式无意义. 但这时有递推等式

$$2R_x=R_{x+1}+R_{x-1},\quad x=1,2,\cdots,a+b-1$$

成立，即

$$R_{x+1}-R_x=R_x-R_{x-1}=\cdots=R_1-R_0=c.$$

由边界条件 $R_0=1, R_{a+b}=0$ 及 $R_x=1+xc$，得

$$c=-\frac{1}{a+b}.$$

从而有

$$R_x=1-\frac{x}{a+b}$$

成立. 于是赌徒甲输光的概率为

$$R_a = \frac{b}{a+b}. \qquad ③$$

从上述一般解可知，赌徒输光的概率，不仅与赌徒双方每局输赢的概率 p、q 有关，而且还与赌徒双方手中的赌本大小有关. 若 b 相对于 a 非常大，对 R_a 的解式②、③两边取 $b \to \infty$ 的极限，得

$$R_a \to \begin{cases} 1, & p < q; \\ 1, & p = q; \\ \left(\frac{q}{p}\right)^a, & p > q. \end{cases}$$

这一结果可使去赌场的赌徒们获得教训. 因为赌场老板的赌本 b 通常总比赌客的赌本 a 高得多，即使赌博是"公平"的，即 $p = q = \frac{1}{2}$，嗜赌下去，赌客最终必然输光.

一个与输光问题直接有关的使数学家们感兴趣的问题，是估计输光之前赌博进行的时间问题. 这是输光问题中的一个特例. 最先是在 1657 年由费马向惠更斯提出的，后来就 $p = q = \frac{1}{2}$ 的情形被惠更斯解决. 1711 年，棣莫弗在《论赌博法》的著名论文中，讨论了 $p \neq q$ 的赌徒破产持续时间问题. 他应用差分方程的方法，给出了赌徒甲具有赌本 x 时，赌局数目的数学期望 E_x 为

$$E_x = \frac{x}{q-p} - \frac{a+b}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，

$$E_x = x(a+b-x).$$

另一个与此有关的著名问题，是给定赌局数目情形下的输光的概率，它比不限定赌局数目的输光问题复杂得多. 法国数学家拉

格朗日最先用母函数法获得了在第 n 局输光的概率.

在近代概率论中,输光问题被视为随机游动的特例.输光问题可叙述成一个质点在一直线的整数点 $0,1,2,\cdots,a+b$ 上作随机游动,质点每向右、向左游动一个单位的概率分别为 p、$q(0<p<1,q=1-p)$,在 $x=0,x=a+b$ 处为两个吸收壁.赌徒输光的概率相当于求质点从 $x=a$ 处出发,最终被 $x=0$(或 $x=a+b$)吸收的概率.当 $b\to+\infty$ 时,则问题化为带一个吸收壁的随机游动;当 $a\to-\infty,b\to+\infty$ 时,没有吸收壁,称为自由的随机游动.随机游动是布朗运动的一个粗糙近似.美国著名数学家维纳、Feller(1906~1968)等对这些问题作出了杰出的贡献,并使其发展成为一门内容丰富的概率论的新分支——随机过程.此外,两人对弈的赌博问题,在近代也有了长足发展,20 世纪 30 年代美籍匈牙利著名数学家冯·诺依曼创立了一门新兴的应用科学博弈论(又称对策论).它在社会科学、人工智能、工业自动化等方面都有广泛的应用.

参考文献 [74,pp. 344~352],[82,p. 80,p. 238],[62,pp. 30~31].

(周冠廷 马 复)

生日问题(Birthday problem) 在一个由 50 名学生组成的班级里,至少有两人生日相同的概率是多少?

生日问题是概率论发展早期数学家们所关心的罐子模型中的一个特例.所谓罐子模型问题,就是 r 只球在 n 个罐子中的分布的概率问题.这类问题首先由 J. Hudde 提出,后来在《惠更斯选集》的第 14 卷中给出了罐子模型(urn scheme)这一术语及问题的解.

将生日问题中的人对应为球,生日对应为 365 个罐子,研究球落入罐子的各种分布的概率,生日问题就转化为罐子模型问题了.在罐子模型中基本事件总数有限,各基本事件的概率相等,属于概率的古典概型.法国数学家拉普拉斯在 1812 年出版的《概率的分析理论》一书中给出了古典概率的定义,事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

历史上概率的许多基本运算法则首先是在这一定义下推导出来的.依据这一定义,可迅速求出生日问题的解.50名学生的生日,其一切可能情形,相当于50个可区别的球放入365个罐子的允许重复的不同排列数 365^{50},这就是基本事件总数.由于50名学生中至少有两人生日相同这一事件 A 的对立事件 $\overline{A}$,是50名学生的生日都不相同,$\overline{A}$ 包含 P_{365}^{50} 个基本事件.所以,

$$P(\overline{A})=\frac{P_{365}^{50}}{365^{50}}\approx 0.0296,$$

于是,所要求的概率是

$$P(A)=1-P(\overline{A})\approx 0.9704.$$

我们惊奇地发现,在有50名学生的班级里,各人的生日都不相同几乎是不可能的.

将生日问题中的人换成意外事件、乘客、印错的字,相应的生日换成星期几、楼层、书的页数等等,便转化成应用极为广泛的其他许多罐子模型中的实际问题.列表举例如下.

问题名称	球	罐　子	概率问题举例
生日问题	r 个人	一年中的365个生日	恰有 $m(m\leqslant r)$ 人生于同一天
分房问题	r 个人	n 个房间	恰有 $m(m\leqslant r)$ 个房间各进一人
占位问题	r 只球	n 只盒子	指定的 $k(1\leqslant k<n)$ 盒中各有一球
不幸事件问题	r 个意外事件	一星期中的七天	周一至少发生一起意外事件

续 表

问题名称	球	罐　子	概率问题举例
电梯问题	r 个乘客	n 个楼层	若设 $r \geqslant n$，每个楼层都有人走出电梯
印错问题	r 个印错的字	一本书有 n 页	指定的一页上至少有两个字印错
掷骰子问题	r 颗骰子	骰子的 6 个面分别标有 1,2,…,6	r 颗骰子掷 1 次全出现"6"

在罐子模型问题中，球还可分为可区别与不可区别，每只罐子中进球数可分为不加限制与至多进一球的情形. 这些数学模型被应用于物理学，产生了三种著名的统计物理学. 统计物理学中，把 r 个球对应为 r 个性质相同的质点，如电子、光子、中子、介子等，n 只罐子对应为每个质点可能的 n 种微观状态，若设 $r \leqslant n$，则对于指定的 r 个状态各有一个质点的概率 p，它们分别是：

(1) 在古典气体理论中 Maxwell-Boltzmann 统计认为，质点是可区别的，且处于同一微观状态的质点数目不限，故

$$p = \frac{r!}{n^r}.$$

(2) 在光子、介子理论中的 Bose-Einstein 统计则认为，质点不能区别，处于同一微观状态的质点数目不加限制，故

$$p = \frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} = \frac{r!(n-1)!}{(n+r-1)!}.$$

(3) 在电子、中子理论中的 Fermi-Dirac 统计认为，不但质点不能区别，并且不能同时有两个或两个以上的质点处于同一微观状态，故

$$p=\frac{1}{\binom{n}{r}}=\frac{r!(n-r)!}{n!}.$$

参考文献 [81, pp. 31～32, p. 39, p. 110, p. 133], [83, p. 44], [73, p. 10, p. 34, p. 49], [75, pp. 32～33], [71, pp. 139～140], [63, pp. 10～13], [62, pp. 10～15].

（周冠廷 马 复）

配对问题(Matching problem) 将 N 封信随机地装入已写好了 N 个地址的信封中(每个信封中装入一封信). 问没有一封碰对地址与恰有 $K(1\leqslant K\leqslant N)$ 封碰对地址的概率各是多少?

设在 N 封信中没有一封碰对地址的概率为 P_N. 我们知道"没有一封碰对地址"这一事件的对立事件是"至少有一封碰对地址". 令事件

$$A_j=\{第\ j\ 封信碰对地址\},\ j=1,2,\cdots,N.$$

则至少有一封碰对地址的事件为

$$\bigcup_{j=1}^{N}A_j.$$

由概率的加法公式得

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{N}A_j\right)=\sum_{j=1}^{N}P(A_j)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{N-1}P\left(\bigcap_{j=1}^{N}A_j\right),\qquad①$$

其中

$$P(A_j)=\frac{1}{N},\quad j=1,2,\cdots,N,$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{N(N-1)},\quad 1\leqslant i<j\leqslant N,$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{N(N-1)(N-2)},1\leqslant i<j<k\leqslant N,$$

……

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{N}A_j\right)=\frac{1}{N!}.$$

代入①式，得

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{N}A_j\right)=C_N^1\frac{1}{N}-C_N^2\frac{1}{N(N-1)}+C_N^3\frac{1}{N(N-1)(N-2)}$$
$$-\cdots+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{N-1}\frac{1}{N!}.$$

于是得到 N 封信中没有一封碰对地址的概率为

$$P_N=1-P\left(\bigcup_{j=1}^{N}A_j\right)$$
$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^N\frac{1}{N!}.$$

有些教科书在导入 P_N 补事件概率的解法之前，先分析直接计算 P_N 的复杂性，往往使读者形成错觉，以为 P_N 的直接解法非常困难. 美国数学家 Sheldon Ross 在《概率论初级教程》中指出，其实 P_N 的直接解法不仅计算简便，而且思想方法巧妙.

设 E 为没有配对的事件，它与 N 有关，$P_N=P(E)$，记 A 为第一封信装入自己信封的事件，则有

$$P_N=P(A)P(E|A)+P(\overline{A})P(E|\overline{A}),$$

其中显然 $P(E|A)=0$，$P(\overline{A})=\dfrac{N-1}{N}$. $P(E|\overline{A})$ 是已知第一封信未装入第一个信封的条件下，其余 $N-1$ 封都没有配对的概率. 这有两种互不相容的装信方式：要么第一个信封装入了额外的信（此信的信封已装进了第一封信），且其余的信都未配对；要么第一个信封未装入额外的信，且其余的信都未配对. 前者的概率是

$$\frac{1}{N-1}P_{N-2},$$

后者的概率是 P_{N-1}（此时将第一个信封视为属于额外信的信封）.故

$$P(E\mid \bar{A}) = P_{N-1} + \frac{1}{N-1}P_{N-2},$$

$$P_N = \frac{N-1}{N}\left(P_{N-1} + \frac{1}{N-1}P_{N-2}\right)$$

$$= \frac{N-1}{N}P_{N-1} + \frac{1}{N}P_{N-2}.$$

由此得到递推等式

$$P_N - P_{N-1} = -\frac{1}{N}(P_{N-1} - P_{N-2}).$$

注意到 $P_1 = 0, P_2 = \frac{1}{2}$，从而知

$$P_3 - P_2 = -\frac{1}{3}(P_2 - P_1) = -\frac{1}{3!}, P_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!},$$

$$P_4 - P_3 = -\frac{1}{4}(P_3 - P_2) = \frac{1}{4!}, P_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!},$$

于是得到

$$P_N = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^N \frac{1}{N!}.$$

当 $N\to\infty$ 时，

$$P_N \to e^{-1},$$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 1 - e^{-1}.$$

在 N 封信中恰有 K 封碰对地址的事件，实际上就是其中恰有 K 封信碰对自己的地址，而其余的 $N-K$ 封都没有碰对地址，于是恰有 K 封碰对地址的概率为

$$\binom{N}{K}\frac{1}{N(N-1)\cdots(N-K+1)}\cdot P_{N-K}$$
$$=\frac{1}{K!}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{N-K}\frac{1}{(N-K)!}\right].$$

当 $N\to\infty$ 时,

$$P(\text{恰有 }K\text{ 封碰对地址})\to\frac{1}{K!}e^{-1},K=0,1,2,\cdots$$

这个极限是著名的数学期望为 1 的泊松分布. 它在理论上和实际应用中都具有重要意义. 顺便指出,对于任意 N 的配对问题,设 X 为随机碰对地址的数目,则其数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都等于 1.

配对问题又称相合问题,最先由法国数学家 Montmort 在 1708 年提出. 他的问题是,分别将两副同样的纸牌各 N 张均匀地洗过,然后依它们的次序逐一翻看对比,若在两副牌中处同一位置的两张牌恰好相同,就称有一个相合. 相合可以在 N 个位置的任何一处或若干处发生,于是产生种种有趣的问题. 欧拉、拉普拉斯等数学家研究过这些问题.

配对问题可以用许多有趣的形式来描述,例如,罐中有 1 至 N 编号的签,无放回地逐一将签全部取出,问取出顺序与签号一致的概率与至少有 r 次一致的概率各是多少? 在突然事故中,每一位宾客匆忙地随便拿回一顶入场时混放在衣帽架上的帽子,问各宾客都没有拿到自己的帽子与至少有 K 位宾客没有拿到自己帽子的概率各是多少? N 个学生在一间有 N 个座位的教室里上课,学生是随机入座的,问第二天上课时至少有一个学生坐的是第一天他(她)坐过的位置的概率是多少? 等等. 值得注意的是,在 $N=8$ 和 $N=10\,000$ 的两种情形下,至少有一封碰对地址的概率几乎与 N 无关,都近似等于 $1-e^{-1}\approx\frac{2}{3}$. 美国数学家 Feller 指出,至少有一个相合的概率在许多问题中得到应用. 例如,在 N 阶行列式

的一般展开式中，包含一个或多个对角线上的元素的项数共有 $N!P$ 项；把 $N(N=8)$ 只城状的（国际象棋）棋子放在棋盘上，使得彼此都不能吃掉，而且没有一个在白色的对角线上，这种放法的总数是 $N!(1-P)$. 这两例中的 P 都是 N 个中至少有一相合的概率.

配对问题的推广，称为配伍问题. 下面是它的一个典型的例子. 有 n 个人各填写一份登记表，并交一张照片，再把登记表和照片都随机地装入 n 个已写好了姓名的档案袋中（每袋只允许装入一份登记表和一张照片），设

$A_j=\{$第 j 袋的登记表与照片都装对$\}$, $j=1,2,\cdots,n$,

不难求得，没有一袋里的登记表及照片都装对的概率为

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\overline{A}_j\right)=1-P\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_i\right)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{(n-j)!}{j!},$$

恰有 K 袋的登记表及照片都装对的概率是

$$P\left\{\bigcup_{1\leqslant i_1<\cdots<i_K\leqslant n}A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_K}\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i_1,\cdots,i_K}}^{n}\overline{A}_j\right)\right\}=\frac{1}{n!K!}\sum_{j=0}^{n-K}(-1)^j\frac{(n-K-j)!}{j!}.$$

参考文献 [73, p. 94], [75, pp. 33～34], [66, p. 55], [72, pp. 229～230], [62, pp. 25～26, p. 95].

（周冠廷 马 复）

扑克牌胜负排座次（Rank of poker hands） 将一副扑克牌分发给各家，每家 5 张牌. 在扑克游戏中其胜负等级按照从高到低的次序是同花顺子、四条、满堂、顺子、三条、两对、一对、散牌等. 这样排座次的依据是什么？

打扑克是一种极普遍的文娱活动，爱好者遍布全球各大洲. 扑克游戏中含有大量数学问题，其计算一般都和概率论中的古典概型有关. 一副扑克牌总共有 52 张牌(通常不考虑“大王”与“小王”两张牌)，分别属于四种花色(黑桃，红心，方块，梅花)，每一花色拥有 13 张牌.

如果在玩牌时将一副扑克牌分发给各家，每家都拿到 5 张牌，其胜负从高到低的次序是

(1) 最大同花顺子(同一花色的 A、K、Q、J、10)，

(2) 四条(4 张牌点数相同)，

(3) 满堂(也有音译为“富而好施”的，其中有 3 张牌点数相同，另 2 张牌点数相同)，

(4) 顺子(两种以上花色的牌，5 张牌的顺序连续)，

(5) 三条(3 张牌点数相同，另 2 张不同)，

(6) 两对(4 张牌成两对，另外 1 张点数不同)，

(7) 一对(2 张牌点数相同，另外 3 张牌点数都不相同)，

这样排座次的依据是按照它们出现的概率大小来决定的，充分体现了“物以稀为贵”的原则.

美国概率论大师 Willian Feller 在其名著《概率论及其应用》上册中给出了这道题. 应用古典概率定义不难算出上述诸事件的概率如下：令 $q=\dfrac{1}{C_{52}^{5}}$，

(1) $4q$；

(2) $13\cdot 12\cdot 4q=624q$；

(3) $13\cdot 12\cdot 4\cdot 6q=3\,744q$；

(4) $9\cdot 4^5q=9\,216q$；

(5) $13\cdot C_{12}^{2}\cdot 4\cdot 4^2q=54\,912q$；

(6) $C_{13}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot 44q=123\,552q$；

(7) $13\cdot C_{12}^{3}\cdot 6\cdot 4^3q=1\,098\,240q$.

对于这个问题，纽约州立大学的计算机科学教授 Nicholas Findler 在其论文《计算机打扑克》中也作了类似的阐述.

参考文献 [73,p.61],[72,p.80],[80,9〈1979〉].

（谈祥柏 周冠廷）

睡美人的故事（A Tale of the sleeping beauty） n 把形状相同的钥匙，其中只有一把能开城堡密室的房门，但却不知道究竟是哪一把. 现有 n 人，每人有一次机会允许取一把钥匙试开密室房门，于是大家争先恐后，欲抢先试开，以为能"先下手为强". 试问先试开的人占便宜吗？

这道概率题出自外国童话故事《睡美人》（又称《林中美人》）. 据说古代某国有一位才貌双全的公主，由于她父亲得罪了一个鬼精灵，她便受到妖法禁制，昏睡不醒. 该精灵断言她将沉睡千年.

国王虽然千方百计地进行救治，却始终毫无效验，只好把她关闭在特意为之建造的城堡之中. 该城堡中有一间精致绝伦的密室，公主就沉睡在那儿. 若干年后，一群求婚者慕名而来. 他们之中，既有公子王孙，也有草莽英雄. 这伙人都自吹找到了灵丹妙药能够起死回生，因而跃跃欲试，妄想做一个"入幕之宾".

他们不但进入城堡而且找到了一串钥匙，共 n 把，但其中只有一把能打开密室的房门，可是却不知道究竟哪一把能开门，只好任意取一把试开，但每人只能有一次机会. 于是大家吵吵嚷嚷，甚至拔拳动武，因为大家脑子里都有一句牢不可破的古训"先下手为强"，都想来一个先拔头筹. 至于进入密室之后能否使公主苏醒，他们眼下先不考虑这个问题.

看门的老头子却在笑他们愚蠢，这种小问题都搞不清楚哪有资格做公主的丈夫？

设试开的次数是随机变量 ξ，"$\xi=k$"表示前面的 $k-1$ 次都未打开房门，而恰在第 k 次打开了.

注意在第 m 次试开时，已取走了 $m-1$ 把钥匙，而在余下的

$n-m+1$ 把钥匙中只有一把能开门,故在第 m 次试开时,打得开的概率是

$$\frac{1}{n-m+1},$$

打不开的概率是

$$1-\frac{1}{n-m+1},$$

于是

$$P(\xi=k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\cdot\frac{1}{n-k+1}$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}$$
$$=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

所以不论谁先谁后,各人成功的概率都是相同的,先下手者并不占便宜也.

顺便指出,打开密室房门所需试开次数 ξ 的数学期望为

$$E(\xi)=(1+2+\cdots+n)\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

方差为

$$D(\xi)=E(\xi^2)-(E\xi)^2$$
$$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)\frac{1}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{n^2-1}{12}.$$

参考文献 [66,p.51].

(谈祥柏 周冠廷)

排队找零钱问题(Change from money paid) 剧院售票窗口前 $2n$ 个人排队买票,每张票定价 5 元,每人限购一张.其中只带一张 5 元与只带一张 10 元的各有 n 人.开始售票时售票窗口没有零钱

可找.试问：大家都能顺利买到票，售票员始终不会找不出零钱的排队方法共有多少种？不因找不出零钱而要顾客等候找钱的概率是多少？

用 0 代表带 5 元钱的顾客，1 代表带 10 元钱的顾客，则本问题即可转化成：有 n 个 0 和 n 个 1，问有多少种排列方法，使排成的 0、1 序列里，任意前 i(i 可以从 1 变到 $2n$)个数字中，0 的个数总不少于 1 的个数.此性质称为前束性质.

把问题转化成图形，使之更易于理解.为此，我们把 0 看做向右走一步，把 1 看做向上走一步，那么 n 个 0 和 n 个 1 所组成的数字序列和图中从原点(0,0)到右上角点(n,n)的递增路径是一一对应的.于是，我们只要计算路径的条数就行了.

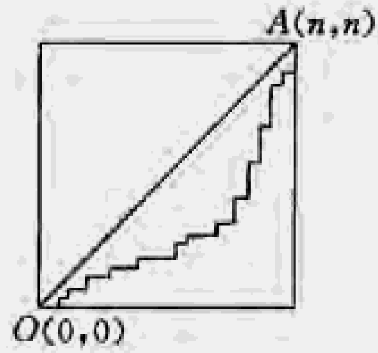


图 3－9

再进一步看，具有前束性质的 0,1 序列又正好与不越过对角线 OA 的递增路径一一对应(如图 3－9)，而这种路径的总数为

$$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!},$$

这就是著名的 Catalan 数，它的前 10 项是 1,1,2,5,14,42,132,429,1 430,4 862.

由于从(0,0)到(n,n)的总路径数为 C_{2n}^{n}，故不会找不出零钱的概率是

$$\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}\Big/C_{2n}^{n}=\frac{1}{n+1}.$$

除了排队找零钱问题可以引出 Catalan 数之外，选举时的唱票领先问题也可以引出它来.选举唱票领先问题，在 1882 年法国数学家 Bertrand 证明了如下的命题(又称 Bertrand 投票定理)：假设在一次选举中候选人甲得 a 票，乙得 b 票 ($a>b$)，那么在唱

票过程中，甲的票数总比乙多的概率等于$\frac{a-b}{a+b}$. 应用上述路径分析的方法，先可算出：

$$P(\text{甲、乙的计票数在某时刻相等})=\frac{2b}{a+b},$$

于是就得

$$P(\text{甲的计票数总比乙多})=1-\frac{2b}{a+b}=\frac{a-b}{a+b}.$$

此外利用凸多边形的三角形剖分方法数也可以引出 Catalan 数. 据不完全统计，Catalan 数的各种组合数学解释已经不下 50 种之多. Catalan 数还有一个极为直观的几何意义，它可以看做是杨辉三角形中"中垂线"上的数除以依次递增的自然数(表明它是第几个 Catalan 数)而得出(如图 3-10).

①
1 1
1 ② 1
1 3 3 1
1 4 ⑥ 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 ⑳ 15 6 1
……

图 3-10

Catalan 数的一个简单而漂亮的递推公式为

$$C_n=C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_{n-1}C_1.$$

一般总以为这种数是由比利时数学家 Catalan(1814～1894)在 1838 年首先提出的. 但后来有人指出，欧拉早在 1758 年(相当于清乾隆二十三年)就已认识到它. 近年来，我国内蒙古师范大学的罗见今通过大量史料论证，所谓"Catalan 数"的首创者其实并非欧洲人，而是我国清朝的蒙古族学者明安图(1692～1763). 他的发现早于欧拉，比 Catalan 的发现几乎早了 100 年.

参考文献　[75,pp. 280～282],[1,pp. 301～306],[77,pp. 239～245],[78,pp. 29～40],[79,pp. 120～126].

(谈祥柏　周冠廷)

圣彼得堡悖论(St. Petersburg paradox) 投掷一枚均匀的钱币，直到出现正面为止，如果正面在第 r 次试验时首次出现，则赌徒赢得 2^r 元. 为使这样的赌博是"公平"的(所谓公平是指赌徒在一次赌博中赢利的数学期望等于赌徒付给赌场主的入场费). 问赌徒在赌博开始以前应付给赌场主多少钱，才能进入赌场参加这种"公平"赌博?

圣彼得堡悖论又称彼得堡赌法. 1725 年由瑞士数学家尼古拉·伯努利提出. 在他逝世后，1730 年彼得堡学院刊登出这道概率问题，吸引了一批学者的关注. 与他同时代的著名数学家丹尼尔·伯努利、达朗贝尔、Buffou 等以及后来 19 世纪与 20 世纪的一些数学家，曾屡次投入彼得堡赌法的讨论. 但它的实质直至近代才被认识. 因此彼得堡赌法便成为历史上著名的概率难题之一.

设在彼得堡赌法中赌徒参加一次赌博的赢利为 X，由于掷一枚钱币直到第 r 次才首次出现正面的概率为

$$p_r = \frac{1}{2^r}, \quad r = 1, 2, 3, \cdots$$

依据彼得堡赌法，赌徒赢利的数学期望是

$$E(X) = \sum_{r=1}^{\infty} 2^r \cdot \frac{1}{2^r} = 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty.$$

在这里尼古拉·伯努利给人们构造了一个随机变量的数学期望为无限的典型例子. 这就是说，为了参加这种所谓"公平"的赌博，赌徒必须先交给赌场主无穷大的一笔巨款. 这是不可能的. 因此这样的赌法似乎是十分荒诞的，故被称为圣彼得堡悖论.

然而，在实际问题中，如在等待时间等物理问题里，无限数学期望的变量起着重要作用. 但是无限数学期望的理论已远远超越了当时研究的随机数学模型. 数学家们意识到涉及输赢金额随机变化的无限赌本的赌博问题，比有限赌本的输光问题要

困难得多.开始时,数学家们一度围绕着赌本问题进行热烈的讨论,企图通过对彼得堡赌法进行微小修正来解决这道难题.例如,尼古拉·伯努利的侄子丹尼尔·伯努利曾导入了所谓"道德的期望"这一概念,但这并未能解决彼得堡赌法这一悖论.值得一提的是,法国物理学家、数学家泊松所发表的见解,大意如下:具有无限多财产的自然人或法人是不存在的,所以赌场主要求赌徒只要正面多久不出现就支付多大的一笔款子,使赌徒担负了一种无法实行的"契约".如果稍稍改变彼得堡赌法的条件,赌场主支付的款额 2^r 到不超过自己的本钱为度,而当 2^r 超过赌场主的赌本时,从第 r 次起赌场主则支付与自己赌本等值的款额.例如,赌场主的赌本为 10^6 元,这时

$$2^{19} < 10^6 < 2^{20},$$

当 $r \leqslant 19$ 时,赌场主按彼得堡赌法向赌徒付钱,当 $r \geqslant 20$ 时,赌场主按修改的规则付钱.此时赌徒赢利的数学期望为

$$E(X) = \sum_{r=1}^{19} 2^r \cdot \frac{1}{2^r} + \sum_{r=20}^{\infty} 10^6 \cdot \frac{1}{2^r} \approx 21\ (\text{元}).$$

由此可见,在修改后的赌博规则下,赌徒每次赌博赢利的数学期望有限,赌徒支付相应有限的入场费是能承受的.

在转入有限数学期望的"公平"赌博问题的讨论中,数学家们发现,有时"公平"赌博对参加赌博的双方并不公平.设每一次赌博赌徒赢利的数学期望为 $\mu = E(X)$,如果赌徒每次的入场费为 μ',则当 $\mu' > \mu$ 时,赌博对赌徒不利;当 $\mu' < \mu$ 时,对赌徒有利;而当 $\mu' = \mu$ 时,就是所谓"公平"的赌博.美国著名数学家 Feller 给出了一个"不利于赌徒的'公平'赌博"的例子:设在赌博中赌徒每次赢利的值为 $0, 2, 2^2, 2^3, \cdots$ 赢利为 2^k 的概率为

$$p_k = \frac{1}{2^k \cdot k \cdot (k+1)},$$

$$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + \cdots),$$

则赌徒赢利 X 的数学期望为

$$\begin{aligned}\mu = E(X) = &\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot p_k \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\ &= 1\ (\text{元}).\end{aligned}$$

当赌徒每次赌博的人场费 $\mu' = 1$ 元时，从表面上看这种赌博是公平的. Feller 用大数定理的截尾法讨论并指出，当赌徒长时间的赌下去，这种貌似公平的赌法，对赌徒而言强烈地处于不利的地位. 实际上，对许多数学期望有限的所谓“公平”赌博，仅在少数几次赌博中碰巧会对赌徒有利，但在较长时间的赌博中总对赌场主有利. 例如，赌徒参加一种赌博，每次以 10^{-6}的概率净赢 $10^6 - 1$ 元，而以 $1 - 10^{-6}$ 的概率损失入场费 1 元. 易知 $\mu = \mu' = 1$，这对于一个赌徒而言，在一次赌博中是一种“公平”赌博. 然而，对于赌场主而言，参加赌博的人很多，如在 100 万次赌博中，赌徒共需付 100 万元的入场费，而在这 100 万次赌博中，赌徒可能赢得 0，1，2，…次的概率，依据稀有事件的概率服从泊松分布的规律可知，赌徒们在 100 万次试验中损失 100 万元的概率为

$$p_0 = \frac{1}{0!} e^{-1} \approx 0.368.$$

持平的概率为

$$p_1 = \frac{1}{1!} e^{-1} \approx 0.368,$$

而赌徒能赢得 100 万元的概率仅为

$$p_2 = \frac{1}{2!} e^{-1} \approx 0.184.$$

由此可见，这对赌场主十分有利. 这样的赌博模型，在保险事业中很有实用价值. 现在所有火灾、车祸等其他类似项目的保险，都属于这种赌博模型. 当被保险的客户发生意外时，公司支付巨额的赔偿费，但相应发生意外事件的概率很小. 对于被保险的客户而言，每年仅参加一次保险试验，试验的次数决不会变得很多，因此对于客户来说，在每年的保险中，只要"入场费"等于赔偿金额的数学期望，便是一种"公平赌博". 万一灾难发生，客户在经济上仍能得到补偿，可免遭破产的危险. 在这种意义之下，参加这类保险，客户在经济上是有利的. 然而对于保险公司来说，它进行的"赌博"次数很多，由上面的分析可知，从总体上来说，开展稀有不幸事件的保险业务对保险公司总是有利的.

数学家们将彼得堡赌法中无限数学期望的问题修改成有限的情形进行讨论，虽然取得了不少有价值的成果，但对该神秘的悖论的讨论仍未能揭示它的实质. 实际上，对于无限赌本问题的讨论需应用大数定律. 自从 1713 年瑞士数学家雅各布·伯努利在《推测术》一书中首次用数学方法证明了第一个大数定律：

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right\}\to 1 \quad (n\to\infty),$$

直到 1909 年法国数学家 Borel 证明了强大数定理：

$$P\left\{\frac{\mu_n}{n}\to p\right\}=1.$$

在这近两个世纪的长时间里，大数定理只涉及有限数学期望的情形，在这段时间里数学家们还不明了在数学期望为无限时，如何对彼得堡赌法进行研究. 直到近代，数学家们才发现数学期望为无限时，可以用更为一般的方法来讨论. 设赌徒在第 k 次赌博中的赢利为 X_k，则 n 次赌博的累计赢利为 $S_n=X_1+\cdots+X_n$，如果每次赌博需付入场费 μ'，则 $S_n-n\mu'$ 为净累计赢利，其中 $e_n=n\mu'$ 为 n 次

赌博的累计入场费. 当 $E(X_k)$ 不存在时,不能令 $e_n = n\mu'$,必须用其他方法来确定 e_n. 为此,首先对无限数学期望时的"公平"赌博重新定义如下:如果有

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{e_n}-1\right|>\varepsilon\right\}\to 0$$

成立,则称累计入场费为 e_n 的赌博在古典意义下的公平赌博. Feller 在其名著《概率论及其应用》第 1、2 卷中关于彼得堡赌法分别获得如下重要结论:

定理 1 赌徒的入场费是依赖于赌博次数 n 的,当赌徒累计所付入场费 $e_n = n\log_2 n$ 时,则彼得堡赌法成为古典意义下的公平赌博.

定理 2 设在彼得堡赌法中赌徒第 k 次赌博的可能赢利为 X_k,e_n 为 n 次赌博的累计入场费,F 是 X_k 的共同的分布,令

$$\mu(S)=\int_0^s xF\{dx\},$$

$$\rho(S)=\frac{\mu(S)}{S[1-F(S)]},$$

则存在常数 e_n,使

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{e_n}-1\right|>\varepsilon\right\}\to 0$$

成立的充分必要条件是:当 $S\to\infty$ 时,$\rho(S)\to\infty$,则存在这样的数 S_n 使得 $n\mu(S_n)=S_n$,并且上述趋于零的极限对 $e_n=n\mu(S_n)$ 成立.

参考文献 [74,pp.263~265,275~276],[76,p.262],[75,p.254],[70,pp.396~398].

(周冠廷 马 复)

概率与 π(Probability and π) 随机地写出两个小于 1 的正数 X、Y,它们与 1 一起形成一个三元数组(X,Y,1),以这样的一个三元数组为一个三角形的三边之长,则它们能构成一个钝角三角形

的概率是 $\frac{\pi-2}{4}$.

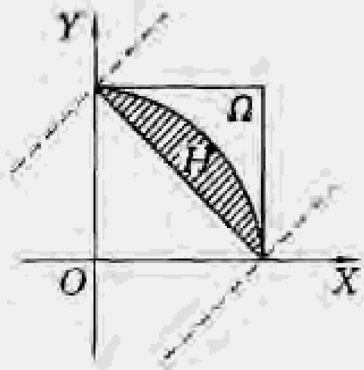


图 3-11

由题设知,三元数组 $(X,Y,1)$ 中 (X,Y) 可在平面区域 $\Omega=\{(X,Y):0<X<1,0<Y<1\}$ 上取值,而三元数组 $(X,Y,1)$ 能构成钝角三角形的充分必要条件是 (X,Y) 应在平面区域(如图 3-11)

$$H=\left\{(X,Y):(X,Y)\in\Omega,X^2+Y^2<1,\begin{cases}X+Y>1;\\X+1>Y;\\Y+1>X.\end{cases}\right\}$$

上取值. Ω、H 的面积分别为 1、$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 由几何概率定义知,三元数组 $(X,Y,1)$ 能构成钝角三角形的概率是 $\frac{\pi-2}{4}$.

概率与 π 是法国博物学家、统计学家 Buffon(1707～1788)最早研究的问题之一. 早在拉普拉斯给出概率的古典定义之前,人们就提出了几何概率的概念,它是用来研究无穷多个可能结果的随机现象的. 几何概率定义为质点落入满足某条件的区域的度量与整个区域的度量之比. 它保留了古典概率定义中的等可能性,而将试验的结果(即基本事件)推广到无限的情形,扩大了概率研究的范围,并使概率的有限可加性推广到可列可加性,推进了概率论的发展.

参考文献 [84,pp. 183～195],[69,p. 411].

(周冠廷 马 复)

Buffon 投针问题(Buffon's needle problem) 在平面上画有间隔为 a 的等距平行线. 向该平面随机地投掷一根长为 l $(l<a)$ 的针. 试求针与平行线相交的概率.

Buffon 是法国著名博物学家,他最早研究几何概率. 1777 年出版的《或然性算术试验》一书,提出了投针试验及其概率计算的

著名问题，创造了用投针试验来估计π值的方法.

设针的中点为M，M与最近一条平行线的距离为x，针与平行线的交角为φ（如图3－12所示），于是(x,φ)的一切可能值的集合为

$$\Omega=\left\{(x,\varphi):0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\},$$

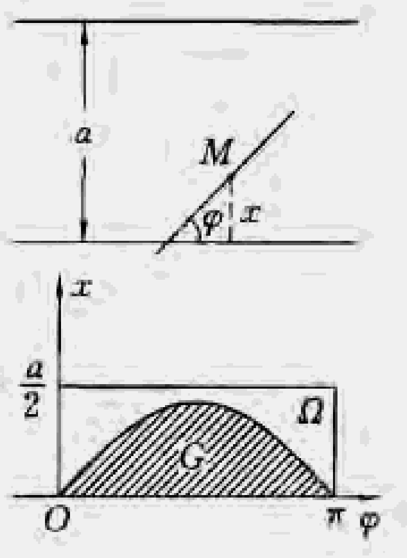


图3－12

而针与平行线相交的充分必要条件是(x,φ)在集合

$$G=\left\{(x,\varphi):0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\}$$

中取值.由几何概率定义知，所求的概率应为G、Ω的面积之比，即

$$p=\int_0^\pi\frac{\frac{l}{2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\pi}\cdot\frac{a}{2}=\frac{2l}{\pi a}.$$

Buffon问题的推广之一：若针长$l\geqslant a$，则针与平行线相交的充分必要条件是(x,φ)应在平面区域

$$H=\left\{(x,\varphi):\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,\\ \left\{0\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{a}{l}\right\}\cup\left\{\pi-\arcsin\frac{a}{l}\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\},\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{或}\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\\ \arcsin\frac{a}{l}\leqslant\varphi\leqslant\pi-\arcsin\frac{a}{l}.\end{cases}\right\}$$

上取值，由此可知针与平行线相交的概率为

$$p=\frac{1}{\pi}\left[(\pi-2\arcsin\frac{a}{l}-\frac{2l}{a}\left(\arcsin\frac{a}{l}\right)+\frac{2l}{a}\right].$$

当 $l=a$ 时，$p=\frac{2}{\pi}$；当 a 取定而 $l\to\infty$ 时，$p\to 1$.

Buffon 问题的著名推广之二，称为拉普拉斯问题：设平面上有两组相互垂直的等距平行线，平行线的距离分别为 a 和 b. 它们把平面分割成许多相等的矩形. 投针长度 l 小于 a 及 b. 试问针与矩形边界相交的概率是多少？

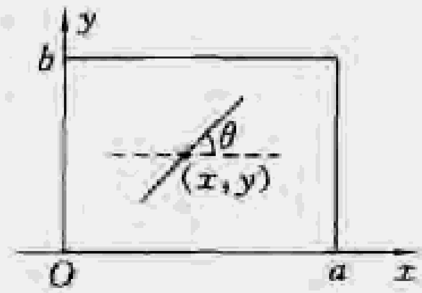


图 3-13

设针的中点落在 $(0,a)$ 上的坐标为 x，落在 $(0,b)$ 上的坐标为 y，针与横轴的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，如图 3-13，易知针与矩形边界不交的概率为

$$\frac{1}{ab\pi}\int_0^{\pi}(a-l|\cos\theta|)(b-l\sin\theta)d\theta.$$

于是针与矩形边界相交的概率是

$$1-\frac{2}{ab\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ab-bl\cos\theta-al\sin\theta+l^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{l}{ab\pi}[2(a+b)-l],$$

当 $b\to\infty$ 时，概率为 $\frac{2l}{\pi a}$，与 Buffon 问题的解一致；当 $l=b<a$ 时，概率为 $\frac{2a+b}{\pi a}$；当 $a=b$ 时，概率为 $\frac{3}{\pi}$.

Buffon 问题的推广之三：在平面上画有间隔为 d 的等距平行线，向该平面任意投掷一个边长分别为 a、b、c（均小于 d）的三角形，则不难求得该三角形与平行线相交的概率为 $\frac{a+b+c}{\pi d}$. 当三

角形退变成长度为 a 的针时，与平行线相交的概率与 Buffon 问题的解一致.

较一般的推广，称为广义 Buffon 问题：平面上画有间隔为 a 的等距平行线，向该平面任意投一长为 l 的凸形铁丝圈，则它与平行线相交的概率 $p=\frac{l}{\pi a}$.

求解方法是，先将铁丝细分成若干段，设其中第 k 段的长为 l_k ($<a$)，当 l_k 充分小时，可将其视为一直线段，于是这一小段与平行线相交的概率为

$$\frac{2l_k}{\pi a}.$$

再设

$$X_k=\begin{cases}1,\text{第 } k \text{ 段与平行线相交;}\\0,\text{第 } k \text{ 段与平行线不相交.}\end{cases}$$

于是铁丝圈与平行线相交的点数为 $\sum_k X_k$，交点数的数学期望为

$$\begin{aligned}E\left(\sum_k X_k\right)&=\sum_k E(X_k)\\&=\sum_k\left[1\cdot\frac{2l_k}{\pi a}+0\cdot\left(1-\frac{2l_k}{\pi a}\right)\right]\\&=\sum_k\frac{2l_k}{\pi a}\\&=\frac{2l}{\pi a}.\end{aligned}$$

由于铁丝圈与平行线的交点数或为 2 或为 0(相切时视为有两个交点)，故交点数的数学期望又应等于

$$2p+0\cdot(1-p)=2p.$$

故

$$2p = \frac{2l}{\pi a}.$$

于是

$$p = \frac{l}{\pi a}.$$

Buffon 投针问题是找矿问题中一个重要的数学模型.设某区域有一矿脉长为 l,用距离为 a 的一组平行线进行探矿,若 $l < a$,则能找到这个矿脉的概率为 $\frac{2l}{\pi a}$.

Buffon 首创用投针试验来估计 π 值.方法是将实际投针次数记为 N,针与平行线相交的次数记为 n,当 N 足够大时,由等式

$$\frac{n}{N} = \frac{2l}{\pi a}$$

得到 π 的估计值为 $\frac{2Nl}{na}$.历史上有许多著名的统计学家做过 Buffon 投针试验,都证明了 Buffon 创造的方法是正确的.更有价值的是,随着电子计算机的发展,人们依据 Buffon 投针试验的思想,建立起了一门新兴的计算科学,称为蒙特卡洛方法.它对高维空间的积分问题的数值计算具有优良的功能,已在原子物理等高科技领域的理论计算中发挥了许多作用.

参考文献 [84,pp.183～195],[70,pp.39～40],[62,p.6,p.101],[67,pp.38～40],[69,pp.133～134],[66,pp. 22～25,p.54].

(周冠廷 马 复)

Bertrand 奇论(Bertrand paradox) 在半径为 1 的圆内随机地取一条弦,问其长超过该圆内接等边三角形的边长 $\sqrt{3}$ 的概率等

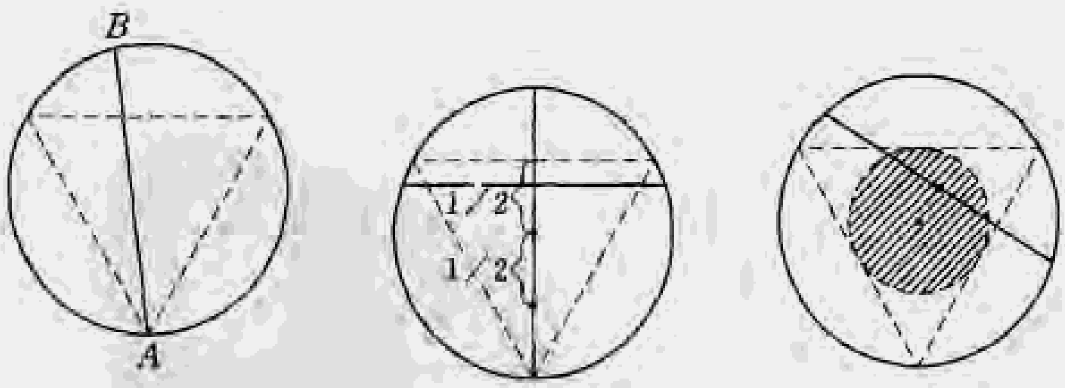
于多少?

这一奇论是1889年法国数学家Bertrand在巴黎出版的《概率的计算》一书中提出的.他在这本书中对几何概率提出了批评,并以生动的实例引起了大家的注意.这种善意的批评推动了概率论的发展.

19世纪时,不少人相信,只要找到适当的等可能性描述,就可以给出概率问题的唯一解.然而Bertrand构造了一个在等可能性描述下同一问题却能合理地给出多个相互矛盾答案的"奇论".这一奇论对用等可能性描述的概率提出了挑战,迫使数学家们进一步研讨概率的基础理论.因此,这一奇论在推进概率论基础理论的发展上起过重要作用.

这个问题至少有下面三种不同的解法.

解法1 任取一弦AB.过A点作圆的内接等边三角形,这一三角形内角A所对的弧,占整个圆周的$\frac{1}{3}$(如图3-14(a)),当且仅当B点落在这段弧上时,AB弦的长度才超过$\sqrt{3}$,故所求的概率等于$\frac{1}{3}$.



(a) (b) (c)

图3-14

解法2 弦长是它与圆心之间的距离唯一确定的,假定它垂直于某一直径(如图3-14(b)),当且仅当它与圆心的距离小于

1/2时，弦长才超过 $\sqrt{3}$，故所求概率为$\frac{1}{2}$.

解法 3 作圆内接等边三角形的内切圆(如图 3-14(c))，该圆的半径是$\frac{1}{2}$，当且仅当弦的中点落在内切圆内时，弦长才超过 $\sqrt{3}$，故所求的概率是内切圆与大圆的面积之比为$\frac{1}{4}$.

同一问题，获得三个不同的答案，其原因是：解法 1 把弦的端点落在圆周上的任一点，视为等可能的；解法 2 把弦的中点分布在直径上的任一点，理解为等可能的；解法 3 则是将弦的中点落在圆内任一点，解释为等可能的. 因此，相对于三种不同等可能的解释，所得到的三种相应的不同答案都是正确的. 举个简单的例子，有人问：从你家到学校要花多长时间，而没有说明是“步行”、“骑自行车”还是“坐汽车”，这个问题自然有不同的答案.

这个奇论的功绩是，揭示出了当随机试验有无穷多个可能结果时，“等可能”这一概念的意义有时是含混不清的，而且还会给概率问题的实际计算带来种种疑难. 这反映出，几何概率的逻辑基础是不够严密的. 后来人们不断寻求定义概率的新途径. 苏联数学家 Kolmogorov 于 1933 年在他的《概率论基础》一书中，第一次给出了概率的测度论式的定义，和一套严密的概率论的公理化结构，指明了概率应具有的基本性质，既概括了概率的古典定义、几何定义以及频率定义的基本特征，又避免了各自的局限性和含混之处，使概率论成为一门严谨的基础数学，从而统一了人们对概率的认识.

参考文献 [70，pp. 38～39]，[71，pp. 143～152]，[67，pp. 40～41].

(周冠廷 马 复)

等待时间问题(Waiting time problem) 罐中有 M 只黑球、N 只白球，从中随机地一只接一只地取球，每次取出后不放回，直到

罐中剩 $k(1 \leqslant k \leqslant N)$ 只白球为止. 设 X_k 是从罐中取出的总球数. 求 $X_k = r(r = N-k, N-k+1, \cdots, M+N-k)$ 的概率.

这一问题属于罐子模型中的古典等待时间问题. 这类问题的一般模型是指罐中有两种颜色的球,无放回地将球一只接一只地取出,直到球数满足指定的条件为止,讨论所需取球的次数及其相应的概率. 罐子模型的概率问题,最先出现在《惠更斯选集》的第14卷中. 罐子模型中的古典等待时间问题,由德国数学家 Lēxis 于 1876 年及 1903 年发表的两篇论文中正式严格提出. 1923 年,美国著名数学家波利亚提出了一种应用更为广泛的罐子模型(称为波利亚罐子模型):设罐中有 M 只黑球、N 只白球,从中每次取出一球,观察后放回,并再加入 C 只同色的球. 当 $C=-1$ 时,即为无放回取球情形. 如果共取 n 次,则取得白球数"$X=k=0$"的概率为

$$P(X=k)=\frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{M+N}{n}}, \quad k=0,1,\cdots,n.$$

这一分布列称为超几何分布.

如果把问题改成:在波利亚罐子模型($C=-1$)试验中,直到出现 k 只白球为止,求所需取出的球数 X 的概率分布. 这就是等待时间的概率分布,称为负超几何分布,或称为 $C=-1$ 时的逆波利亚分布. 导出此分布,也就给出了上述问题的解.

我们注意到事件 $\{X_k=r\}$ 表示"直到取出 r 只球为止,罐中恰剩 k 只白球". 这一事件与事件"在前 $(r-1)$ 次里恰取出 $(N-k-1)$ 只白球,且在第 r 次恰取到 1 只白球"等价. 由超几何分布知,在前 $(r-1)$ 次恰取出 $(N-k-1)$ 只白球的概率为

$$\frac{\binom{N}{N-k-1}\binom{M}{r-N+k}}{\binom{M+N}{r-1}}=\frac{\binom{N}{k+1}\binom{M}{r-N+k}}{\binom{M+N}{r-1}},$$

第 r 次在余下的 $(M+N-r+1)$ 只球中恰取到 1 只白球的概率是

$$\frac{k+1}{M+N-r+1}.$$

再由概率的乘法公式便得到

$$\begin{aligned}&P(X_k=r)\\&=\frac{\binom{N}{k+1}\binom{M}{r-N+k}}{\binom{M+N}{r-1}}\cdot\frac{k+1}{M+N-r+1}\\&=\frac{\binom{M+N-r}{k}\binom{r-1}{N-k-1}}{\binom{M+N}{N}},\\&\qquad r=N-k,N-k+1,\cdots,M+N-k.\end{aligned}$$

古典等待时间问题的推广之一,是一只罐子里有 $i(i\geqslant 3)$ 种颜色的球,从中无放回地每次取出一球,直到指定的结果出现为止所需等待的时间,其概率分布称为多重负超几何分布或多重逆波利亚分布.另一类古典等待时间问题,是由古典占位问题推广得到的.其模型是:将球一只接一只地随机地放进 N 只罐子中,这里球数不限定,直到指定的结果出现为止,如直到指定的一只罐进 r 只球为止;直到 N 只罐子都进球时为止;直到指定的 k 只罐中都至少有 r 只球为止等,到这些事件出现时为止,所需投入的总球数的概率分布.其中最简单、最重要的等待时间问题的分布,是所谓几何分布和帕斯卡分布.将球随机地投入 1、2 编号的两只罐中,每

1 只球投进 1 号罐的概率为 $p(0<p<1)$，投进 2 号罐的概率为 $q=1-p$. 设 X 为直到首次投进 1 号罐为止所需投球的次数，易知 X 的分布列为

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$$

这就是著名的几何分布. 如设 Y 为直到第 r 次投进 1 号罐时为止所需投球的次数，则 Y 的分布列为

$$P(Y=k)=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

这就是著名的帕斯卡分布(又称为负二项分布).

参考文献　[81,p. 80,p. 155,pp. 176～178,p. 198],[73,pp. 159～161],[66,p. 64]

(周冠廷　马　复)

确诊率问题(Diagnoslic accurate ratio problem)　某种方法诊断某种疾病的正确率一定，该疾病的患者密度一定，则随机取一人经过此方法诊断确实患有此疾病的可能性是多少？

确诊率问题最早由俄罗斯院士丹尼尔·伯努利第一个提出，1763 年在英国牧师、统计学家 Bayes 的著作中才得到解决. 解确诊率问题需应用著名的 Bayes 公式. 这个公式的思想包含在 Bayes 逝世两年后由其友 Richard Price(1723～1791,英国保险统计学奠基人之一)整理发表的题为《论有关机遇问题的求解》(1763 年)这篇著名论文中. 几年后它得到法国数学家拉普拉斯的重视，并对 Bayes 的结果给出了明确的陈述及数学公式，即 Bayes 公式. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件 B 的一个划分，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，则 Bayes 公式为：

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}.$$

Bayes 公式从形式上看,它不过是条件概率的一个简单推论,但却包含了归纳推理的一种深刻思想.在英国著名统计学家 Fisher(实验遗传学和推断统计学的创始人,在统计发展史上地位显赫. 但他年迈时又成为数理统计新理论、新方法的反对者. 他反对 Bayes 统计)去世后,主张 Bayes 统计思想的学者们把它发展成为一种系统的统计推断理论和方法,称为 Bayes 统计,并形成了 Bayes 学派.这道题及其解法能反映出 Bayes 学派的观点.

令事件 $A=\{$患该病者$\}$,$B=\{$经诊断认为患该病$\}$,于是人群中该病患者和非患者的密度是概率 $P(A)$与 $P(\overline{A})$.这些概率经社会调查或由以往的卫生统计资料获得,在对一个人进行诊断之前就已经知道,故称为先验概率(或假设概率).一个人经诊断试验后认为有此疾病,而此人确实患有此病或者此人并非患有该病的概率,是条件概率 $P(A|B)$和 $P(\overline{A}|B)$.这些条件概率反映了试验中事件 B 发生后,人们在这种新情况出现下对事件 A、$\overline{A}$ 发生的可能性的新认识,因此称它们为后验概率(或验后概率),后验概率是经过诊断试验后对先验概率的修正,有助于提高正确的诊断率.其中 $P(A|B)$就是本题所要求的概率.由 Bayes 公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})},$$

其中 $P(A)$、$P(\overline{A})$、$P(B|A)$、$P(B|\overline{A})$由题意知均为已知.事实上,所谓诊断某种疾病的正确率一定,应包含两个方面的诊断率,其一是在该病的患者中的诊断率 $P(B|A)$已知;其二是在没有患此病的人中的误诊率 $P(B|\overline{A})$也已知.例如,事件 $A=\{$感冒患者$\}$,$B=\{$经测体温为发烧$\}$,设 $P(A)=0.50$,$P(B|A)=0.80$,$P(B|\overline{A})=0.05$,则从人群中随机抽取一人,已测得其体温为发烧,那么这个人确实是患有感冒的概率由 Bayes 公式得

$$P(A|B)=\frac{0.50\times0.80}{0.50\times0.80+0.50\times0.05}\approx0.94.$$

这就是说，对于一个已经发烧的人而言，我们有 94%的把握可以断定他是患了感冒.由此可见，当病人发烧时，在没有其他特殊体征的情形下，医生通常首先诊断他患感冒是不无依据的.又如 $A=\{$癌症患者$\}$，$B=\{$经某种检验结果为阳性$\}$，设 $P(A)=0.002, P(B|A)=0.95, P(B|\overline{A})=0.05$，则某人被检验为阳性，而他确实是癌症患者的概率是

$$P(A|B)=\frac{0.002\times 0.95}{0.002\times 0.95+0.998\times 0.05}\approx 0.036\,68,$$

尽管后验概率 0.036 68 仍然很小，但与先验概率 0.002 相比已提高了 18 倍，在诊断时，医生结合病者体征，这个后验概率仍有一定的参考价值.还应指出，在一定条件下，我们可以改设先验概率 $P(A)=0.036\,68$，这时若检验出一个阳性，则其后验概率为

$$P(A|B)=\frac{0.036\,68\times 0.95}{0.036\,68\times 0.95+0.963\,32\times 0.05}\approx 0.420.$$

若再改设 $P(A)=0.420$，则由 Bayes 公式得

$$P(A|B)\approx 0.932.$$

由此可见，先验概率增大，相应的后验概率也大为提高.在实际工作中正是如此一级一级筛选的.

Bayes 统计近 20 年来发展较快，已被有效地应用于生物、医药卫生、公共事业以及航天飞行器试验等高科技研究领域.然而必须指出，应用 Bayes 统计的必要前提是需要知道先验概率，在许多场合，先验概率往往不易确定，或者它的确定带有人为的主观臆断.在 Bayes 公式的使用中，最有争议之处就是先验概率的选取.故 Bayes 学派的观点在统计界时有争议也是正常的.

参考文献　[75, pp. 55～60], [71, pp. 488～489], [64, pp. 131～152], [65, p. 301], [67, pp. 64～67], [69, pp. 132～

135].

（周冠廷　马　复）

巴拿赫火柴问题(Banach match problem)　一位吸烟的数学家在左、右口袋里各放一盒火柴，每盒火柴有 N 根. 每次用火柴时，数学家随机地从一个口袋的火柴盒里取一根，问：(1)发现一盒空而另一盒恰剩 r ($r=1,2,\cdots,N$) 根的概率是多少？(2) 在第一次用完一盒的最后一根火柴时，另一盒恰剩 r 根的概率是多少？

我们把第 i 次在左边口袋的火柴盒里取一根火柴的事件称为第 i 次“成功”，反之，在右边取称为“失败”. 而每次试验“成功”与“失败”是等可能的. 于是当发现“左边口袋的火柴盒空时右边火柴盒里恰有 r 根”的事件等价于“在第 $N+1$ 次成功之前恰有 $N-r$ 次失败”，而这一事件的概率应用二项概率公式可得：

$$
\begin{aligned}
&P\{\text{在前 } 2N-r \text{ 次中恰有 } N \text{ 次成功}\}\cdot\\
&P\{\text{第 } 2N-r+1 \text{ 次成功}\}\\
=&C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r}\cdot\frac{1}{2}\\
=&C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}.
\end{aligned}
$$

同理可知，发现右边口袋火柴盒空而左边剩 r 根的概率也等于上述结果. 故问题(1)的解为

$$
2C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}=C_{2N-r}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r}.
$$

这个解的一个巧妙的推论是下列公式：

$$
\sum_{r=0}^{N}\frac{C_{2N-r}^{N}}{2^{2N-r}}=1.
$$

类似地可计算出问题(2)的解为

$$
\begin{aligned}
&2P\{\text{在前 } 2N-r-1 \text{ 次中恰有 } N-1 \text{ 次成功}\}\cdot \\
&\quad P\{\text{第 } 2N-r \text{ 次成功}\} \\
&=2C_{2N-r-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r-1}\cdot\frac{1}{2} \\
&=C_{2N-r-1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r-1}.
\end{aligned}
$$

巴拿赫是近代波兰著名数学家.他提出的巴拿赫火柴问题(1),在现代计算机储存理论中已成为一个很好的数学模型.

参考文献　[73,pp.161～162],[75,p.117],[72,p.81,p.362],[62,pp.51～52].

（周冠廷　马　复）

普查疾病问题(**General survey of common diseases**)　某地区进行某种疾病普查,为此要检验每个人的血液,该地区有 N 人,逐个检验就得检验 N 次.试问有没有办法减轻检验工作量?

可以先将受验者分组,设每组为 k 人,把这 k 个人的血液混合在一起检验,若结果为阴性,这说明 k 个人的血液试验全为阴性.因而这 k 个人总共只要查一次就够了,检验工作量显然减少.但若结果是阳性,那就要对 k 个人再逐一进行检验,于是检验总次数为 $k+1$ 次.检验工作量反而有所增加.

k 个人需要的检验次数可能只要 1 次,也可能要 $k+1$ 次,它是一个随机变量,为了和老办法比较工作量的大小,应该求出其平均值(即平均检验次数).

如果被检查的疾病不是传染病或遗传病,则在受验人群中,各人检验结果是阳性还是阴性,一般都是独立的.设阳性率为 p,则阴性率为 $q=1-p$.于是,k 人一组的混合血液呈阴性的概率是 q^k,而呈阳性的概率是 $1-q^k$.设 ξ 为 k 个人一组混合检验时,每个人所需检验的次数.由此可求得每个人所需的平均检验次数为

$$E\xi=\frac{1}{k}\cdot q^{k}+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^{k})$$
$$=1-q^{k}+\frac{1}{k},$$

而按老办法,每个人应该检验1次.故当

$$1-q^{k}+\frac{1}{k}<1,\quad 即\quad q>\frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

时,用分组的办法就能减少检验次数.如果q已知,还可以从$E\xi=1-q^{k}+\frac{1}{k}$中选取最合适的整数k_0,使得平均检验次数$E\xi$达到最小值.

对一些不同的p值,下面的附表给出了使$E\xi$达到最小的k_0值.

阳性反应率 p	k_0	阳性反应率 p	k_0
0.140	3	0.020	8
0.110	4	0.015	9
0.080	4	0.010	11
0.050	5	0.005	15
0.040	6	0.003	19
0.030	6	0.001	32

当然,减少的工作量的大小既与p值有关,也与每组人数k有关.

参考文献　[67,pp.166～167],[66,pp.82～84].

（谈祥柏　周冠廷）

校对问题(Checking problem)　A、B两人独立地校对一本书的印样时,A发现a个错误,B发现b个错误.其中c个错误两人都发现过.问他们两人漏掉了多少个错误?

设N为这本书中的印刷错误总数.A、B发现书中任一印刷错误的概率分别为p_1、p_2($0<p_1<1,0<p_2<1$).两人校对工作是

独立进行的,由二项分布的数学期望知

$$Np_1=a,\quad Np_2=b,\quad Np_1p_2=c.$$

于是这本书的印刷错误总数为

$$N=\frac{Np_1\cdot Np_2}{Np_1p_2}=\frac{ab}{c}.$$

由此可得两人漏掉的印刷错误数目为

$$N-(a+b-c)=\frac{ab}{c}-(a+b-c)$$
$$=\frac{(a-c)(b-c)}{c}.$$

该问题的原始模型来自 1911 年英国原子物理学家 Rutherford 做 α 粒子散射实验(被称为 Rutherford 实验)时两台闪烁计数试验装备计数的校正问题.校对问题所用术语显得非常简单明了.值得一提的是,在 Rutherford 时代之前,人们认为原子是均匀浆糊状的.如果真是这样,Rutherford 知道,用 α 粒子打击原子层,就像用 15 英寸的炮弹轰击一层窗户纸一样.然而 Rutherford 在成千上万次试验中发现,总有一定比例的 α 粒子(约 8 000 个 α 粒子中有 1 个)被反射回来,这使他欣喜万分.他以实验为依据,用几何概率及统计反证法的思想进行论证,终于在无超高倍电子显微镜的时代,就提出了原子结构的星云模型:原子的结构与太阳系的结构相似,原子中心有一个质量密集的带正电的核,带负电的电子围绕原子核转动.原子内电子的电量总和等于核的电量,使整个原子呈中性.这个原子模型假设为人们探索原子内部的结构,打开了神秘的大门,开创了微粒子研究的新时代.

参考文献　[73,p.165].

(周冠廷　马　复)

六 其他

水手、猴子和椰子(Seamen, monkey and coconut) 五个水手带了一只猴子来到南太平洋的一个荒岛上,发现那里有一大堆椰子.由于旅途的颠簸,大家都很疲倦,很快就入睡了.第一个水手醒来后,把椰子平分成五堆,将多余的一只给了猴子,他私藏了一堆后便又去睡了.第二、第三、第四、第五个水手也陆续起来,和第一个水手一样,把椰子分成五堆,恰多一只给猴子,私藏一堆,再去入睡.天亮以后,大家把余下的椰子重新分成五堆,每人分一堆,正好余一只再给猴子.试问原先共有几只椰子?

设原先共有 N 只椰子,天亮后最后一次每人分得 F 只.根据题意可得方程

$$\left(\left(\left(\left(\left((N-1)\frac{4}{5}-1\right)\frac{4}{5}-1\right)\frac{4}{5}-1\right)\frac{4}{5}-1\right)\frac{4}{5}-1\right)\frac{1}{5}=F,$$

化简,得

$$N=\frac{5^6}{4^5}(F+1)-4,$$

即
$$1\,024N=15\,625F+11\,529. \qquad (*)$$

因为 4 与 5 互质,那么只有当 $\frac{F+1}{4}=1$ 时,N 可取得最小正整数解,即 $F=4^5-1=1\,023$ 时,有最小 $N=5^6-4=15\,621$.

由方程(*)可知符合题意的 N 可以有无数多个,而且符合方程(*)的 N 与 5^6 之和 $N+5^6$ 也是方程(*)的解.

依据这一结论,著名数理逻辑学家怀德海教授(Whitehead, Alfred North, 1861~1947,英国)先求出满足方程(*)的负整数解,而后求得正整数解.

当 $F=-1$ 时，由方程（*）可得 $N=-4$，于是 $-4+5^6$ 也是方程（*）的解. 这样求得本题中最少的椰子数是 $-4+15\ 625=15\ 621$（只）.

参考文献　[14，pp. 223～226]，[98，pp. 148～150].

（葛　军）

九宫数　二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央.

九宫数是世界上最早的三阶幻方.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

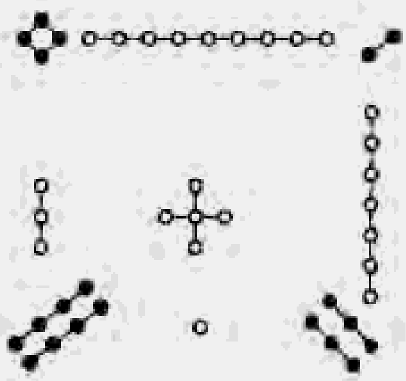


图 3-15

东汉郑玄（129～200）在注《易纬·乾凿度》的注文中有："太乙取其数以行九宫，四正四维皆合于十五."意思是：太乙神依照一定顺序巡行于九宫，这九个序数排列在正方形的九格里，纵、横、斜（对角线）上的三个数之和都等于 15.

后周时的甄鸾（公元 6 世纪）在注《数术记遗》里的"九宫算"时说："九宫者，二四为肩，六八为足，左三右七，五居中央."可见，九宫作为数学内容，早就记述在数学著作里了.

北宋的理学家们在解释《周易·系辞传》"河出图，洛出书，圣人则之"时，用天地生成数解释河图（古代传说渭河里跑出一匹龙马，背负一幅图就是天地生成数图）、用九宫数解释洛书（古代传说洛水里爬上一只神龟，背壳上的花纹就是九宫数）. 于是，河图、洛书就被说成是我国数学活动的起源，给我国的数学起源蒙上了神秘色彩.

九宫数也称作洛书.

南宋数学家杨辉仔细研究了洛书的构造，并制作出三、四、五、六、七、八、九阶幻方及百子图（纵、横 10 个数之和均为 505，但两条对角线上的 10 个数之和不等于 505，所以不是十阶幻方）共有 13 幅图，他称之为“纵横图”，另外，还有一些从纵横图发展衍化出来的图，如聚五、聚六、聚八、攒九、八阵图等，发表在他的数学著作《续古摘奇算法》(1275)里. 从此，在我国数学研究活动里，纵横图（幻方）以及衍化的数图也成为数学家们研究的一个内容. 明清两代多种数学著作里都记载有纵横图的内容.

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

百子图

图 3-16

解放后，还曾出土过幻方的实物：1956 年在西安市郊的元代安西王府旧址出土一个铁质六阶幻方，上面是东阿拉伯数码；1980 年在上海浦东一座明代墓葬中出土一个玉质四阶幻方，上面是汉字数字，大概是作为避邪的吉祥物.

一般说来，幻方是由 $1\sim n^2$ 数字排列成正方形，使其每行、每列及对角线的和都等于 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. 幻方属于组合数学内容.

参考文献　[1,p.121],[36,p.302],[7,p.86],[15,p.123].

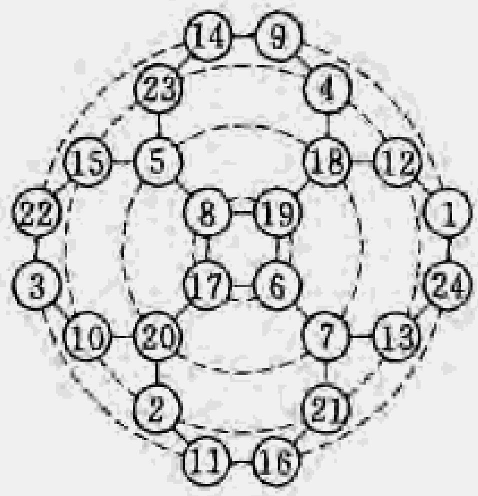
（睦秋生）

洛书　见九宫数.

纵横图　见九宫数.

百子图　见九宫数.

聚八图 图 3－17 是南宋数学家杨辉从纵横图(见"纵横图")中衍化出来的一种数图，发表在他的《续古摘奇算法》中.明代程大位的《算法统宗》中也录有此图.



聚八图

图 3－17

该图由数 1～24 共 24 个数字组成.在每个正八边形顶点处的八个数之和都等于 100.不仅如此，若画出同心圆(如图中虚线)，则最外层两个圆各有 8 个数，其和各为 100：

$$9+14+22+3+11+16+24+1=100,$$

$$4+23+15+10+2+21+13+12=100;$$

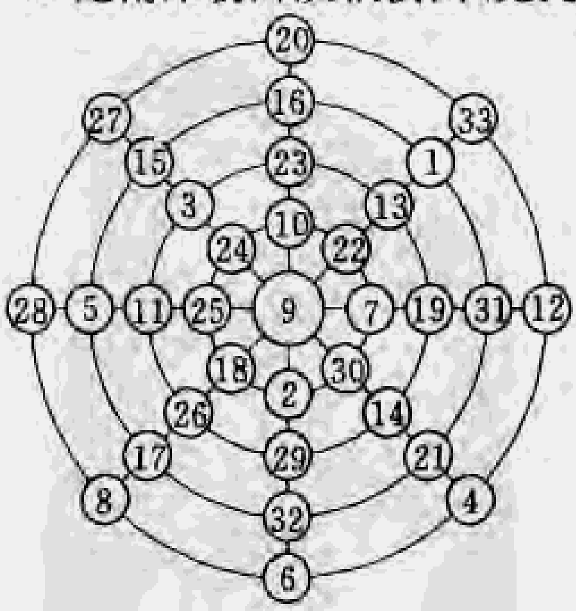
而最里层的两个圆共有 8 个数，它们的和也是 100：

$$18+5+20+7+19+8+17+6=100.$$

参考文献 [34，p.973].

(眭秋生)

攒九图 图 3－18 是南宋杨辉从纵横图(见九宫数)中衍化出来



攒九图

图 3－18

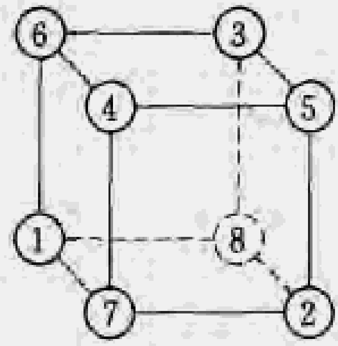
的一种数图．发表在他的《续古摘奇算法》中．明代程大位的《算法统宗》中也录有此图．

该图由数 1～33 共 33 个数字组成，它们分别排列在 4 个同心圆上，且排成 4 条直径，以数 9 为圆的中心．每个圆上有 8 个数，再加上圆心共 9 个数，每 9 个数之和都是 147．每条直径上也有 9 个数，其和也是 147．

参考文献　[34，p. 973]．

（睦秋生）

六合立方图　如图 3－19．清代数学家保其寿对纵横图有着特别的兴趣，他在研究中还创造了不少立体的数图，它们是将数字排列在顶点、棱或面上的立体图形，数字间形成一定关系，复杂而有趣，发表在他著的《碧奈山房集》中．六合立方图是其中最简单的一种．图中 8 个顶点上是 1～8 共 8 个数字，在 6 个面上，每个面上的 4 个数字之和都是 18．



六合立方图

图 3－19

参考文献　[86，p. 157]，[15，p. 133]．

（睦秋生）

田忌赛马　忌数与齐诸公子驰逐重射．孙子见其马足不甚相远；马有上、中、下辈．于是孙子谓田忌曰："君弟重射，臣能令君胜．"田忌信然之，与王及诸公子逐射千金．及临质，孙子曰："今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君之中驷与彼下驷．"既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金．

这是《史记》里的一则著名故事：齐国大将田忌常常与齐王及诸公子赌赛马取乐．马可分为上、中、下三等．军事家孙膑看到田忌的马与齐王的马相差不大，就对田忌说："你尽管与他们赌赛，我保你赢．"田忌很相信他，就与齐王及诸公子下了千金的大赌注．赛马

即将开始，孙膑对田忌说："你用下等的马与他们的上等马赛，用上等马与他们的中等马赛，用中等马与他们的下等马赛."田忌依计而行，比赛进行了三场，田忌输一场而胜两场，结果赢得齐王的千金赌注.

这是战国时代著名军事家孙膑在游戏中的取胜策略，也是世界上最早的对策论实例.

参考文献 [85，p. 249].

（眭秋生）

装错信封（Putting the letter into wrong envelopes） 某人写了几封信，并且在 n 个信封上写下了对应的地址，把所有的信装错信封的情况共有多少种？

该问题由瑞士数学家 Nicolaus Bernoulli（1687～1759）最先考虑. 后来，欧拉独立地解决了此问题.

装错信封问题实质上就是如下问题：

n 个元素的排列，要求在排列中没有一个元素处于它应当占有的位置，求这种错排的种数.

也就是求 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 错排的数目.

记 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 错排的数目为 S_n，任取其中一数 i，数 i 分别与其他的 $n-1$ 个数之一互换，其余 $n-2$ 个数进行错排，共得 $(n-1)S_{n-2}$ 个错排. 另一部分为数 i 以外的 $n-1$ 个数进行错排，然后 i 与其中每个数互换得 $(n-1)S_{n-1}$ 个错排.

因此，就有递推关系 $S_n=(n-1)(S_{n-1}+S_{n-2})$，$S_1=0$，$S_2=1$，且有 $S_0=1$，那么，

$$
\begin{aligned}
S_n-nS_{n-1}&=-[S_{n-1}-(n-1)S_{n-2}]\\
&=(-1)^2[S_{n-2}-(n-2)S_{n-3}]\\
&=\cdots\\
&=(-1)^{n-1}(S_1-S_0)=(-1)^n,
\end{aligned}
$$

即 $$S_n - nS_{n-1} = (-1)^n.$$

在上式两边同除 $n!$，且令 $n = 2,3,4,\cdots,n$，得

$$\frac{S_2}{2!} - \frac{S_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!},$$

$$\frac{S_3}{3!} - \frac{S_2}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!},$$

……

$$\frac{S_n}{n!} - \frac{S_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

将这 $(n-1)$ 个等式相加，由 $S_1 = 0$，得

$$\frac{S_n}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!},$$

即 $$S_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

所以，装错信封的情况有

$$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \text{种}.$$

此问题还可以利用容斥原理解决.

设 A_i 为数 i 在第 i 位上的全体排列，$i = 1,2,\cdots,n$，因为数字 i 不动，故

$$|A_i| = (n-1)!,\ i = 1,2,\cdots,n.$$

同理得 $$|A_i \cap A_j| = (n-2)!,\ i,j = 1,2,\cdots,n,\ i \neq j.$$

每个元素都不在原来位置上的排列数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$$

$$= n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - \cdots + (-1)^n C_n^n \cdot 1!$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right),$$

即共有 $n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$ 种.

参考文献 [89,pp.111～113,pp.146～147],[98,pp.276～277],[44,pp.21～24].

（葛　军）

36 名军官问题（The problem of thirty-six officers） 能否将来自 6 个团队和各有 6 种军衔的 36 名军官排成 6×6 方阵，使每行每列都有每种军衔和每个团队的一名军官？

欧拉曾试图解决 36 名军官问题而没有成功，后来 Tarry 约在 1900 年通过系统枚举证明了这样的 6 阶方阵是排不出来的.

这种方阵在近代组合数学中称为正交拉丁方.如

$A_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ 都是 3×3 的拉丁方，且因

$$\begin{pmatrix}(1,1)&(2,3)&(3,2)\\(2,2)&(3,1)&(1,3)\\(3,3)&(1,2)&(2,1)\end{pmatrix}$$

中 9 对数偶均不相同，就有 A_1 与 A_2 是一对正交的拉丁方.通过尝试解决 36 名军官问题，欧拉提出猜想：$n>2,n\neq6$ 时，一定存在一对正交的 n 阶拉丁方.此猜想约在 1960 年由 Bose、Shrikhande、Parker 共同解决.也就是证明了：除 2 阶和 6 阶以外，其他 3,4,5,7,…各阶正交拉丁方都是可以作出来的.

研究正交的拉丁方问题，在日常生活、工农业生产和科学实验方面有着广泛的应用.比如三种治发烧的药和三种治感冒的药配合，给三位病人进行疗效试验，要求在三天内每人都服过这几种

药，看哪一种配合疗效最好．这就可以考虑上述提及的 3 阶正交拉丁方．

参考文献 [89，pp. 240～243]，[98，pp. 286～288]．

（葛 军）

柯克曼女生问题(Kirkman's school girls problem) 一位女教师带领 15 名女学生，每天都要外出散步一次．每次散步，她总是把女生们平均分成五组，试问：能否制订出一个分组计划，使在一个星期(7 天)内，每一个女生和其他任何一名女生只有一次同组的机会？

这个问题是英国数学家柯克曼于 1847 年首先提出的，后来在 1850 年正式发表于 *Lady and gentleman dairy*，所以被称为“柯克曼女生问题”．

下面给出柯克曼问题的一个解：

星期一	星期二	星期三	星期四
1,2,3	1,4,5	1,6,7	1,8,9
4,8,12	2,8,10	2,9,11	2,12,14
5,10,15	3,13,14	3,12,15	3,5,6
6,11,13	6,9,15	4,10,14	4,11,15
7,9,14	7,11,12	5,8,13	7,10,13

星期五	星期六	星期日
1,10,11	1,12,13	1,14,15
2,13,15	2,4,6	2,5,7
3,4,7	3,9,10	3,8,11
5,9,12	5,11,14	4,9,13
6,8,14	7,8,15	6,10,12

本题是近代组合数学中的一个著名问题，也是可分解平衡不完全区组设计(Balanced Incomplete Block Design，简称 BIBD)的

一个特例.

一个 BIBD 是把集 X 的 v 个不同元安排到 b 个区组中，使得(1)每一个区组恰含 k 个不同元；(2)每元恰出现在 r 个不同区组中；(3) 每对不同元恰出现 λ 个不同区组，记为(b,v,r,k,λ)设计. 当 $k=3,\lambda=1$ 时的 BIBD，又称为施泰纳三元系，记为 $S(v)$，$D(v)$ 表示互不相交的(即没有共同的区组)$S(v)$的最大个数. 那么，对于 $v\geqslant 3$，$D(v)\leqslant v-2$. 于是，是否存在可能 $D(v)=v-2$ 的所有 $v-2$ 个 $S(v)$. 这称为不相交施泰纳三元系大集问题.

柯克曼女生问题就是一个(35,15,7,3,1)设计，即要求出一个 $S(15)$. 1850 年，柯克曼证明 $D(9)=7$，英国数学家 J. J. Sylvester 和凯莱提出这一散步日程表能否安排 13 周，即是否有 $D(15)=13$. 直到 1974 年才有人用电子计算机给予确定.

对于稍大的一些 v 是否满足 $D(v)=v-2$，数学家们采用直接法、提高下界法和递归法来解决大集问题：

$$v\equiv 1,3(\bmod 6),v\neq 7\Leftrightarrow D(v)=v-2.$$

采用直接法和提高下界的方法均未取得重大突破，且距目标较远，可谓“路漫漫”. 由柯克曼女生问题引发的对一般情形的讨论，成为百余年来始终没有得到圆满结果的一个著名难题. 直到 20 世纪 80 年代，才被我国数学家陆家羲(1935～1983)解决.

陆家羲用递归法证明了如下的大集定理：

如果 $v\equiv 1,3(\bmod 6)$，$v>7$，和 $v\notin\{141,283,501,789,1\,501,2\,305\}$，那么 $D(v)=v-2$. 人们还编成大集定理的算法程序，在计算机上验证了大集定理的结论是完全正确的.

陆家羲的这一成果已载人组合数学史册.

参考文献 [87,pp. 164～171],[98,pp. 285～286],[97,pp. 575～581],[44,pp. 16～20],[96],[102].

(谈祥柏 葛 军)

集会问题(Ramsey problem) 在至少有六个人参加的任意一个集会上,与会者中必有三个人以前互相认识,或者彼此都不相识.

这是一个广为流传的趣味数学问题.

考虑用平面上六个点 A,B,C,D,E,F 表示与会的六人,二人若早已相识,则在代表他们的两点间连一红边;否则连一蓝边.这样,就得到一个完全图 K_6.要证明的结论就是:

如果 K_6 的每条边涂上两种颜色中的一种,那么必有一个同色三角形(即三条边颜色相同的三角形).

从顶点 v_1 引出的边有 5 条,其中至少有 3 条是同一种颜色,不妨设 v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,都是红色.如果$\triangle v_2v_3v_4$ 有一条边,不妨设为 v_2v_3,是红色,那么$\triangle v_1v_2v_3$ 就是同色三角形(三边同为红色).如果$\triangle v_2v_3v_4$ 的边都不是红色,那么$\triangle v_2v_3v_4$ 就是三边同为蓝色的三角形.

这个集会问题是 Ramsey 定理的一种简单情况,所以也称为 Ramsey 问题.F. P. Ramsey(1903～1930)是英国数理逻辑学家.他把"抽屉原理"推广,得出广义抽屉原理,也称 Ramsey 定理.

集会问题的一般情形是:对给定的整数 $p,q\geqslant 2$,当 n 多大时才能保证把 K_n 的每一边任意地染成红色或蓝色后,在 K_n 中或者含有全是红边的 K_p,或者含有全是蓝边的 K_q.

显然,如果 K_{n_0} 具有这一性质,那么对任一 $n>n_0$,K_n 也一定具有.由于这样的 n_0 完全由 p,q 所确定,记为 $R(p,q)$,称为 Ramsey 数,则简单情形的 Ramsey 定理可以断定 $R(p,q)$是存在的.

简单情形的 Ramsey 定理:

对任意给定的整数 $p,q\geqslant 2$,数 $R(p,q)$存在.当 $p,q\geqslant 3$ 时,则有

$$R(p,q)\leqslant R(p-1,q)+R(p,q-1).$$

一般地,有广义的 Ramsey 定理:

给定正整数 p,q,t,且 $p\geqslant t,q\geqslant t$,则必存在正整数 n,在任一

n 元集合 S 中，所有 t 元子集构成子集族 T，把 T 任意划分成两个不相交的类 A 和 B，下列情形至少有一种成立：

(1) 存在 p 个元素，它的所有 t 元子集属于 A 类；

(2) 存在 q 个元素，它的所有 t 元子集属于 B 类.

使上述结论成立的最小正整数 n，依赖于 p,q,t，记为 $r(p,q,t)$，称为广义 Ramsey 数. 显然，$r(p,q,2)=R(p,q)$.

参考文献 [88，pp. 36～37]，[90，pp. 225～235]，[98，pp. 259～260].

（葛 军）

Ramsey 问题 见集会问题.

四色猜测(Four-color conjecture) 平面上的任何一张地图能够只用四种颜色来给每个国家染色，使得任何两个相邻(它们有一段公共的边界，而不仅仅只有公共点)的国家都有不同的颜色.

在图论中，四色猜测是与平面图染色紧密相连的. 四色猜测可简而言之：每一个平面图是 4-可着色的.

四色猜测的最初形式，是由英国人 Francis Guthrie 在 1852 年提出的，他的导师 de Morgan 在他的同事中传播了这个问题. 但是，此问题在 1878 年得以闻名，应归功于英国代数学家凯莱，因为他在伦敦数学会的会刊上写了一篇署名文章.

一百多年来，人们把四色猜测列为著名的图论难题之一. 1879 年，Kempe 给出了证明，但后来人们指出其错误，继之，Heawood、Tait、Petersen、Birkhoff 和 Hadwiger 等众多数学家作出了很大努力. 关于此猜测的最重大的进展是 Heesch 作出的，他发展了一种排除法以寻求可约构形的不可避免集. 四色猜测最后被 K. Apple、W. Haken 和 J. Koch 在 1976 年解决，他们使用改进的 Heesch 方法(需寻求 1 900 个构形)，在高速电子计算机上用了 1 200 多个小时证明了四色猜测是正确的.

虽然四色猜测已获解决，但是，这个证明是否可以简化，是否

可以不用计算机而得到证明，等等，正吸引着许多数学家进一步地研究.

参考文献 [91,pp. 145～148],[92,pp. 216～221],[95,pp. 141～145],[99,pp. 23～25,pp. 145～148],[47,pp. 316～318].

（谈祥柏 葛 军）

四色定理(Four-color theorem) 见四色猜测.

中国邮路(或邮递员)问题(Chinese postman problem) 一个邮递员每次投递邮件必须走遍某一范围的所有街道，任务完成后回到邮局，问这个邮递员应按怎样的路线投递邮件，才能使得所走的路程最短？

该问题用图论语言可以描述为：在一个赋权图 $G=[v,E,l]$（v 表示顶点，E 表示边，l 表示边的长度）中，找一条回路，使它包含 G 中每条边至少一次，且具有最小的长度.

这个问题在国际上称为中国邮路问题，是由我国数学家管梅谷于1960年提出并解决的.

理论上，利用图论知识已解决了这个问题，并得到了求取中国邮路问题最优解的方法，即“奇偶点图上作业法”.

下面举例说明中国邮路问题的求解方法.

求图3－20所示的赋权图的最优回路．图3－21即是一可行解．这里是把 A_1 与 B_1，A_2 与 B_2，A_3 与 B_3，A_4 与 B_4 配对，求其间最短路的．显然它不是最优解，需调整求最优解.

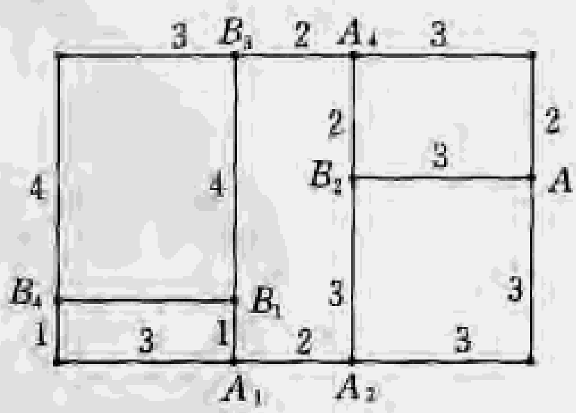


图3－20

第一次调整：去掉多于1条的重复边，如图3－22，且把 A_1 与 B_1，A_2 与 B_2，A_3 与 A_4，B_3 与 B_4 配对，求其间最短路.

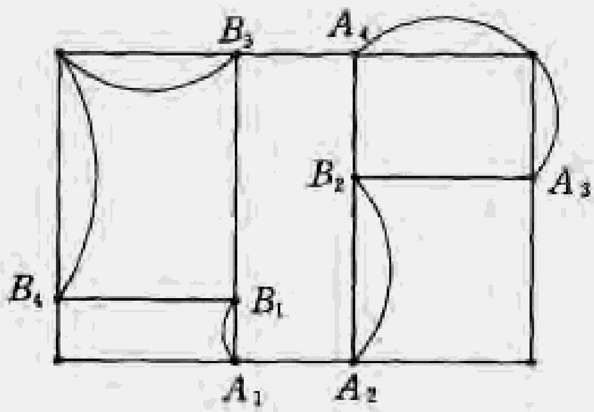


图 3-21

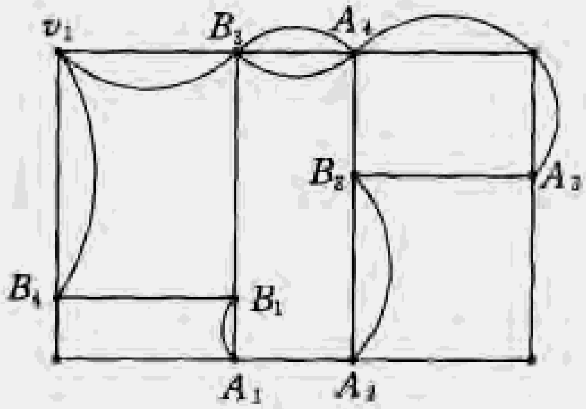


图 3-22

第二次调整：改长大于半个回路的重复边为小于半个回路的长.可知回路$C_1=[A_1,A_2,B_2,A_4,B_3,v_1,B_4,B_1,A_1]$上重复边之长15大于这个回路的总长20的一半，故对其调整，如图3-23.这里是把A_1与A_2，B_1与B_4，B_2与B_3，A_3与A_4配对，求其间最短路的.

第三次调整：改长大于半个回路的重复边为小于半个回路的长.可知$C_2=[A_3,v_2,A_4,B_2,A_3]$上重复边之长7大于这个回路总长10的一半.故调整如图3-24，且知无长大于半个回路的重复边之长了.这就是我们所求的最优解.这里是把A_1与A_2，B_1与B_4，A_3与B_2，A_4与B_3配对，求得最短回路的.

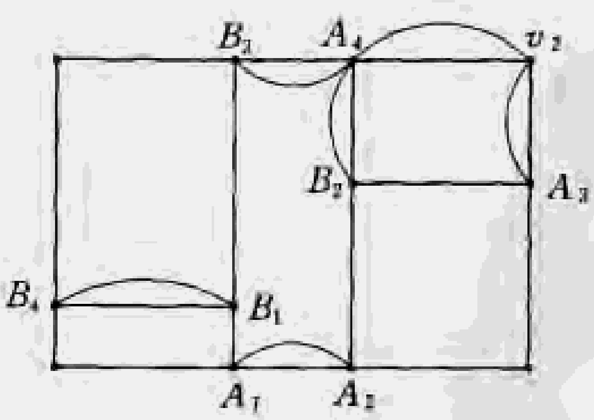


图 3-23

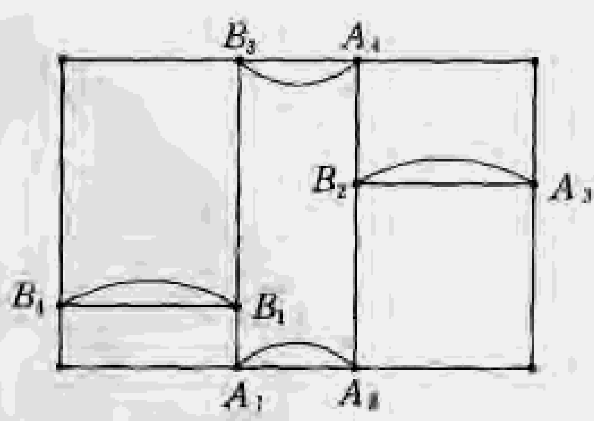


图 3-24

参考文献 [91,pp.93～96]，[93,pp.128～130]，[95,pp.100～102]，[94,pp.59～60].

（葛 军）

哈密顿周游世界问题(Hamilton tour) 考虑用正十二面体的顶点代表 20 个城市,要求旅行者从某一城市出发,遍经各城市一次且仅一次,最后返回出发地.

该问题是爱尔兰数学家哈密顿爵士在 1859 年首先提出的.

把正十二面体看做是橡皮膜做的,就可以把这个正十二面体压成平面图形,如图 3-26.考察图 3-26 中的 20 角形,它是图中许多正五边形合成的.这个 20 角形中,20 个顶点均为奇点,并且经过奇点的线有三条,因此,为了能得到含 20 个顶点的一笔画图形(实际上是一个圈,这是因为最后仍要回到出发点),20 个奇点必须变为偶点,并且保证经过每点只有两条线.

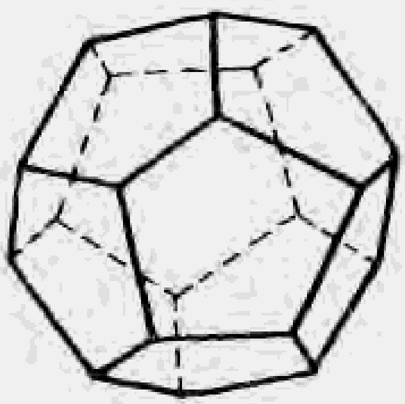


图 3-25

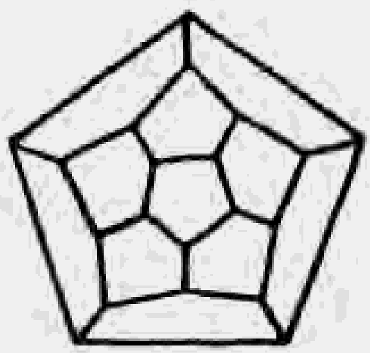


图 3-26

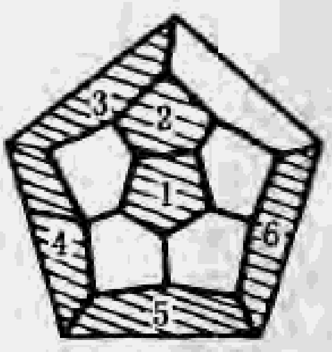


图 3-27

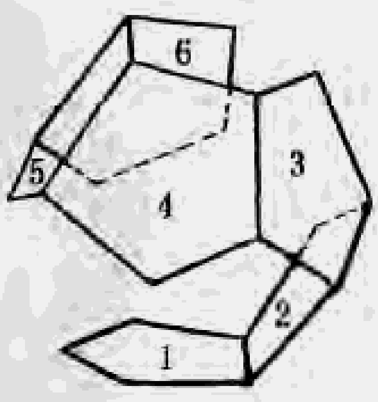


图 3-28

在图 3-26 中去掉连接每两个奇点的一条线,就可以得到一

个如图 3－27 所示的阴影部分的图形，这正是要找的图形，这里连接阴影块之间的线及非阴影部分的线都是被去掉的线.阴影部分的图形是由 6 个相互连接的五边形组成的，这 6 个五边形在原十二面体中的位置如图 3－28，把这六个相互连接的正五边形摊平为图 3－29，此图的周界（粗线连接的）就是一个含 20 个顶点的一笔画图形（圈）.所以哈密顿的想法是可以实现的.

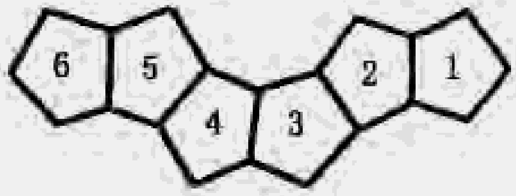


图 3－29

当然，符合题目要求的图形不止上面一个.即使是固定前 5 个城市（顶点），符合要求的图形还有 4 个.如果不要求回到原来的出发点，符合要求的图形就更多了.

经过图中所有顶点恰好一次的路线称为哈密顿链.如果起点与终点重合（即回到出发点），这路线便称为哈密顿圈.

究竟什么样的图形才存在哈密顿圈，这是个很有趣而深奥的问题.可是，迄今为止，还没有一个通用的识别方法.

参考文献 [92，p.49]，[95，pp.91～93]，[99，pp.17～19]，[100，pp.79～103]，[101，pp.25～29].

（谈祥柏 葛 军）

旅行售货员问题（The traveling-salesman problem） 一个售货员要到若干有直通道路的城镇推销商品，然后回到出发地，他应如何计划旅行路线，才能使得对每个城镇都访问一次且仅一次，并且使得总的行程最短.

这个问题又称货郎担问题，用图论语言可以叙述为：在一个赋权完全图中，找出一条最小权哈密顿回路.

这个问题直到现在还没有一个完全令人满意的解法.这里给出用逐次改进法求解的算法.

算法：在赋权完全图 G 上，找一条哈密顿回路 C，则

(1) 令 $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$，对于所有满足 $1 < i+1 < j < n$ 的 i 和 j，得到一条新的哈密顿回路：

$$C^{(1)} = C_{ij} = v_1 v_2 \cdots v_i v_j v_{j-1} \cdots v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} \cdots v_n v_1,$$

当对某一对 i 和 j，有

$$w(v_i v_j) + w(v_{i+1} v_{j+1}) < w(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1}).$$

那么 $C^{(1)}$ 叫做 C 的改进回路.

(2) 用 $C^{(1)}$ 代替 C 转(1)，直到终止.

理论上可以证明：有限个顶点的赋权完全图中，最小权的哈密顿回路是存在的，且若所给定 n 个顶点能够顺次连成一个凸多边形，则这个凸多边形就是最小权的哈密顿回路是唯一的.

下面给出 $n=4$ 时旅行售货员问题的几何求法.

不妨设四点中任何三点都不共线，而且有一点位于另外三点所组成的三角形内部.

作出△ABC，然后以 B、C 为焦点，过 A 作双曲线的一支；以 A、B 为焦点，过 C 作双曲线的一支；以 A、C 为焦点，过 B 作双曲线的一支. 可以证明，这三支双曲线必相交于一点，称之为界点，记为 E. 双曲线段 EA，EB，EC 称为界线(如图 3－30).

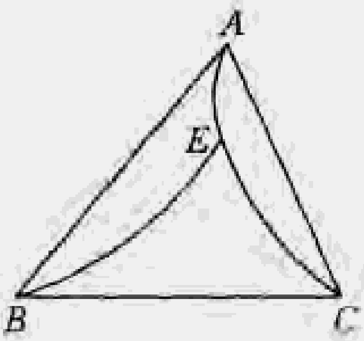


图 3－30

可以证明，若第四点 D 落在封闭曲线 EBC 内，则回路 $ABDC$(图 3－31(1))就是最佳回路. 与此类似，若 D 落在 EAC 或 EAB 内部，则相应的回路(图 3－31(2)或(3))就是最佳回路.

如果第四点 D 是界线上的任一点，那么通过 A、B、C、D 四点有两条等长的最佳回路；如果第四点 D 与界点 E 重合，那么通过 A、B、C、E 的任何回路都是最佳回路.

参考文献 [93, pp. 131～134]，[94, pp. 69～72]，[95, pp.

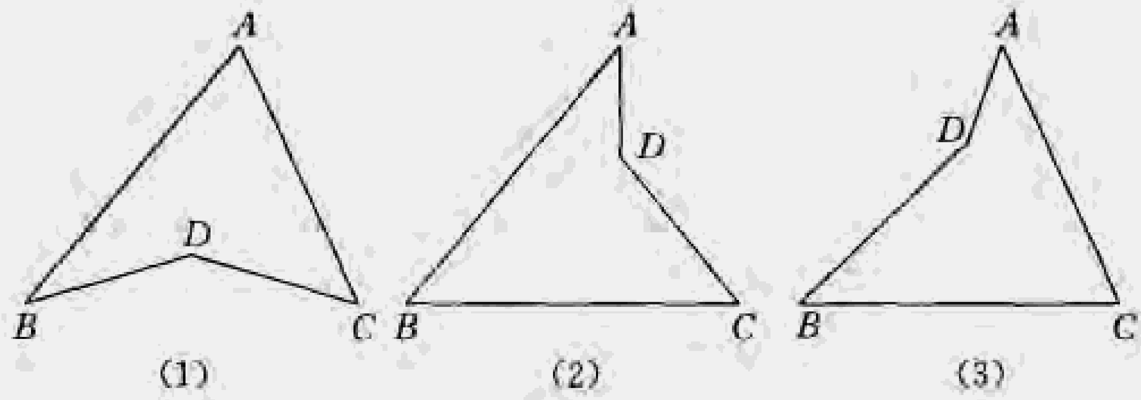


图 3-31

102～106],[98,pp.341～343],[99,pp.17～18].

（谈祥柏　葛　军）

货郎担问题　见旅行售货员问题.

参考文献

1 钱宝琮主编.中国数学史.北京：科学出版社,1964

2 梅荣照主编.明清数学史论文集.南京：江苏教育出版社,1990

3 梁宗巨.世界数学史简编.沈阳：辽宁人民出版社,1980

4 吴文俊主编.世界著名科学家传记.数学家(Ⅳ).北京：科学出版社,1992

5 吴文俊主编.世界著名科学家传记.数学家(Ⅴ).北京：科学出版社,1994

6 吴文俊主编.世界著名科学家传记.数学家(Ⅵ).北京：科学出版社,1994

7 中国大百科全书出版社编辑部编.中国大百科全书(数学).北京：中国大百科全书出版社,1988

8 张禾瑞,郝鈵新.高等代数(下册).北京：高等教育出版社,1958

9 徐利治等著.函数逼近的理论和方法.上海：上海科技出版社,1983

10 余元希等编著.初等代数研究(下册).北京：高等教育出版社,1988

11 江苏省高师数学教育研究组编.初等代数研究.南京：江苏教育出版社,1988

12 冯克勤,余红兵. 初等数论. 北京: 中国科学技术大学出版社,1989
13 梁之舜,吴伟贤著. 数学古今纵横谈. 广州: 科学普及出版社广州分社,1982
14 高希尧编. 数海钩沉——世界数学名题选辑. 西安: 陕西科学技术出版社,1982
15 [英] 李约瑟著. 中国科学技术史(第三卷(数学)). 北京: 科学出版社,1978
16 [美] M. 克莱因著. 古今数学思想(第一册). 上海: 上海科学技术出版社,1979
17 [美] M. 克莱因著. 古今数学思想(第二册). 上海: 上海科学技术出版社,1979
18 [美] H. 伊夫斯著. 数学史概论. 太原: 山西人民出版社,1986
19 [日] 笹部贞市郎编. 代数学辞典问题解法(下册). 上海: 上海教育出版社,1982
20 [日] 笹部贞市郎编. 三角学辞典问题解法. 上海: 上海教育出版社,1983
21 [苏] C. И. 诺渥塞洛夫著. 初等代数专门教程(上册). 北京: 高等教育出版社,1956
22 [苏] C. И. 诺渥塞洛夫著. 初等代数专门教程(下册). 北京: 高等教育出版社,1957
23 [苏] C. И. 诺渥塞洛夫著. 三角学专门教程(上册). 北京: 高等教育出版社,1956
24 [苏] C. И. 诺渥塞洛夫著. 三角学专门教程(下册). 北京: 高等教育出版社,1956
25 [德] 汉斯·拉德梅彻,奥托·托普利茨著. 数学欣赏. 北京: 北京出版社,1981
26 [波] Г. 施琴高兹著. 数学 100 题. 北京: 科学普及出版社,1982
27 [苏] B. Д. 契斯佳可夫著. 初等数学古代名题集. 北京: 科学普及出版社,1984
28 [美] R·亨斯贝尔格著数学中的智巧. 北京: 北京大学出版社,1985
29 [苏]别莱利曼著. 趣味代数学. 北京: 中国青年出版社,1980
30 Ross Honsberger. *Mathematical Morsels*. *The Dolciani Mathematical*

Expositions No. 3. Published and Distributed by the Mathematical Association of America, 1978

31 钱宝琮校点. 算经十书. 北京：中华书局, 1963

32 秦九韶著. 数书九章. 北京：商务印书馆, 1937

33 李冶著, 白尚恕译. 测圆海镜今译. 济南：山东教育出版社, 1985

34 程大位著, 梅荣照、李兆华校释. 算法统宗校释. 合肥：安徽教育出版社, 1990

35 李迪. 中国数学通史(上古到五代卷). 南京：江苏教育出版社, 1997

36 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社, 1986

37 中外数学简史编写组. 外国数学简史. 济南：山东教育出版社, 1987

38 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲(修订版). 北京：高等教育出版社, 1983

39 李毓佩. 数学大世界——代数的威力. 南京：江苏少年儿童出版社, 1991

40 戴春陶等. 中学生数学辞典. 呼和浩特：内蒙古人民出版社, 1982

41 [美]H. Eves. 数学史上的里程碑. 北京：北京科学技术出版社, 1990

42 [英]G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚著. 不等式. 北京：科学出版社, 1965

43 [南]D. S. Mitrinovic', P. M. Vasic'. 分析不等式. 南宁：广西人民出版社, 1986

44 [德]H. 德里著. 100个著名初等数学问题——历史和解. 上海：上海科学技术出版社, 1982

45 E. F. Beckenbach and R. Bellman. *Inequalities*. Berlin; Springer - Verlag. 1961, 1983

46 D. S. Mitrinovic' and P. M. Vasic', Sredine. *Mathematicka Biblioteka*, Vol. 40, Beograd, 1969

47 [美]R. 柯朗, H. 罗宾著. 数学是什么? 北京：科学出版社, 1985

48 沈括著. 梦溪笔谈选注. 上海：上海古籍出版社, 1978

49 沈康身著. 中算导论. 上海：上海教育出版社, 1986

50 李逢平著. 中国古算题选解. 北京：科学普及出版社, 1985

51 吴文俊主编. 世界著名科学家传记. 数学家(Ⅱ). 北京：科学出版社, 1992

52 解恩泽,徐本顺主编.世界数学家思想方法.济南:山东教育出版社,1994
53 谷超豪主编.数学词典.上海:上海辞书出版社,1992
54 陈景润著.初等数论(Ⅱ).北京:科学出版社,1988
55 丁石孙主编.邮票·自行车·果园·雨中行.北京:北京大学出版社,1991
56 单墫著.趣味数论.北京:中国青年出版社,1987
57 上海教育出版社编.初等数学论丛(第七辑).上海:上海教育出版社,1983
58 张润青等.数学万花筒.上海:少年儿童出版社,1979
59 陈永明编.递推式.上海:上海科学技术出版社,1989
60 霍光利,聂丽编译.外国趣味数学题荟萃.北京:北京科学技术出版社,1990
61 [美]H.伊乌斯著.数学史菁华(上册).成都:四川教育出版社,1988
62 王梓坤著.概率论基础及其应用.北京:科学出版社,1976
63 杨宗磐著.概率论入门.北京:科学出版社,1981
64 陈希孺著.数理统计引论.北京:科学出版社,1981
65 严士健,王隽骧,刘秀芳著.概率论基础.北京:科学出版社,1982
66 华东师范大学数学系编.概率论与数理统计教程.北京:高等教育出版社,1983
67 复旦大学编.概率论(第一册概率论基础).北京:人民教育出版社,1979
68 张有余,任南衡.中国数学会史料.南京:江苏教育出版社,1995
69 陈善林,张浙.统计发展史.立信会计图书用品书,1987
70 [苏]格涅坚科著.概率论教程.北京:高等教育出版社,1955
71 [瑞典]H.克拉美著.统计学数学方法.上海:上海科学技术出版社,1966
72 [美]钟开莱著.初等概率论附随机过程.北京:人民教育出版社,1979
73 [美]W.费勒著.概率论及其应用(上册).北京:科学出版社,1980
74 [美]W.费勒著.概率论及其应用(下册).北京:科学出版社,1979
75 [美]谢尔登·罗斯著.概率论初级教程.北京:人民教育出版社,1981
76 [美]W.费勒著.概率论及其应用(第二卷).北京:科学出版社,1994
77 罗见今.明安图是卡塔兰数的首创者.内蒙古大学学报,1988,No.2

78 罗见今.明安图创卡塔兰数的方法分析.内蒙古大学学报,1989,No.1
79 科学(*Scientific American*),中文版,1976.6
80 科学(*Scientific American*),中文版,1979.9
81 Tohnson and Kotz. *Urn Models and Their Application*. Canada,1977
82 Yuan Shih Chow. *Probability Theory*. New York,1978
83 Olkin and Gleser and Derman. *Probability Models and Application*. New York,1980
84 Gridgeman. *Geometer probability and the number π*. *Seripta Math*. 25 (1960)
85 上海古籍出版社,上海书店编.二十五史·史记·汉书.上海:上海古籍出版社,1994
86 许纯舫.趣味的数和图.北京:商务印书馆
87 陈景润.组合数学简介.天津:天津科学技术出版社,1988
88 单墫.组合数学问题与方法.北京:人民教育出版社,1989
89 卢开澄.组合数学.北京:清华大学出版社,1991
90 李乔.组合数学基础.北京:高等教育出版社,1993
91 胡美琛,邱伟德.组合与图.北京:人民邮电出版社,1986
92 王朝瑞.图论.北京:北京工业学院出版社,1987
93 赵宏量,彭太华.图论基础教程.重庆:西南师范大学出版社,1988
94 王树禾.图论及其算法.合肥:中国科学技术大学出版社,1990
95 魏暹荪.图论基础.西安:陕西师范大学出版社,1991
96 罗见今.陆家羲传.内蒙古数学会年会论文集,1990
97 上海教育出版社编.初等数学研究论文选.上海:上海教育出版社,1992
98 谈祥柏.趣味数学辞典.上海:上海辞书出版社,1994
99 [英]B.布鲁巴斯著.图论导引教程.哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,1985
100 [匈]B. Aidrásfai.图论导引.北京:高等教育出版社,1985
101 高木茂男.三次元数パズル.讲谈社,昭和五十四年(1979)版
102 W.W.Rousefall. *Mathematical Recreations and Essays*. Toronto University Press,1974
103 李迪著.中国数学通史(宋元卷).南京:江苏教育出版社,1999

几　何

一　平面几何

（一）三角形

勾股定理　直角三角形的两直角边平方和等于斜边的平方.

据史料记载，勾股定理早为古巴比伦人所知，而"勾三股四弦五"这个事实，则由我国古代商高在公元前12世纪首先提出.对于一般情形，我国古代陈子（约公元前6、7世纪）已明确作了陈述，他在谈到由勾股求弦时指出"勾股各自乘，并而开方除之".勾股定理的证明，在E.S.Loomis的《毕达哥拉斯命题》第二版（1940）中，搜集了这个定理的各种证明达370种之多，而实际上还会超过这个数目，但一般认为最早的证明应归功于公元前6世纪古希腊的毕达哥拉斯学派，故又称毕达哥拉斯定理，但这一证明已经失传，现在大多采用的面积证法，是欧几里得首先给出的.

如图4-1，以Rt$\triangle ABC$的三边向外作正方形$ABEF$、$BCGH$、$CADK$，过C作AB的垂线交AB、EF于M、N，连结BD、CF，则由$AC=AD$，$AF=AB$，$\angle DAB=\angle CAF=90^\circ+\angle BAC$，得$\triangle DAB\cong\triangle CAF$，而

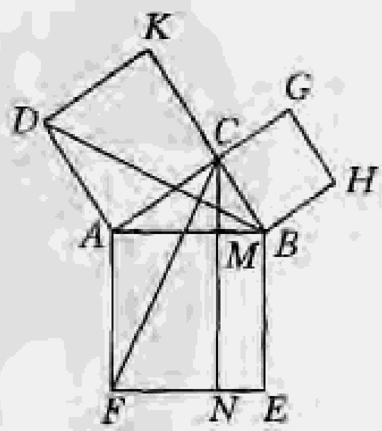


图4-1

$$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}AD\cdot AC=\frac{1}{2}AC^2$$

$$= \frac{1}{2}S_{\text{正方形}CADK},$$

$$S_{\triangle CAF} = \frac{1}{2}AF \cdot AM = \frac{1}{2}S_{\text{矩形}AMNF},$$

故 $S_{\text{矩形}AMNF} = AC^2$.

同理可证 $S_{\text{矩形}BMNE} = BC^2$.

而 $S_{\text{矩形}AMNF} + S_{\text{矩形}BMNE} = S_{\text{正方形}ABEF} = AB^2$,

所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

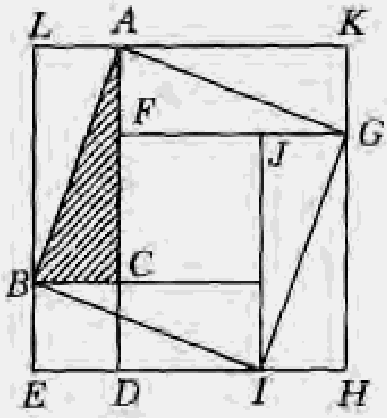


图 4-2

在我国《周髀算经》和《九章算术》中都明确给出了勾股定理的一般形式,并且赵爽和刘徽依据出入相补原理(割补原理)分别对其给出了证明. 如图 4-2, $\triangle ABC$ 是直角三角形,四边形 $BCDE$ 和 $DFGH$ 分别是正方形,其中 $FD = AC$, 所以 $\triangle ABC \cong \triangle IBE \cong \triangle GIH \cong \triangle GAF$. 于是把 $\triangle IBE$ 移到 $\triangle ABC$, $\triangle GIH$ 移到 $\triangle GAF$,就得到以斜边 AB 为一边的正方形 $ABIG$,所以,正方形 $BCDE$ 与 $DFGH$ 的面积之和就等于正方形 $ABIG$ 的面积,即 $AB^2 = AC^2 + BC^2$. 如果利用面积公式和简单的代数知识,立即可知

$$AB^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BC + (AC - BC)^2,$$

即 $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

勾股定理也可以利用相似三角形的知识来证明. 如图 4-3,作 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高 CH,得

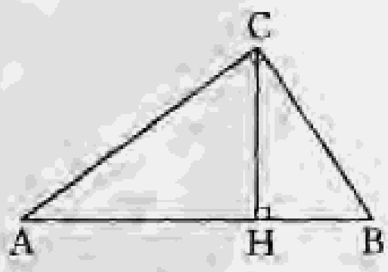


图 4-3

$\triangle ACH \backsim \triangle ABC$,

$\triangle BCH \backsim \triangle BAC$,

于是 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AH}{AC}, \dfrac{BC}{BA} = \dfrac{BH}{BC}$,

即 $AC^2=AB\cdot AH, BC^2=AB\cdot BH$,

所以 $AC^2+BC^2=AB(AH+HB)=AB^2$.

这个证明是印度数学家、天文学家 Bhāskara 给出的，后又被英国数学家 John Wallis (1616～1703)重新发现.

勾股定理的证明引起古今中外许多人的兴趣，而给出的证法也各式各样丰富多彩，这里不仅有大量出自数学家之手，而且还有出自天文学家、物理学家甚至还有画家、政治家之手. 如美国第二十任总统伽菲尔德(James Abram Garfield, 1831～1881)，在 1876 年当他任众议员时，给出了勾股定理的一个证明(这个证明后发表在《新英格兰教育杂志》上). 现简介如下：

如图 4-4，有

$$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot(a+b),$$

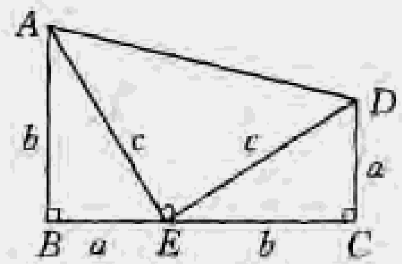


图 4-4

又 $S_{梯形ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle AED}+S_{\triangle ECD}$

$$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab.$$

所以 $\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\frac{1}{2}(2ab+c^2)$,

即 $a^2+b^2=c^2$.

参考文献 [5, pp. 61～62], [9, pp. 98～100].

(涂荣豹)

毕达哥拉斯定理(Pythagoras theorem) 见勾股定理.

折竹问题 今有竹，高一丈，末折抵地，去本三尺. 问折者高几何?

本题是《九章算术》卷九"勾股"的第 13 题.

题意是：高 1 丈的竹子被拦腰折断. 竹尖正巧触地，且离竹根 3 尺远，构成一个勾股形. 求折断处的高.

设这个勾股形三边长分别为 a、b、c，则 $b+c=1$ 丈，$a=3$ 尺.

由于 $c^2-b^2=a^2$，即 $(c+b)(c-b)=a^2$，故

$$c - b = \frac{a^2}{c + b} = \frac{9}{10},$$

于是 $$b = \frac{1}{2}[(c + b) - (c - b)] = 4\frac{11}{20}(尺).$$

在700年后的印度数学家Brahagupta(公元625年前后)的著作中也有折竹问题,在更晚的英国、意大利等数学书中也有类似折竹问题的题目.

参考文献 [1,p.248].

(睦秋生)

葭生池中 今有池方一丈,葭生其中央,出水一尺.引葭赴岸,适与岸齐.问水深、葭长各几何?

本题是《九章算术》卷九"勾股"的第6题.

在边长为1丈的正方形池塘中央,长着一根葭(芦苇),它露出水面1尺.若把它拉向岸边,则正巧碰到岸.求水深和葭长.

如图4-5,已知 $BC = 1$ 尺, $BD = 5$ 尺, $AD = AC$. 在勾股形 ABD 中,有

$$AD^2 = AB^2 + BD^2,$$

即 $$(AB + 1)^2 = AB^2 + 25,$$

得 $$AB = 12(尺),$$

于是 $$AC = AB + 1 = 13(尺).$$

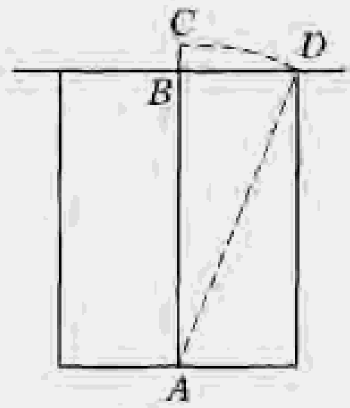


图4-5

答案是池水深1丈2尺,葭长1丈3尺.

这个问题流传很广,在印度及阿拉伯算书中都有类似问题(见**印度莲花**).

参考文献 [6,p.87].

(睦秋生)

望海岛 今有望海岛,立两表齐高三丈,前后相去千步,令后表与前表参相直.从前表却(后退)行一百二十三步,人目著地取望岛峰,与表末参合.从后表却行一百二十七步,人目著地取望岛峰,亦

与表末参合.问岛高及去表各几何?

本题是《海岛算经》的第1题.

刘徽在注释《九章算术》时,对古代已失传的“重差术”重新研究造术.他用9个典型例题附在《九章算术》之后,说明如何运用表或矩来测算可望而不可及的目标的高低、大小、距离等:“度高者重表,测深者累矩,孤离者三望,离而又旁求者四望.触类而长之,则虽幽遐诡伏,靡所不入.”方法非常巧妙实用,令人赞叹不已!后人把这9道题单独成书,名为《海岛算经》.

本题可如图4-7添作辅助线,找出相关的相似三角形,用对应线段成比例的性质解得.

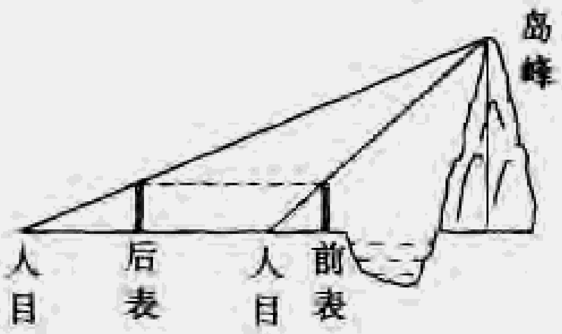


图4-6

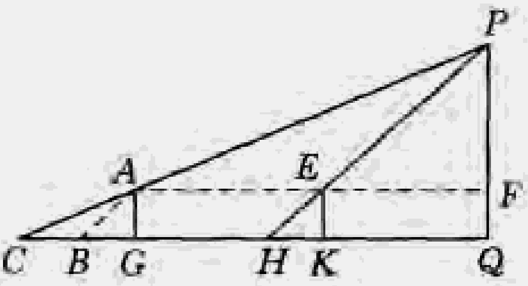


图4-7

因为AG、EK和PQ在同一个平面上,所以$AG \underline{\parallel} EK$.作$AB /\!/ EH$,则$\triangle AEP \backsim \triangle CBA$,得$\dfrac{AE}{CB}=\dfrac{AP}{CA}=\dfrac{PF}{AG}$.故

$$PF=\frac{AE}{CB}\cdot AG,$$

于是 $PQ=\dfrac{AE}{CB}\cdot AG+FQ=\dfrac{AG\cdot GK}{CG-HK}+EK,$

即 $\text{岛高}=\dfrac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}+\text{表高}.$

又 $\dfrac{EF}{HK}=\dfrac{PF}{EK}$,所以$EF=\dfrac{PF}{EK}\cdot HK=\dfrac{AE}{CB}\cdot HK,$

即 $\text{前表去岛}=\dfrac{\text{前表却行}\times\text{表间}}{\text{后表却行}-\text{前表却行}}.$

上述两式中的"表间"是指前、后两表之间的距离，可看做两表与岛的距离之差，而式中分母又是两表却行之差，式中要用到两个差数，故这种测算方法被称为"重差术".

以题设数据代入，得答案：岛高 4 里 55 步，前表与岛的距离是 102 里 150 步.

参考文献 [1,p.92,p.265].

（眭秋生）

望清渊 今有望清渊，渊下有白石.偃矩岸上（如图 4-6），令勾高（AB）三尺，斜望水岸，入下股（BD）四尺五寸.望白石，入下股（BC）二尺四寸.又设重矩于上，其间相去（AE）四尺.更从勾端斜望水岸，入上股（FH）四尺.以望白石，入上股（FG）二尺二寸.问水深几何？

本题是《海岛算经》第 7 题.如图 4-6，设想在陡峭的渊岸上某处用矩 ABD（矩是我国古代的主要测算工具，是两根尺子在一端互相垂直）观测两个目标水岸 M 和白石 N.记录观测时在股上的数据 BD 和 BC，然后又从垂直的上方相距 AE（已知）处用矩 EFH 再次观测 M 和 N，记下股上的数据 FH 和 FG.连同已知矩的勾长 $AB=EF$，以及矩 ABC 与水面的距离 BK，就能用位似勾股形的对应勾股成比例的性质算出水深 KL 了（参见**望海岛**）.

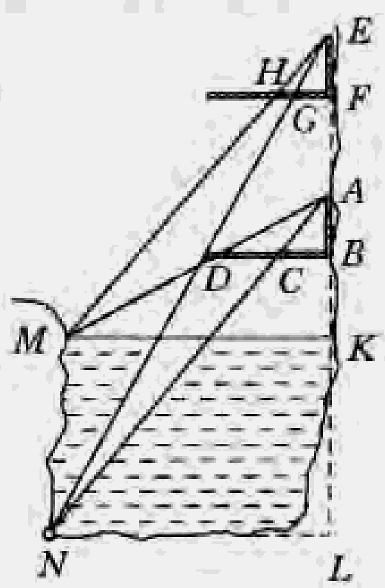


图 4-8

答案是水深 1 丈 2 尺.

参考文献 [1,p.269].

（眭秋生）

三斜求积 问沙田一段，有三斜.其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里.里法三百步.欲知为田几何？

本题是秦九韶的《数书九章》田域类中的一道题.意思是：已知斜三角形地块的三边，求其面积.秦九韶以本题为例给出一般公

式："以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余，半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之为实，开平方，得积."用现代数学符号设大、中、小斜分别为 a、b、c，上述公式就是

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

这就是"三斜求积公式"，又叫"秦九韶公式". 它是利用勾股定理推导出来的.

如图 4－9 所示，设大斜 a 上的高为 h，且该高将 a 分成 n 和 m 两部分，则

$$h^2=c^2-n^2,$$

$$h^2=b^2-m^2=b^2-(a-n)^2,$$

于是

$$c^2-n^2=b^2-(a-n)^2,$$

$$n=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$

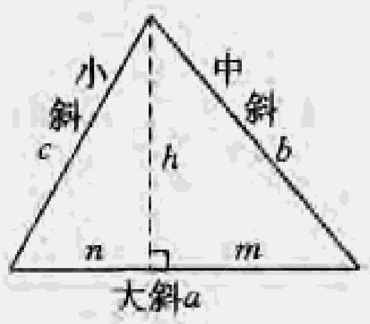


图 4－9

因此所求三角形的面积

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ah\\&=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-n^2}\\&=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.\end{aligned}$$

本题答案是 315 顷（1 顷 ＝ 100 亩，1 亩 ＝ 240 步^2）.

三斜求积公式与希腊数学家海伦的三角形面积公式（即海伦公式）

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

是等价的：

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(ca+\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)\left(ca-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{2ca+c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{2ca-c^2-a^2+b^2}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}[(c+a)^2-b^2][b^2-(c-a)^2]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(c+a+b)\cdot\frac{1}{2}(c+a-b)\cdot\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot\frac{1}{2}(b+a-c)}$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

反之，由海伦公式也可以推导出秦九韶的三斜求积公式.

参考文献 [3,p.127].

（眭秋生 涂荣豹）

三斜求积公式 见三斜求积.

秦九韶公式 见三斜求积.

印度莲(荷)花(Indian lotus problem) 静静湖水清可鉴，水面半尺露红莲.出泥不染亭亭立，忽被强风吹一边.渔夫观看忙向前，花离原位二尺远.善算诸君请解题，湖水如何知深浅？

这是印度数学家 Bhāskara 著作中的一个问题.它与我国《九章算术》中的"葭生池中"问题几乎是一样的(见**葭生池中**).

参考文献 [9,p.365].

（眭秋生 陈永林）

三角形的帕波斯定理(Pappus theorem of triangle) 以$\triangle ABC$的边AB为一边在三角形内侧作$\square ABB'A'$，使A'、B'落在$\triangle ABC$

之外，再分别以 AC、BC 为边，经过 A'、B' 作▱$ACDE$、▱$BCFH$，则

$$S_{\square ABB'A'} = S_{\square ACDE} + S_{\square BCFH}.$$

这个定理最早出现在帕波斯的《数学汇编》(*Mathematical collection*)一书中，是欧几里得《几何原本》中所没有的. 帕波斯定理是勾股定理的一般情形，即当△ABC 是直角三角形时，由帕波斯定理可导出勾股定理.

如图 4-10，延长 ED、HF 交于 C'，易知 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，得▱$ACC'A'$ 和▱$BCC'B'$. 由于▱$ACC'A'$ 与▱$ACDE$ 同底等高，则有

$$S_{\square ACC'A'} = S_{\square ACDE}.$$

同理 $S_{\square BCC'B'} = S_{\square BCFH}.$

$$\begin{aligned} \because S_{\square ABB'A'} &= S_{ABB'C'A'} - S_{\triangle A'B'C'} \\ &= S_{ABB'C'A'} - S_{\triangle ABC} \\ &= S_{\square ACC'A'} + S_{\square BCC'B'} \\ &= S_{\square ACDE} + S_{\square BCFH}. \end{aligned}$$

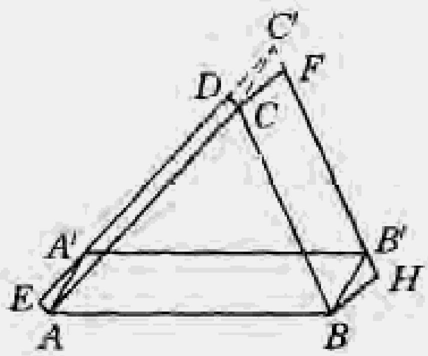


图 4-10

参考文献　[17, pp. 111～112].

（涂荣豹）

海伦公式(Heron formula)　边长为 a、b、c 的三角形的面积公式为：

$$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

海伦是公元 1 世纪希腊的著名学者和机械发明家，他的著作涉及数学、测量学和力学等，在他的《测量学》(*Metrica*)一书中，记载了这个公式，但阿基米德在此之前已经掌握了它.

下面的证法源于海伦的《测量学》中卷 I 的命题 8，或《测量仪器》(*On the diptra*)中的命题 30.

设△ABC 的内切圆⊙$I(r)$ 切三边于 D、E、F，易知 $AF = p - a$，$BD = p - b$，$CD = p - c$. 过 I、B 各作 CI、BC 的垂线，设它们相

交于 P，且 IP 交 BC 于 K，则 $\frac{BP}{DI}=\frac{BK}{KD}$，所以 $\frac{BP+r}{r}=\frac{p-b}{KD}$，而 $KD\cdot DC=ID^2=r^2$.

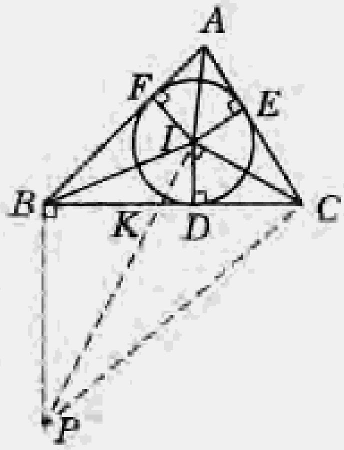


图 4-11

连结 PC，则 B、P、C、I 四点共圆，所以 $\angle BPC$ 与 $\angle BIC$ 互为补角. 易知 $\angle FIA$ 与 $\angle BIC$ 也互为补角，所以 $\angle BPC=\angle FIA$，故 $\triangle BPC\backsim\triangle FIA$. 从而 $\frac{a}{p-a}=\frac{BP}{r}$，$\frac{p}{p-a}=\frac{BP+r}{r}$，于是 $\frac{p}{p-a}=\frac{p-b}{KD}$，

$$\frac{p\cdot p}{p\cdot(p-a)}=\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{KD\cdot DC}=\frac{(p-b)(p-c)}{r^2},$$

因此 $r^2p^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$，

即 $S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

当然，该公式也可以通过适当的运算导出. 如图 4-12，在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的高，$\because b^2=a^2+c^2-2a\cdot BD$，

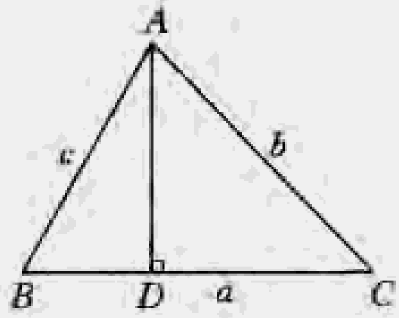


图 4-12

$\therefore BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$，而

$$\begin{aligned}AD^2&=c^2-BD^2\\&=c^2-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}\\&=\frac{1}{4a^2}[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]\\&=\frac{1}{4a^2}(b-a+c)(b+a-c)(a+c+b)(a+c-b)\\&=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2},\end{aligned}$$

$\therefore AD=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，

$\therefore S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

参考文献 [17,pp.96~97],[19,p.202].

(涂荣豹)

帕波斯公式(Pappus formula) 设 M 是$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点,则 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$.

该公式是帕波斯的《数学汇编》第七篇中的命题 122,它同时也就给出了已知三角形三边求它的中线的公式.帕波斯公式有时也称为阿波罗尼奥斯公式.

作 BC 边上的高 AH,则 $AB^2=BH^2+AH^2$,$AC^2=CH^2+AH^2$,所以 $AB^2+AC^2=2AH^2+BH^2+CH^2$,但 $BH^2+CH^2=2(MH^2+BM^2)$,所以 $AB^2+AC^2=2(AH^2+MH^2+BM^2)=2(AM^2+BM^2)$.

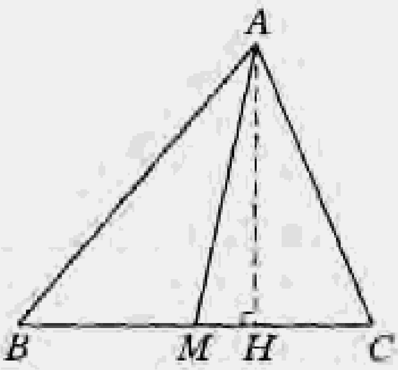


图 4-13

该公式也可以利用余弦定理来推导.

由上述公式可推得:平行四边形各边的平方和,等于它的两条对角线的平方和.

参考文献 [14,p.58],[38,p.195].

(郑君文)

Stewart 定理(Stewart theorem) D 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点,则

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD.$$

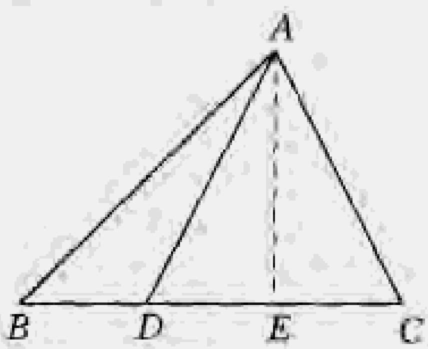


图 4-14

据史料记载,该定理在公元前 3 世纪由阿基米德首先发现,1751 年由数学家 Simson 首次证明,但因英国数学家 Stewart(1717~1785)曾经说明过这个定理,便称其为 Stewart

定理了.可用来计算三角形中的一些特殊线段的长.

作 $AE \perp BC$,设 C、D 在 E 的两侧,则$\angle ADC$ 是锐角,$\angle ADB$ 是钝角.

由余弦定理及 $DE = AD \cdot \cos\angle ADC$,得

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos\angle ADB$$
$$= BD^2 + AD^2 + 2BD \cdot DE. \quad ①$$

同理得 $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2DC \cdot DE.$ ②

① × DC + ② × BD,得

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot (BD + DC) + BD \cdot DC(BD + DC),$$

即 $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$

参考文献 [17, p. 187].

(涂荣豹)

三角形的拉格朗日定理(Lagrange theorem of triangle) 如果 G 是$\triangle ABC$ 的重心,P 是该三角形所在平面上的任意一点,则

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GP^2.$$

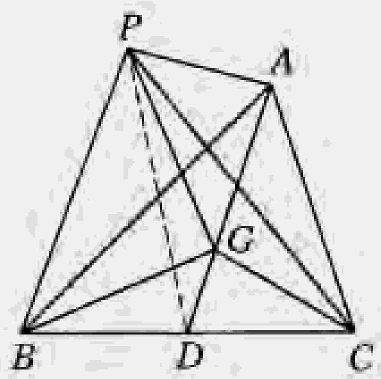


图 4-15

该定理是拉格朗日于 1783 年发现的,Carnot 在 1801 年也得到了它.

设 D 是 BC 边的中点,连结 PD,则

$$PB^2 + PC^2 = 2(PD^2 + BD^2). \quad ①$$

据 Stewart 定理,得

$$PA^2 \cdot DG + PD^2 \cdot GA - PG^2 \cdot DA = DA \cdot DG \cdot GA,$$

即 $PA^2 + 2PD^2 - 3PG^2 = GA^2 + 2GD^2.$ ②

① + ② 得

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + 2(BD^2 + GD^2) + 3GP^2.$$

由于 $GB^2 + GC^2 = 2(BD^2 + GD^2)$,所以

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GP^2.$$

如果用坐标法来解，那么可取 G 为原点建立直角坐标系 Oxy，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$P(x, y)$，则

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

所以

$$\begin{aligned}
&PA^2 + PB^2 + PC^2 \\
&= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 \\
&\quad + (y - y_3)^2 \\
&= 3(x^2 + y^2) + (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + (x_3^2 + y_3^2) \\
&= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GP^2.
\end{aligned}$$

参考文献 [38, pp. 198～199].

（张文华）

关于重心的帕波斯定理(Pappus theorem on centroid) 设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点，且使得 $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$，则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 具有共同的重心 G.

该定理载于帕波斯的《数学汇编》第八章里.

建立直角坐标系 Oxy，设 $A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$，$C(c_1、c_2)$，

$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = \frac{m}{n}$，则 $D\left(\frac{nb_1 + mc_1}{m + n}, \frac{nb_2 + mc_2}{m + n}\right)$，$E\left(\frac{nc_1 + ma_1}{m + n}, \frac{nc_2 + ma_2}{m + n}\right)$，$F\left(\frac{na_1 + mb_1}{m + n}, \frac{na_2 + mb_2}{m + n}\right)$.

再设 $\triangle DEF$ 的重心 $G(x, y)$，则

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(nb_1 + mc_1) + (nc_1 + ma_1) + (na_1 + mb_1)}{m + n} \\
&= \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3},
\end{aligned}$$

$$y=\frac{1}{3}\cdot\frac{(nb_2+mc_2)+(nc_2+ma_2)+(na_2+mb_2)}{m+n}$$
$$=\frac{a_2+b_2+c_2}{3}.$$

可见 G 也是$\triangle ABC$ 的重心，因此$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 有共同的重心.

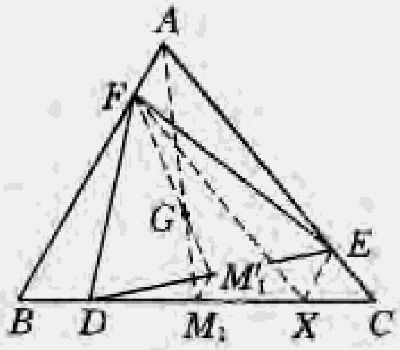


图 4-16

下面我们再介绍由 Fuhrmann 给出的一种证法. 在 BC 上截取 $XC=BD$，连结 EX、FX，则 $\frac{CE}{EA}=\frac{BD}{DC}=\frac{CX}{XB}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CX}{XB}$，所以 $EX\parallel AF$，$FX\parallel AE$，故 $AFXE$ 为平行四边形，从而 $AF=EX$. 设 DE 的中点为 M_1'，BC 的中点为 M_1，连结 M_1M_1'，则 M_1M_1' 平行且等于 EX(即 AF) 的一半. 再连结 FM_1'、AM_1，设它们相交于 G，则 $\frac{AG}{GM_1}=\frac{FG}{GM_1'}=\frac{AF}{M_1'M_1}=\frac{2}{1}$，所以 G 同是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的重心.

参考文献 [22,pp. 222～223],[35,p. 197],[38,p. 199].

（郑君文）

Cesàro 定理(Cesàro theorem) 以$\triangle ABC$ 的三边分别向外作$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$，使得 $\triangle BCA'\backsim\triangle CAB'\backsim\triangle ABC'$，则$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的重心相重合.

该定理是 E. Cesàro(1859～1906)于 1880 年发现的，第二年又被Neuberg 和 Laisant 再次发现. 它可以推广到多边形的情形.

作 $\square BA'CP$，根据 $\triangle A'BC\backsim\triangle B'CA\backsim\triangle C'AB$，得 $\triangle BPC\backsim\triangle AB'C$，所以 $\frac{B'C}{CP}=\frac{AC}{BC}$，$\angle ACB'=\alpha=\angle BCP$，于是 $\angle B'CP=\angle ACB$，从而得$\triangle B'CP\backsim\triangle ACB$，因此 $\frac{CB'}{PB'}=\frac{CA}{AB}$，

$\angle PB'C = \angle BAC$，但 $\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{CB'}{C'A}$，所以 $PB' = C'A$.

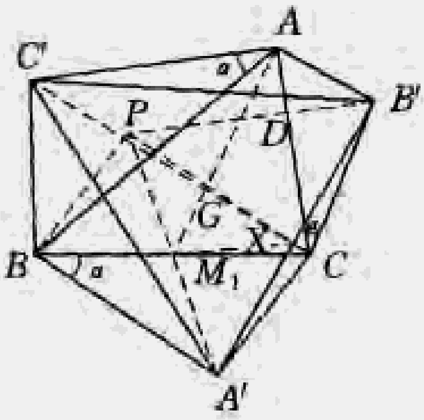


图 4-17

设 M_1、X 分别为 BC、$A'B'$ 的中点，连结 AM_1 和 $C'X$，它们相交于 G. 再设 AC 与 $B'P$ 相交于 D，则 $\angle C'AD = \alpha + \angle BAC = \alpha + \angle PB'C = \angle ADB'$，所以 $PB' \parallel C'A$. 因为 M_1 也是 $A'P$ 的中点，所以 $M_1X \mathrel{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}PB'$，故 $M_1X \mathrel{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}C'A$，因此 $\dfrac{M_1G}{GA} = \dfrac{XG}{GC'} = \dfrac{1}{2}$. 由此可知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，又是 $\triangle A'B'C'$ 的重心，即这两个三角形的重心重合.

如果利用复数知识来证，那么可设 $A(a)$、$A'(a')$、… 为复平面上的点，据相似条件得

$$\frac{a'-b}{c-b} = \frac{b'-c}{a-c} = \frac{c'-a}{b-a},$$

于是 $(a'-b)+(b'-c)+(c'-a)=0$，所以

$$a'+b'+c' = a+b+c,$$

即
$$\frac{1}{3}(a'+b'+c') = \frac{1}{3}(a+b+c),$$

由此可知 $\triangle A'B'C'$ 的重心与 $\triangle ABC$ 的重心相重合.

参考文献 [39, pp. 139～141].

（郑君文）

垂足三角形的垂足三角形问题（Pedal triangle of pedal triangle） 任意三角形的第三个垂足三角形与原三角形相似.

这是几何学中一个有趣而富有想像力的问题，它最初（约 1892 年）是由编者 J. Neuberg 增补到 J. Casay 的名著《欧几里得原本前六卷续篇》的第 6 版里而问世的.

由 $\triangle ABC$ 的任一内点 P，向边 BC、CA、AB 分别引垂线，垂足

为 A_1、B_1、C_1，则$\triangle A_1B_1C_1$称为$\triangle ABC$的(第一个)垂足三角形；由点 P 又可决定$\triangle A_1B_1C_1$ 的垂足三角形$\triangle A_2B_2C_2$，则$\triangle A_2B_2C_2$ 称为$\triangle ABC$ 的第二个垂足三角形；由点 P 还可以决定$\triangle A_2B_2C_2$ 的垂足三角形$\triangle A_3B_3C_3$，则$\triangle A_3B_3C_3$ 称为$\triangle ABC$ 的第三个垂足三角形. 连结 PA.

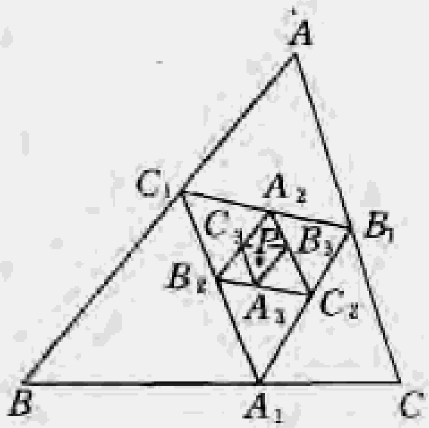


图 4－18

$\because \angle PB_1A = \angle PC_1A = 90°$，

$\therefore P$、B_1、A、C_1 四点共圆，即 P 在$\triangle AB_1C_1$ 外接圆上. 同理，P 还在$\triangle A_2B_1C_2$、$\triangle A_3B_3C_2$、$\triangle A_2B_2C_1$ 和$\triangle A_3B_2C_3$ 的外接圆上. 于是有

$$\angle C_1AP = \angle A_2B_1P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P,$$
$$\angle B_1AP = \angle A_2C_1P = \angle C_3B_2P = \angle C_3A_3P.$$

从而，$\angle BAC = \angle C_1AP + \angle B_1AP = \angle C_3A_3P + \angle B_3A_3P$
$= \angle B_3A_3C_3$.

同理得 $\angle ABC = \angle A_3B_3C_3$，故 $\triangle ABC \backsim \triangle A_3B_3C_3$.

1940 年，B. M. Stewart 对这一性质作了推广：

任意 n 边形的第 n 个垂足 n 边形与原 n 边形相似.

参考文献 [27，pp. 27～29].

(涂荣豹)

施泰纳-莱默斯定理(Staeiner-Lehmus theorem) 有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形.

这个问题是莱默斯(C. L. Lehmus)于 1840 年给瑞士著名数学家斯图姆的一封信中提出的，请求给出一个纯几何的证明，斯图姆向许多数学家提起过这件事. 首先回答这个问题的是瑞士的几何学家施泰纳，后来这个定理就以施泰纳—莱默斯定理闻名于世. 由于施泰纳的证明复杂，因而吸引了很多人去寻找更为简单的证

法，从而在 1842 至 1864 年间形成了证明施泰纳-莱默斯定理的热潮，乃至于在各种杂志上出现了大量的证明论文，并在其后的一个世纪中，还经常有这方面的文章出现．下面给出的证法，是两个英国工程师 G. Gilbert 和 D. Macdonnell 提出，在 1963 年《美国数学月刊》上发表的．

设 BM、CN 是$\triangle ABC$ 的两条角平分线，且 $BM=CN$.

假设 $\angle B\neq\angle C$，不妨设 $\angle B<\angle C$，则有

$$\frac{1}{2}\angle B<\frac{1}{2}\angle C.$$

在 BM 上取一点 M'，使

$$\angle M'CN=\frac{1}{2}\angle B.$$

$\therefore$ $\angle M'CN=\angle M'BN$，故 B、C、M'、N 四点共圆.

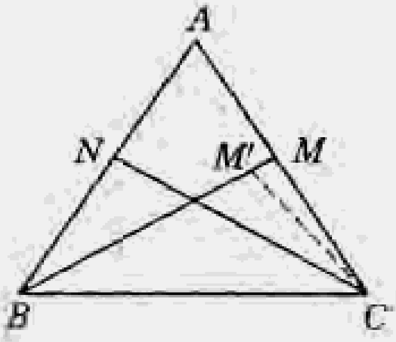


图 4-19

$$\because\ \angle B<\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$
$$<\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C),$$

$\therefore$ $\angle CBN<\angle M'CB<90°$.

$\therefore$ $CN<M'B$（同圆或等圆中两圆周角都是锐角，则较小角所对的弦较短）.

于是有　$CN<BM'<BM$，这与题设 $CN=BM$ 矛盾，故应有 $\angle B=\angle C$，所以$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

考察上面的证法，可得一个更为广泛的定理："设 D、E 分别是$\triangle ABC$ 两边 AC、AB 上的点，记 $\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\alpha_1$，$\angle ACE=\beta$，$\angle ECB=\beta_1$，如果 $\alpha:\alpha_1=\beta:\beta_1=t$，且 $BD=CE$，则 $AB=AC$." 显然，当 $t=1$ 时，就是斯泰纳-莱默斯定理.

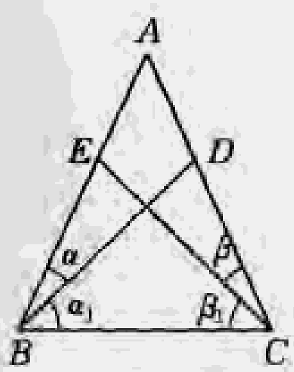


图 4-20

上面采用的是间接证法(即反证法)，同样该定理也可采用直接证法来证，如图4-21，把$\triangle BNC$合同变换为$\triangle PBM$，得$MP = BC$，$\angle PMB = \beta$，$\angle PBM = \angle BNC$，$PB = BN$，于是

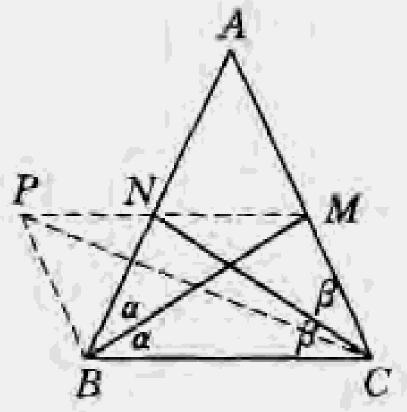


图4-21

$$\begin{aligned}\angle PMC &= \angle PMB + \angle BMC \\ &= \beta + (\pi - \alpha - 2\beta) \\ &= \pi - \alpha - \beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle PBC &= \angle PBM + \angle MBC \\ &= (\pi - \beta - 2\alpha) + \alpha \\ &= \pi - \alpha - \beta,\end{aligned}$$

而$\alpha + \beta = \frac{1}{2}(\pi - \angle A) < \frac{\pi}{2}$，故$\angle PMC = \angle PBC$为钝角。又由$MP = BC$，$PC = CP$，于是$\triangle PBC \cong \triangle CMP$，从而$CM = PB = BN$，故$\triangle NBC \cong \triangle MCB$，$\alpha = \beta$，因此$AB = AC$.

若采用计算方法来证明，则思路直接，易于理解掌握，但有时计算比较繁杂. 我们记$\triangle ABC$的三边BC、AC、AB之长各为a、b、c，由面积关系$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MBC}$，得

$$ac\sin 2\alpha = BM \cdot c \cdot \sin\alpha + BM \cdot a \cdot \sin\alpha,$$

所以 $BM = \dfrac{ac\sin 2\alpha}{(a+c)\sin\alpha} = \dfrac{2ac\cos\alpha}{a+c}.$

同理 $CN = \dfrac{2ab\cos\beta}{a+b}.$

由已知$BM = CN = t$，得

$$\cos\alpha - \cos\beta = \frac{t}{2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right).$$

如果$\alpha < \beta$，则上式左端为正，但$c > b$，于是右端为负；若$\alpha > \beta$，则左端为负右端为正，这都是不可能的. 故只有$\alpha = \beta$.

由上面的证明，顺便可得到三角形内角平分线的计算公式：

$$BM=\frac{2ac\cos\alpha}{a+c}=\frac{2ac}{a+c}\sqrt{\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{4ac}}$$

$$=\frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]},$$

$$CN=\frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2-c^2]}.$$

当然，如果利用上述三角形内角平分线的公式和 $BM=CN$，并直接通过计算，那么就可得到 $b=c$. 这里也许更体现了计算证法的特点.

参考文献　[17,pp.158～160],[27,p.16].

（张景中　涂荣豹）

拿破仑三角形(Napoleon triangle)　由任意一个三角形各边向形外作等边三角形，则它们的外心构成一个等边三角形.

拿破仑是历史上一位政治家、军事家，此外他还是一位对几何有相当造诣的数学爱好者，不少几何名题与拿破仑有关联，这个定理正是拿破仑所研究过的，故而得名为拿破仑三角形.

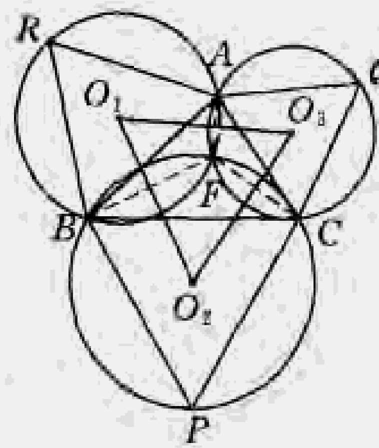


图 4-22

以 $\triangle ABC$ 的三边向形外分别作等边 $\triangle ABR$、$\triangle BCP$、$\triangle CAQ$，设它们的外心依次是 O_1、O_2、O_3，外接圆依次为 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$，且 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 交于 F，连结 AF、BF、CF，则 $\angle BFC=180°-\angle P$，$\angle CFA=180°-\angle Q$，$\therefore\ \angle AFB=360°-(\angle BFC+\angle CFA)=\angle P+\angle Q=180°-\angle R$. $\therefore$ F 在 $\odot O_1$ 上，即 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 交于一点 F. $\because$ $O_1O_2\perp BF$，$O_2O_3\perp CF$，$\therefore\ \angle O_1O_2O_3+\angle BFC=180°$，$\therefore\ \angle O_1O_2O_3=\angle P=60°$. 同理 $\angle O_2O_3O_1=\angle O_3O_1O_2=60°$，$\therefore\ \triangle O_1O_2O_3$ 是等边三角形.

如果以 $\triangle ABC$ 的三边向形外作三个等边三角形，它们的外心

构成的三角形叫作$\triangle ABC$的外拿破仑三角形;向$\triangle ABC$形内作三个等边三角形,它们的外心构成的三角形叫作$\triangle ABC$的内拿破仑三角形,则内拿破仑三角形也是正三角形,同时还有:$\triangle ABC$的面积恰是它的内外拿破仑三角形的面积之差.

参考文献 [17,pp.163~164],[27,pp.69~71].

(涂荣豹)

Morley 定理(Morley theorem) 在任意$\triangle ABC$中,分别作三个内角的三等分线,设分别接近于三边BC、CA、AB的各内角的三等分线相交于X、Y、Z,则$\triangle XYZ$是一个等边三角形.

这个堪称初等几何中最令人惊讶的定理,被冠名以"Morley",是因为它由英国数学家 F. Morley(1860~1937)于1904年最早发现,并在给英国剑桥大学的一位朋友的信中提到过,正式发表则是在20年后. Morley 定理的证法很多,其中1909年 M. T. Naraniengar 用纯粹综合几何方法所给出的证明最为引人入胜. 一般基于直接计算的证明都比较繁,令人意外的是1994年计算机给出了一个较为简单的证法. 这里给出的是综合证法.

设已知$\triangle ABC$中,$\angle A=3\alpha$、$\angle B=3\beta$、$\angle C=3\gamma$,与BC相邻的两条三等分线交点是P,$\angle B$与$\angle C$剩下的两条三等分线交于S,则P是$\triangle SBC$的内心,PS平分$\angle BSC$. 以P为顶点,在PS两侧分别作$30°$角在SC、SB上得交点Q、R,易知$\triangle PSQ\cong\triangle PSR$,于是$PQ=PR$,且$\angle QPR=60°$,所以$\triangle PQR$是正三角形. 在$BA$、$CA$上分别取点$M$、$N$,使$BM=BP$、$CN=CP$,于是$\triangle BRP\cong\triangle BRM$,得$MR=PR$. 同理得$PQ=NQ$. 由正$\triangle PQR$得$MR=RQ=QN$.

由$\angle BRP$是$\triangle PRS$的外角,得$\angle BRP=\frac{1}{2}\angle BSC+30°$,

$\therefore\ \angle BRM=\frac{1}{2}\angle BSC+30°$,故

$$\angle MRQ = 360° - 2\left(\frac{1}{2}\angle BSC + 30°\right) - 60°$$
$$= 240° - \angle BSC.$$

而 $\angle BSC = 180° - 2\beta - 2\gamma = 180° - \frac{2}{3}(3\alpha + 3\beta + 3\gamma) + 2\alpha$
$$= 180° - 120° + 2\alpha = 60° + 2\alpha.$$

所以，$\angle MRQ = 180° - 2\alpha$. 同理有 $\angle NQR = 180° - 2\alpha$.

分别作 $\angle MRQ$ 和 $\angle NQR$ 的角平分线交于 O，则 $\triangle OMR$、$\triangle ORQ$、$\triangle OQN$ 是三个全等的等腰三角形，底角为 $90° - \alpha$，顶角为 2α，它们的腰 OM、OR、OQ、ON 是以 O 为圆心的一个圆的半径，即 MR、RQ、QN 与圆心 O 所张的圆心角都是 2α，于是 MN 与圆心 O 张成的角是 6α，从而 MN 张成的圆周角是 3α，但 MN 在 $\triangle ABC$ 顶点 A 处张成的圆周角是 3α，所以 A 在 $\odot O$ 上，MR、RQ、QN 在点 A 处张成的圆周角均是 α，从而 AR、AQ 为 $\angle A$ 的三等分线. 这就证明了定理.

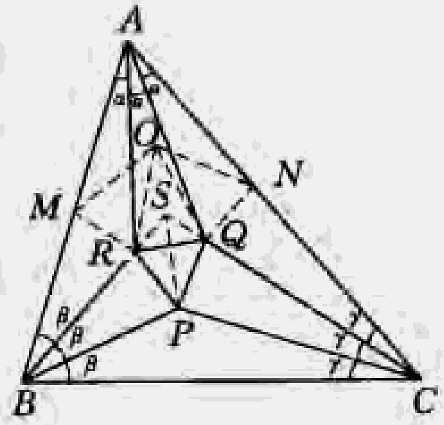


图 4-23

Morley 定理可以推广到三角形的外角三等分线的情形，即由一个三角形的内角或外角的三等分线按一定组合方式相交而构成正三角形. 对于给定的任意一个三角形，共有 18 个 Morley 三角形.

参考文献 [17, pp. 193～196], [27, pp. 53～56], [29, pp. 104～108].

（涂荣豹）

Echols 定理（Echols theorem） 两个等边 $\triangle Z_1Z_2Z_3$、$\triangle U_1U_2U_3$，且 Z_1、Z_2、Z_3 与 U_1、U_2、U_3 都依逆时针方向排列，则线段 Z_1U_1、Z_2U_2、Z_3U_3 的中点恰是一个等边三角形的顶点.

这是关于两个等边三角形性质的定理. Echols 于 1932 年发表了这一定理及其证明.

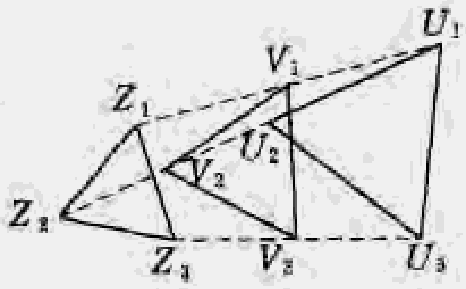


图 4-24

为了证明方便,复平面上的点及相应的复数用同一字母表示,点用大写字母,复数用小写字母.

这里用复数来证明,为此需用已有的结论:$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为等边三角形的充分必要条件是以 1 的立方根 1、ω、ω^2 为顶点的三角形与$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 相似(这等价于 $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$).

因为$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是等边三角形,所以有 $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$,同理有 $u_1+\omega u_2+\omega^2 u_3=0$. 将这两式相加后除以 2,得

$$\frac{1}{2}(z_1+u_1)+\omega\cdot\frac{1}{2}(z_2+u_2)+\omega^2\cdot\frac{1}{2}(z_3+u_3)=0.$$

设 V_1、V_2、V_3 分别是线段 Z_1U_1、Z_2U_2、Z_3U_3 的中点,则有 $v_1=\frac{1}{2}(z_1+u_1)$,$v_2=\frac{1}{2}(z_2+u_2)$,$v_3=\frac{1}{2}(z_3+u_3)$. 因此,$v_1+\omega v_2+\omega^2 v_3=0$. 这表明$\triangle V_1V_2V_3$ 是等边三角形.

这个定理可进一步推广为:如果$\triangle Z_1Z_2Z_3$、$\triangle U_1U_2U_3$、$\triangle V_1V_2V_3$ 都是等边三角形,则$\triangle Z_1U_1V_1$、$\triangle Z_2U_2V_2$、$\triangle Z_3U_3V_3$ 的重心连线构成一个等边三角形.

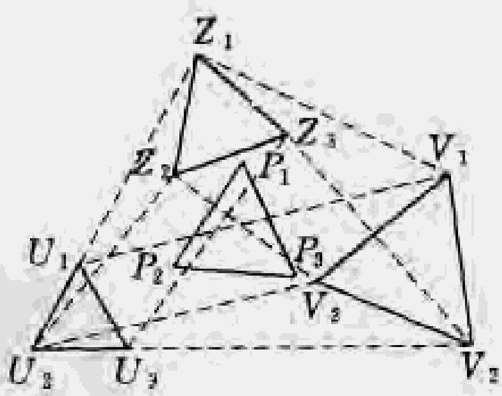


图 4-25

参考文献 [15,p.294].

(涂荣豹)

梅内劳斯定理(Menelaus theorem) 若在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB(或它们的延长线)上有三点 X、Y、Z,则此三点共线的充分必要条件是

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

梅内劳斯是1世纪时的古希腊的数学家，他写过一本《球面几何》，其中用到球面三角形的这一性质，字里行间似乎显示出平面三角形的类似性质是熟知的，但并无更早的记录可查，便以梅内劳斯命名该定理. 此后该定理被淡忘了. 1678年，意大利数学家塞瓦重新发现了它，并把它与自己发现的其他定理一起发表而流传于世.

必要性：设 X、Y、Z 三点共线（如图 4－26），作 $CD\,/\!/\,YZ$ 交 AB 于 D，则有

$$\frac{XB}{XC}=\frac{ZB}{ZD},\frac{YC}{YA}=\frac{ZD}{ZA}.$$

$$\therefore \frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{ZB}{ZD}\cdot\frac{ZD}{ZA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

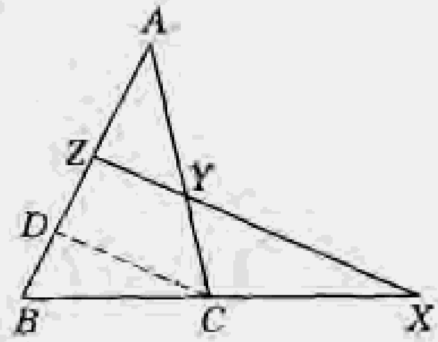


图 4－26

充分性：设 $\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$，若 BC 与 ZY 交于 X'，则 $\frac{X'B}{X'C}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$，因此，$\frac{X'B}{X'C}=\frac{XB}{XC}$，即 X' 与 X 重合，所以 X、Y、Z 三点共线.

梅内劳斯定理可以推广到多边形情形. 它提供了共线性的判别准则.

参考文献　[17，pp. 105～106]，[27，pp. 74～76].

（涂荣豹）

共线点的帕波斯定理（Pappus theorem of collinear points）　设 A、C、E 是一条直线上的三点，B、D、F 是另一条直线上的三点，如果直线 AB、CD、EF 分别与 DE、FA、BC 相交，那么这三个交点 L、M、N 共线.

帕波斯被誉为古代最后一位大几何学家.帕波斯定理作为平面几何学中的十分重要的定理,是帕波斯大约在公元300年时证明的,而它作为射影几何学的基础地位,直到16世纪后半叶才被认识.帕波斯定理有各种不同的表述方式,以上的叙述是其中的一种.

如图4-27,延长 DC 和 FE,为了仅限于平面几何范围内,设它们相交于 X,又设 AB 交 EF、CD 于 Y 和 Z,则构成△XYZ,其各边上有五个三点组:LDE、AMF、BCN、ACE、BDF,应用梅内劳斯定理得

$$\frac{LY}{LZ}\cdot\frac{DZ}{DX}\cdot\frac{EX}{EY}=1,$$

$$\frac{AY}{AZ}\cdot\frac{MZ}{MX}\cdot\frac{FX}{FY}=1,$$

$$\frac{BY}{BZ}\cdot\frac{CZ}{CX}\cdot\frac{NX}{NY}=1,$$

$$\frac{AY}{AZ}\cdot\frac{CZ}{CX}\cdot\frac{EX}{EY}=1,$$

$$\frac{BY}{BZ}\cdot\frac{DZ}{DX}\cdot\frac{FX}{FY}=1.$$

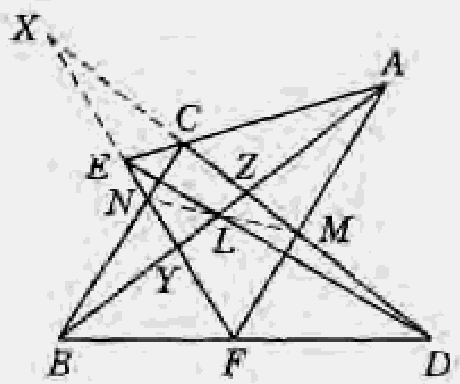


图4-27

将前三式的积除以后两式的积,化简后就有

$$\frac{LY}{LZ}\cdot\frac{MZ}{MX}\cdot\frac{NX}{NY}=1,$$

由此可知 L、M、N 三点共线.

这个定理的"射影"性质表现在,它纯粹只表现了关联性,而不涉及长度和角度,甚至与顺序无关,即在一组共线点中,哪一点落在另外两点之间无关紧要.

参考文献 [27,pp.76~78].

(涂荣豹)

Desargues 定理(Desargues theorem) 已知两个三角形的三双

对应顶点的连线交于一点，如果它们的三双对边分别相交，那么这三个交点在一条直线上，其逆命题亦成立.

这一定理是法国数学家、建筑工程师 G. Desargues（1591～1661）在 1636 年发现的，并因此而得名. 然而，据古希腊数学家帕波斯说，此定理早已收集在失传的欧几里得专题论文之中. 它与共线点的帕波斯定理后来被认为是射影几何学中同等重要的定理. Desargues 定理实际上可以由共线点的帕波斯定理推出，但是推导的具体过程很复杂，而用梅内劳斯定理推证则要容易得多.

先证其原命题. 设$\triangle PQR$ 和$\triangle P'Q'R'$的三双顶点的连线 PP'、QQ'、RR'交于点 O，它们的三双对应边交点分别是 D、E、F. 把梅内劳斯定理分别用于$\triangle OQR$、$\triangle ORP$、$\triangle OPQ$ 各边上的三点组(D,R',Q')、(E,P',R')、(F,Q',P')，可得到

$$\frac{DQ}{DR}\cdot\frac{R'R}{R'O}\cdot\frac{Q'O}{Q'Q}=1,$$

$$\frac{ER}{EP}\cdot\frac{P'P}{P'O}\cdot\frac{R'O}{R'R}=1,$$

$$\frac{FP}{FQ}\cdot\frac{Q'Q}{Q'O}\cdot\frac{P'O}{P'P}=1.$$

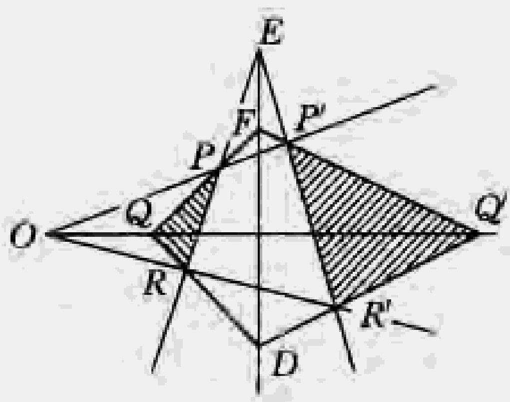


图 4-28

将三式相乘，可得

$$\frac{DQ}{DR}\cdot\frac{ER}{EP}\cdot\frac{FP}{FQ}=1.$$

所以 D、E、F 三点共线.

再证其逆命题. 设$\triangle PQR$ 与$\triangle P'Q'R'$的三双对应边的交点分别是 D、E、F，两双对应顶点的连线 PP'与 RR'交于点 O，要证第三双顶点连线 QQ'也通过点 O，即 O、Q、Q'三点在一条直线上. 事实上，$\triangle FPP'$与$\triangle DRR'$的三双顶点连线 FD、PR、$R'P'$交于点 E，利用已证得的原命题可以得到：这两个三角形三双对应边交点的连线中，PP'与 RR'的交点 O、FP 与 DR 的交点 Q，FP'与 DR'的交点 Q'是在同一条直线上. 这就是所要证的.

通常，若两个三角形的三双对应顶点的连线交于一点，就称这两个三角形是共极的或是关于一点透视的；若两个三角形的三双对应边的三个交点共线，就称这两个三角形是共轴的或是关于一条直线透视的.

参考文献 [19，p. 218]，[27，pp. 79～82]，[31，pp. 276～277].

（涂荣豹）

塞瓦定理(Ceva theorem) 设 X、Y、Z 是 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 上的点，则 AX、BY、CZ 三线交于一点的充分必要条件是

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

塞瓦是意大利的数学家、工程师，1678 年他在其著作《直线论》中，发表了著名的塞瓦定理，并给出了力学证法和几何证法. 这个定理是平面几何中的一个重要定理，在解决共点线方面具有很大作用.

证必要性. 设 AX、BY、CZ 交于一点 O，易知

$$\frac{XB}{XC}=\frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle ACX}}=\frac{S_{\triangle BOX}}{S_{\triangle COX}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABX}-S_{\triangle BOX}}{S_{\triangle ACX}-S_{\triangle COX}}=\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ACO}}.$$

同理可证

$$\frac{YC}{YA}=\frac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle BAO}} \text{和} \frac{ZA}{ZB}=\frac{S_{\triangle CAO}}{S_{\triangle CBO}},$$

所以 $$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ACO}}\cdot\frac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle BAO}}\cdot\frac{S_{\triangle CAO}}{S_{\triangle CBO}}=1.$$

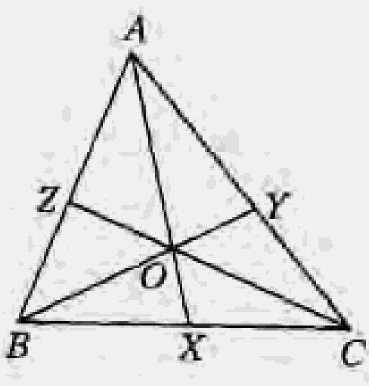


图 4-29

证充分性. 设 $\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$. 假定 BY 与 CZ 相交于点

O,连结 AO 交 BC 于 X',那么由此定理的必要性可得

$$\frac{X'B}{X'C}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1,$$

再与已知条件比较就有 $\frac{XB}{XC}=\frac{X'B}{X'C}$,即 X' 与 X 重合.这就证明了 AX、BY、CZ 三线是共点的.

参考文献 [17,pp.140~142],[19,pp.254~256],[27,pp.6~7].

(涂荣豹)

Kiepert 点(Kiepert point) 在$\triangle ABC$ 的各边上分别作相似等腰三角形,设其第三个顶点分别为 A'、B'、C',则 AA'、BB'、CC' 相交于一点.这个点叫做 Kiepert 点.

该点是 Kiepert 于 1869 年发现的.

设 AA'、BB'、CC' 分别和 BC、CA、AB 相交于点 A_1、B_1、C_1,各等腰三角形的底角为 θ,$\triangle ABC$、$\triangle A'BC$ 边 BC 上的高各为 h_a、h'_a,a、b、c 为$\triangle ABC$ 三边的长,则

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_1(h_a+h'_a)}{A_1C(h_a+h'_a)}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle ACA'}}=\frac{c\sin(B+\theta)}{b\sin(C+\theta)},$$

同理可得

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{a\sin(C+\theta)}{c\sin(A+\theta)},$$

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{b\sin(A+\theta)}{a\sin(B+\theta)},$$

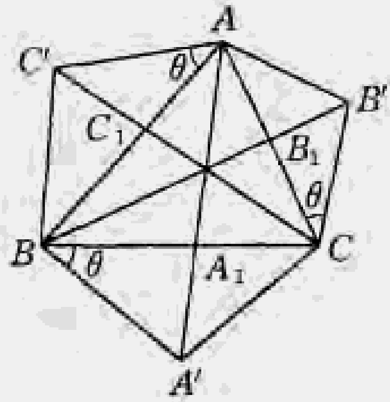


图 4-30

所以

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

根据塞瓦定理得 AA'、BB'、CC' 相交于一点.

该定理的特殊情形,即为在$\triangle ABC$ 各边上分别作等边三角

形，设第三个顶点分别为 A'、B'、C'，则直线 AA'、BB'、CC' 共点. 它的推广，就是在 $\triangle ABC$ 各边上分别作顺相似 $\triangle BCA'$、$\triangle B'CA$、$\triangle BC'A$，则 AA'、BB'、CC' 相交于一点. 该推广是清宫俊雄于 1941 年发表在《東物誌》594 号上，也可见 Mathesis，5 卷，p. 144.

参考文献　[38，pp. 286～287]，[39，pp. 141～142].

（郑君文）

共点线的施泰纳定理（**Steiner theorem of concurrent lines**）

（1）设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC、CA、AB 上的一点，则过各点垂直于所在边的三条垂线共点的充分必要条件是

$$(BA'^2 - A'C^2) + (CB'^2 - B'A^2) + (AC'^2 - C'B^2) = 0.$$

（2）在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，自 A、B、C 分别向 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 作垂线，如果它们相交于一点，那么从 A'、B'、C' 分别向 BC、CA、AB 所作的垂线也必相交于一点.

上述定理(1)，是施泰纳于 1827～1828 年期间作为已知定理使用的；定理(2)是在 1827～1828 年间为施泰纳所发现.

（1）设各过 A'、B'、C' 且与所在边垂直的三条垂线相交于一点 O，则 $BA'^2 - A'C^2 = OB^2 - OC^2$，$CB'^2 - B'A^2 = OC^2 - OA^2$，$AC'^2 - C'B^2 = OA^2 - OB^2$. 把以上三式相加，即得 $(BA'^2 - A'C^2) + (CB'^2 - B'A^2) + (AC'^2 - C'B^2) = 0$.

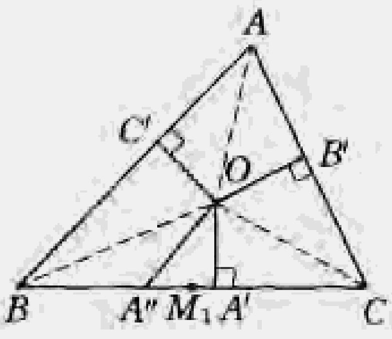


图 4-31

反之，过 B'、C' 作所在边的垂线，设它们相交于点 O. 再作 $OA'' \perp BC$ 于 A''，则有 $(BA''^2 - A''C^2) + (CB'^2 - B'A^2) + (AC'^2 - C'B^2) = 0$，但已知 $(BA'^2 - A'C^2) + (CB'^2 - B'A^2) + (AC'^2 - C'B^2) = 0$，所以 $\overline{BA'}^2 - \overline{A'C}^2 = \overline{BA''}^2 - \overline{A''C}^2$，即 $\overline{BA'} - \overline{A'C} = \overline{BA''} - \overline{A''C}$. 设 M_1 是 BC 的中点，则 $\overline{BA'} - \overline{A'C} = 2\,\overline{M_1A'}$，$\overline{BA''} - \overline{A''C} = 2\,\overline{M_1A''}$，所以 $\overline{M_1A'} =$

$\overline{M_1A''}$，故 A' 与 A'' 重合. 这就是说，过 A' 且垂直于 BC 的直线必通过 O.

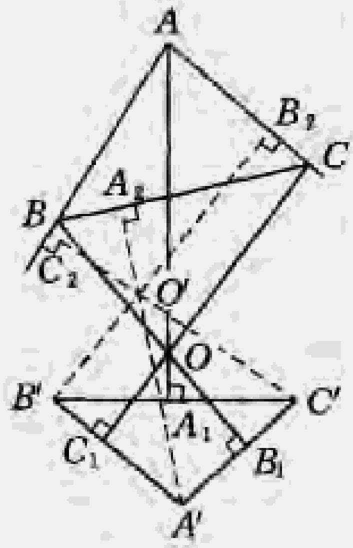


图 4－32

(2) 如图 4－32，三条垂线 AA_1、BB_1、CC_1 相交于点 O，则 $(B'A_1^2-A_1C'^2)+(C'B_1^2-B_1A'^2)+(A'C_1^2-C_1B'^2)=0$.

因为 $B'A_1^2-A_1C'^2=AB'^2-AC'^2=(B'B_2^2+AB_2^2)-(C'C_2^2+AC_2^2)$，

$C'B_1^2-B_1A'^2=BC'^2-BA'^2=(C'C_2^2+BC_2^2)-(A'A_2^2+BA_2^2)$，

$A'C_1^2-C_1B'^2=CA'^2-CB'^2=(A'A_2^2+CA_2^2)-(B'B_2^2+CB_2^2)$，

把上面三式相加，得

$$(B'A_1^2-A_1C'^2)+(C'B_1^2-B_1A'^2)+(A'C_1^2-C_1B'^2)$$
$$=AB_2^2-AC_2^2+BC_2^2-BA_2^2+CA_2^2-CB_2^2,$$

所以 $(BA_2^2-A_2C^2)+(CB_2^2-B_2A^2)+(AC_2^2-C_2B^2)=0$.
故三条垂线 $A'A_2$、$B'B_2$、$C'C_2$ 相交于一点 O'.

推论 过三角形各顶点向一直线作垂线，再过它们的垂足分别作其对边的垂线，则这三条垂线共点.

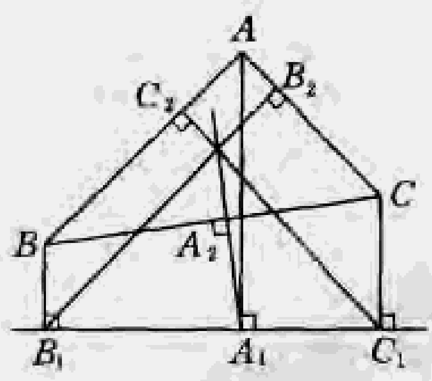


图 4－33

该推论是 J. Neuberg（1840～1926）发现的，见 Neuberg, Nouvelle correspondance math. 2(1875). 它可以看做上面定理(2)中 A'、B'、C' 处于同一直线上的特殊的情形.

参考文献 ［38，p. 171，p. 179，pp. 173～174］.

（郑君文）

等角共轭点（Isogonal conjugate points） 任取一点 P 与

$\triangle ABC$ 各顶点相连，再在三角形各顶点作三条相应的等角线，则此三条等角线交于一点 Q，或相互平行.

所谓等角线，就图 4-34 中 $\angle BAC$ 来说，AP 以及 AP 关于 $\angle BAC$ 平分线对称的直线 x，就叫做 $\angle BAC$ 的等角线.

设 x、y、z 分别是 AP、BP、CP 的等角线. 过 P 分别作 BC、CA、AB 的垂线，垂足是 X、Y、Z，得 $\triangle XYZ$. 由 $\angle PZA = \angle PYA = 90°$，知 A、Z、P、Y 共圆，又因为 x 是 AP 的等角线，所以 $x \perp YZ$. 同理 $y \perp ZX$，$z \perp XY$. 令三垂足分别为 L、M、N，则有 $LY^2 - LZ^2 = YA^2 - ZA^2$，$MZ^2 - MX^2 = ZB^2 - XB^2$，$NX^2 - NY^2 = XC^2 - YC^2$.

将上述三式相加，得

$$LY^2 - LZ^2 + MZ^2 - MX^2 + NX^2 - NY^2$$
$$= YA^2 - ZA^2 + ZB^2 - XB^2 + XC^2 - YC^2.$$

易知上式等号右端等于 0，故

$$LY^2 - LZ^2 + MZ^2 - MX^2 + NX^2 - NY^2 = 0. \quad (*)$$

如果 X、Y、Z 共线，那么 $x /\!/ y /\!/ z$.

如果 X、Y、Z 不共线，不妨设 y、z 相交于 Q 点，连结 QX、QY、QZ，那么

$$MZ^2 - MX^2 = QZ^2 - QX^2,$$
$$NX^2 - NY^2 = QX^2 - QY^2.$$

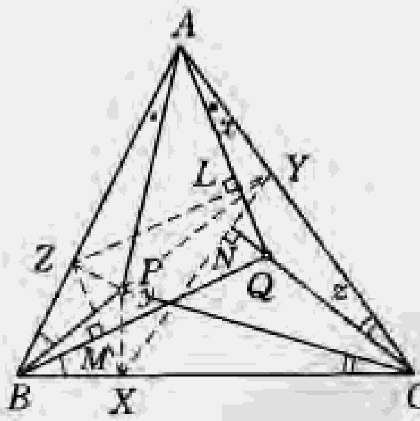


图 4-34

将这两式代入(*)式，得

$$QZ^2 - QY^2 = LZ^2 - LY^2,$$

这表明 QL 垂直于 ZY，因此，QL 应与 x 重合，即 x 经过 Q 点，所以 x、y、z 三线交于 Q 点.

当应用共点线的施泰纳定理时，则由 X、Y、Z 不共线和(*)

就可直接推出 x、y、z 三线交于一点.

参考文献 [14,pp.175～176],[18,p.200].

（涂荣豹）

等截共轭点（Isotomic conjugate points） 如果△ABC 中，XX'、YY'、ZZ' 各是在 BC、CA、AB 三边上截得的线段，使得 $BX=X'C$，$CY'=AY$，$AZ'=BZ$，且 AX、BY、CZ 三线交于一点 P，那么 AX'、BY'、CZ' 也相交于一点 Q. 上述 P、Q 两点称为△ABC 的等截共轭点.

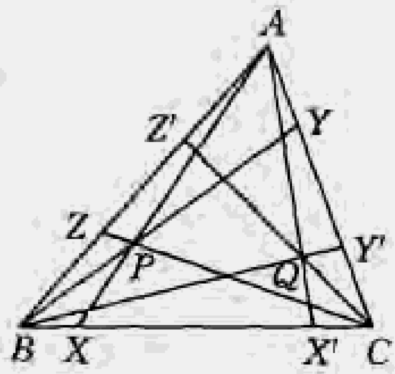


图 4-35

因为 AX、BY、CZ 交于一点 P，由塞瓦定理有 $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$. 再由 $BX=X'C$，$YA=CY'$，$ZB=AZ'$，得 $XC=BX'$，$CY=Y'A$，$AZ=Z'B$. 于是有 $\frac{BX'}{X'C}\cdot\frac{CY'}{Y'A}\cdot\frac{AZ'}{Z'B}=1$. 再由塞瓦定理可知 AX'、BY'、CZ' 三线交于一点 Q.

三角形葛尔刚点的等截共轭点称为 Nagel 点，这是 Nagel 于 1836 年发现的.

参考文献 [18,pp.201～202].

（涂荣豹）

Lemoine 点（Lemoine point） 三角形重心 G 的等角共轭点，称为三角形的 Lemione 点，又称为三角形的陪位重心，顶点与陪位重心的连线称为陪位中线.

该点是 E. Lemoine(1840～1912)于 1873 年在法兰西科学促进协会上宣读的一篇论文中提出的，从而引起三角形几何学的现代研究.

△ABC 的三条中线 AD、BE、CF 的等角线 AD'、BE'、CF' 交于一点 K，也可以利用塞瓦定理来证. 因为 AD、BE、CF 交于一点

G,所以 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,于是就有 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}\cdot\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BEA}}\cdot\frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle CFB}}=1$,

即
$$\frac{c\sin\angle BAD}{b\sin\angle DAC}\cdot\frac{a\sin\angle CBE}{c\sin\angle EBA}\cdot\frac{b\sin\angle ACF}{a\sin\angle FCB}=1.$$

但因 $\angle BAD=\angle D'AC$,$\angle DAC=\angle BAD'$ 等,从而得

$$\frac{c\sin\angle BAD'}{b\sin\angle D'AC}\cdot\frac{a\sin\angle CBE'}{c\sin\angle E'BA}\cdot\frac{b\sin\angle ACF'}{a\sin\angle F'CB}=1,$$

$$\therefore \frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1.$$

因此 AD'、BE'、CF' 交于一点 K,K 即为 Lemoine 点,AD'、BE'、CF' 就是陪位中线.

陪位中线与逆平行线有如下性质:

在$\triangle ABC$中,以 BC 为弦作一圆,与 AB、AC 交于点 C'、B',则 $\angle AB'C'=\angle B$,就称 $B'C'$ 为 BC 的逆平行线.在一个三角形中,(1) 同边的逆平行线平行;(2) 某边的逆平行线被这边陪位中线平分;(3) 过顶点平分其对边逆平行线的直线是陪位中线;(4) 被陪位中线平分的线段必为逆平行线.

(1) 结论是明显的.

(2) 设 M 是 BC 中点,$B'C'$ 与 BC 陪位中线交于点 M'(图略),由$\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$及 $\angle BAM=\angle B'AM'$,可得 $\frac{B'M'}{M'C'}=\frac{BM}{CM}=1$,即 M' 是 $B'C'$ 的中点,AM' 平分 $B'C'$.

(3) 若 AM' 平分 $B'C'$,则有$\triangle AB'M'\backsim\triangle ABM$,$\angle B'AM=\angle BAM$,即 AM' 是 BC 的陪位中线.

(4) 设 BC 的陪位中线平分线段 $B'C'$ 于点 M'.若 $B'C'$ 不是 BC 的逆平行线,则过 B、C、B' 作一圆交 AB 于点 C'',$B'C''$是 BC 的逆平行线,由(2)知 $B'C''$被 AM' 平分,设中点为 M'',则 $M'M''$是$\triangle B'C'C''$的中位线,得 $M'M''/\!/AB$,但 AM' 与 AB 相交于点 A,矛

盾．所以 $B'C'$ 是 BC 的逆平行线．

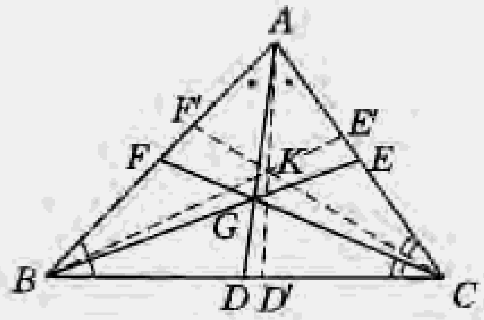


图 4－36

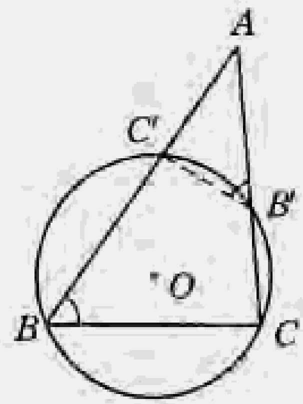


图 4－37

参考文献　[18, pp. 200～201].

（涂荣豹）

（二）多边形

勾股容方　今有句（勾）五步，股十二步．问句中容方几何？

本题是《九章算术》卷九"勾股"的第 15 题．

已知直角三角形的直角边长，求其内接正方形（有两边在直角边上，另两边交点在斜边上）的边长．

本题应用相似直角三角形的性质解得内接正方形的边长 $= \dfrac{5 \times 12}{5+12} = 3\dfrac{9}{17}$（步）．

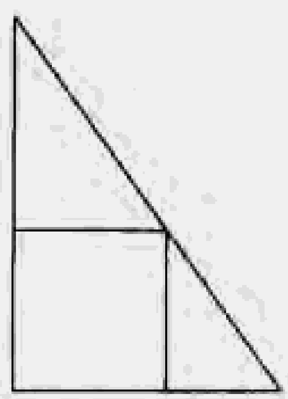


图 4－38

参考文献　[1, p. 251].

（眭秋生）

邑方大小　今有邑方不知大小，各开中门．出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木．问邑方几何？

本题是《九章算术》卷九"勾股"的第 20 题，题意是求正方形城

池的大小.

如图 4-39 所示,

$\because \mathrm{Rt}\triangle AED \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{DE}{CB}=\dfrac{AE}{AB}$,

即 $\dfrac{\frac{1}{2}x}{1\,775}=\dfrac{20}{20+x+14}$,

得 $x^2+34x=71\,000$,

解得 $x=250$(步).

参考文献 [1,p.255].

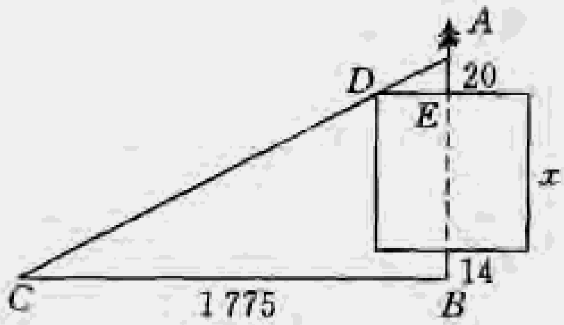


图 4-39

(眭秋生)

四边形的欧拉定理(Euler theorem of the quadrilateral) 任意四边形的四边平方和等于对角线的平方和再加上两对角线中点连线的平方的四倍,即

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4m^2,$$

其中 m 是两对角线中点连线的长度.

本题是欧拉于 1750 年提出的.

设 M、N 分别是四边形 $ABCD$ 的对角线 BD、AC 之中点,连结 AM、CM.

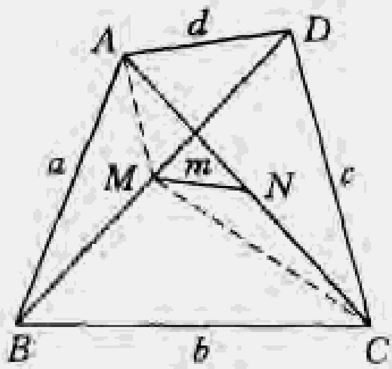


图 4-40

由于 AM 是 $\triangle ABD$ 的中线,CM 是 $\triangle BCD$ 的中线,

$$\therefore AB^2+AD^2=\frac{1}{2}(BD^2+4AM^2), \qquad ①$$

$$BC^2+CD^2=\frac{1}{2}(BD^2+4CM^2). \qquad ②$$

又由于 MN 是 $\triangle MAC$ 的中线,

$$\therefore 2(AM^2+CM^2)=AC^2+4MN^2. \qquad ③$$

由①、②、③易得

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2.$$

特例　若四边形的对角线互相平分，$|MN|=0$，则 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$. 即，平行四边形的四边平方和等于对角线的平方和.

参考文献　[32,p.26],[38,p.222]

（张文华）

四边形的葛尔刚定理（Gergonne theorem of the quadrilateral）　设点 L、M、N、K 分别是四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 的中点，P、Q 分别是对角线 AC、BD 的中点，则三线段 LN、MK、PQ 相交于一点，且都被该交点所平分.

该定理于 1810～1811 年间被法国数学家葛尔刚所发现.

如图 4-41，∵ $LM/\!/AC$，$KN/\!/AC$，

∴ $LM/\!/KN$.

同理　$LK/\!/MN$.

∴ $LMNK$ 是平行四边形，其对角线 LN 和 MK 互相平分于点 O.

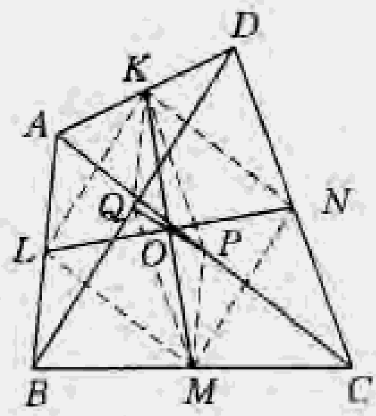


图 4-41

又∵ $QM/\!/DC$，$KP/\!/DC$，

∴ $QM/\!/KP$.

同理 $QK/\!/MP$.

∴ 四边形 $KQMP$ 是平行四边形，其对角线 PQ 和 MK 互相平分于 MK 之中点 O.

∴ LN、MK、PQ 交于一点，且都被该交点所平分.

推广　对于空间四边形，上述结论也是成立的.

参考文献　[38,pp.221～222].

（张文华）

Bretschneide 公式（Bretschneide formula）　若简单四边形的四

边长为 a、b、c、d，两对角线长为 e、f，则该四边形的面积

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}.$$

此公式由 Bretschneide(1808～1878)于 1842 年提出，它是秦九韶的三斜求积公式的推广. 若在上述公式中令 $d=0$，$e=c$，$f=a$，则得到三角形面积公式

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2}.$$

如图 4-42，简单四边形 $ABCD$ 中，记 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$AC=e$，$BD=f$. 作 $CF\perp BD$ 于 F，$AE\perp BD$ 于 E，作 $CP\parallel BD$ 交 AE 或其延长线于 P，则

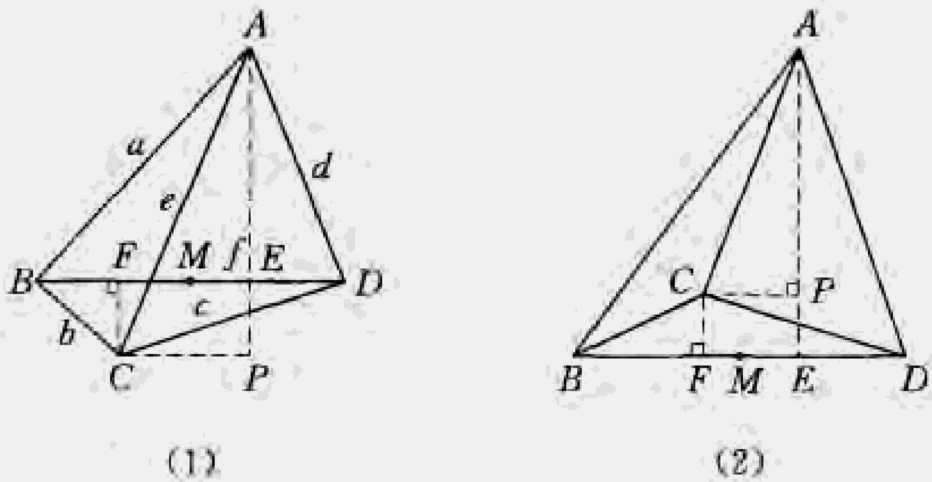


图 4-42

$$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}\pm S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD(AE\pm CF)$$

$$=\frac{1}{2}BD\cdot AP=\frac{1}{2}f\cdot AP. \quad ①$$

设 M 是 BD 的中点，则

$$a^2-d^2=AB^2-AD^2=\overline{BE}^2-\overline{DE}^2$$
$$=(\overline{BE}+\overline{ED})(\overline{BE}-\overline{ED})$$
$$=\overline{BD}(\overline{BM}+\overline{ME}-\overline{EM}-\overline{MD})$$

$$=\overline{BD}\cdot 2\,\overline{ME},$$

即　$a^2-d^2=2\,\overline{BD}\cdot\overline{ME}.$　　②

$$b^2-c^2=BC^2-CD^2=\overline{BF}^2-\overline{FD}^2$$
$$=(\overline{BF}+\overline{FD})(\overline{BF}-\overline{FD})$$
$$=\overline{BD}(\overline{BM}+\overline{MF}-\overline{FM}-\overline{FD})$$
$$=2\,\overline{BD}\cdot\overline{MF}.$$

即　$b^2-c^2=2\,\overline{BD}\cdot\overline{MF}.$　　③

②－③得

$$a^2-b^2+c^2-d^2=2\,\overline{BD}(\overline{ME}-\overline{MF})=2\,\overline{BD}\cdot\overline{FE}.$$

即　$a^2-b^2+c^2-d^2=2\,\overline{BD}\cdot\overline{FE}.$　　④

$$\therefore 4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4e^2f^2-4(\overline{BD}\cdot\overline{FE})^2$$
$$=4f^2(e^2-\overline{FE}^2).$$

$\because$　$e^2-FE^2=AP^2,$

$\therefore 4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4f^2\cdot AP^2.$　　⑤

比较①与⑤式，知

$$16S^2=4f^2\cdot AP^2=4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2.$$

$$\therefore S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}.$$

参考文献　[12，p. 146].

（张文华）

梯形的施泰纳定理（Steiner theorem of the trapzoid）　梯形的两对角线的交点与两腰延长线的交点的连线必平分梯形的上、下底.

此定理由瑞士数学家施泰纳首先提出.

梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，AC、BD 交于点 E，BC、AD 的延长线交于点 F，EF 分别交 AB、CD 于点 N、M.

由于 AC、BD、FN 交于一点，根据塞瓦定理，得

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=1.$$

又$\because DC \parallel AB$，$\therefore \dfrac{FD}{DA}=\dfrac{FC}{BC}$.

$\therefore \dfrac{AN}{NB}=1$，即 $AN=NB$.

又 $\because \dfrac{DM}{AN}=\dfrac{MC}{NB}$，

$\therefore DM=MC$.

参考文献 [32，pp. 219～220].

（张文华）

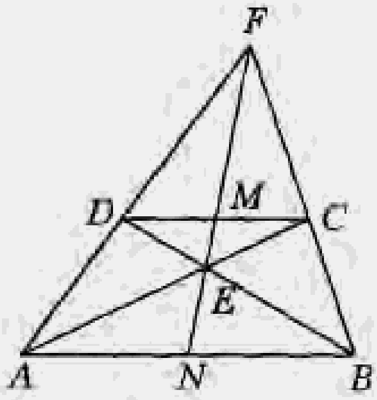


图 4-43

完全四边形的牛顿线（**Newton's line of the complete quadrilateral**） 完全四边形的三条对角线的中点共线. 此线称为牛顿线.

此定理是牛顿于1685年发现的. 1810年，高斯也独立地发现并证明了此定理.

此定理的证法甚多，在岩田至康编的《几何学大辞典》中，就列举了6种方法. 下面只介绍一种基于梅内劳斯定理的证法.

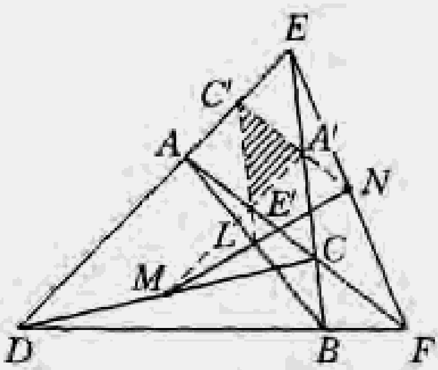


图 4-44

如图 4-44，完全四边形 $ABCDEF$ 中，L、M、N 分别是对角线 AB、CD、EF 的中点，我们来证明 L、M、N 三点必在同一条直线上.

设 A'、C'、E' 分别是$\triangle ACE$ 的三边 CE、EA、AC 的中点，则 $C'A' \parallel AC$，$C'A'$ 的延长线必过 EF 的中点 N；$C'E' \parallel EC$，$C'E'$的延长线必过 AB 的中点 L；$A'E' \parallel EA$，$A'E'$的延长线必过 CD 的中点 M.

由于直线 DF 截$\triangle ACE$ 的三边延长线于 D、B、F，根据梅内劳斯定理，有

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{BE}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{DA}}=-1. \qquad ①$$

$\because C'N \parallel AF, C'L \parallel EB, A'M \parallel ED,$

$$\therefore \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{C'N}}{\overline{NA'}}, \qquad ②$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{E'L}}{\overline{LC'}}, \qquad ③$$

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{A'M}}{\overline{ME'}}. \qquad ④$$

将②、③、④代入①，得

$$\frac{\overline{C'N}}{\overline{NA'}} \cdot \frac{\overline{A'M}}{\overline{ME'}} \cdot \frac{\overline{E'L}}{\overline{LC'}} = -1. \qquad ⑤$$

由于 L、M、N 分别在$\triangle A'C'E'$的三边延长线上，且满足⑤式，故 L、M、N 在同一直线上.

参考文献 [38,pp. 231～232].

（张文华）

内对角线的数目(The number of inner diagonals) 简单 n 边形至少有 $n-3$ 条对角线位于其内部.

本题选自 1970 年《美国数学月刊》问题 E2 214(p. 1 111)，题目是由 Murray Klamkin 和 B. Ross Taylor 提出的.

本命题可用数学归纳法证明.

(1) $n=4$ 时，结论显然成立.

(2) 设$n \leqslant k$ 时结论成立. 今考察 $k+1$ 边形. 因为任何简单多边形至少有一条对角线位于其内部，设 d 是位于 $k+1$ 边形(记为 π)内部的一条对角线，d 把 π 分成两个简单多边形，设一个是 r_1 边形 π_1，一个是 r_2 边形 π_2，$r_1 \leqslant k$，$r_2 \leqslant k$，$r_1+r_2=k+3$. 由于 $r_1 \leqslant k$，根据归纳假设，π_1 至少有 r_1-3 条内对角线. 同理，π_2 至少有 r_2-3 条内对角线. 又 d 是 π 的一条内对角线，因此对于 $k+1$ 边形 π 而言，至少有 $(r_1-3)+(r_2-3)+1=r_1+r_2-5$ 条内对角线. 由于 $r_1+r_2=k+3$，$r_1+r_2-5=k-$

$2=(k+1)-3$，即 $(k+1)$ 边形 π 至少有 $(k+1)-3$ 条内对角线.

由(1)、(2)知，对于任意简单 n 边形，至少有 $n-3$ 条内对角线.

顺便指出，对于每一个自然数 $n(n\geqslant 3)$，都有一个简单 n 边形，其内对角线的条数恰好是 $n-3$.

参考文献 [37，pp. 128～129].

（张文华）

Doaglas-Newmann 定理(**Doaglas-Newmann theorem**) 对于任意 n 边形 $\pi_0(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，以 π_0 的每一边为底在指定一侧各作一个顶角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的等腰三角形，然后顺次连结各等腰三角形的顶点，得到一个新的 n 边形 π_1；接着以 π_1 为基础，以 π_1 的每边为底在指定的一侧各作一个顶角为 $\frac{4\pi}{n}$ 的等腰三角形，然后顺次连结各等腰三角形的顶点，又得到一个新的 n 边形 π_2；……如此连续进行 $n-2$ 次，每次以新得到的 n 边形为基础，各边上的等腰三角形的顶角大小依次为 $\frac{2\pi}{n}$，$\frac{4\pi}{n}$，…，$\frac{2(n-2)\pi}{n}$（若 $\frac{2p\pi}{n}>\pi$，则应在另一侧作顶角为 $2\pi-\frac{2p\pi}{n}=\frac{2(n-p)\pi}{n}$ 的等腰三角形，若 $\frac{2p\pi}{n}=\pi$，则只需取该边的中点)，这样得到的新 n 边形 π_{n-2} 一定是一个正 n 边形.

应该说明，这里说的多边形是广义的. 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是复数平面上的 n 个点，其中有些点可以重合或共线，从 z_1 连一线段到 z_2，从 z_2 连一线段到 z_3，…，最后从 z_n 连一线段到 z_1，这样得到的图形称为一个 n 边形，记作 $(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，矢量 $\overrightarrow{z_1z_2}$，$\overrightarrow{z_2z_3}$，…，$\overrightarrow{z_nz_1}$ 叫做它的边. 这种多边形是定向的. 若 n 边形 $(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 满足条件 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=\cdots=|z_n-z_1|$ 及 $\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}\right)=$

$\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_4-z_3}\right)=\cdots=\arg\left(\frac{z_1-z_n}{z_2-z_1}\right)$，则称之为正 n 边形(可能是星形).

下面用复数计算的方法来证明.

(1) 以复点 $0,1,c_1=\frac{1}{1-\omega}$(其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$) 为顶点作一个等腰三角形$\triangle 01c_1$，该三角形的底边长为 1，顶角

$$\angle 0c_1 1=\varphi=\arg\left(\frac{1-\frac{1}{1-\omega}}{0-\frac{1}{1-\omega}}\right)=\arg\omega=\frac{2\pi}{n}.$$

在 π_0 的每一条边上，都作一个同$\triangle 01c_1$ 直接相似的三角形(这相当于在各边上作顶角为$\frac{2\pi}{n}$的等腰三角形)，例如，在边$\overrightarrow{z_1z_2}$上，作$\triangle z_1z_2z_{12}\backsim\triangle 01c_1$，由相似的条件，得

$$\frac{z_{12}-z_1}{z_2-z_1}=\frac{c_1-0}{1-0}=c_1.$$

故 $$z_{12}=(1-c_1)z_1+c_1z_2=\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_1+z_2).$$

新顶点 z_{12}称为自由顶点.

在每一条边上都作一个与$\triangle 10c_1$ 直接相似的三角形，这样得到 n 个自由顶点：

$$z_{12}=\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_1+z_2);$$

$$z_{23}=\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_2+z_3);$$

$$\cdots\cdots$$

$$z_{n-1,n}=\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_{n-1}+z_n);$$

$$z_{n,1}=\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_n+z_1).$$

于是我们得到了一个新 n 边形 $\pi_1(z_{12},z_{23},\cdots,z_{n1})$.

(2) 对于多边形 $\pi_1=(z_{12},z_{23},\cdots,z_{n1})$，与上述方法类同，先给出$\triangle 01c_2$，其中 $c_2=\dfrac{1}{1-\omega^2}$，$\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$（它是顶角为$\dfrac{4\pi}{n}$，底边长为1的等腰三角形），再在 π_1 的各边上作与它直接相似的等腰三角形，以构成一个新的多边形 $\pi_2=(z_{123},z_{234},\cdots,z_{n12})$，其中 z_{123}是边$\overrightarrow{z_{12}z_{23}}$所对应的自由顶点，则

$$\begin{aligned}
z_{123}&=(1-c_2)z_{12}+c_2z_{23}\\
&=\frac{-\omega^2}{1-\omega^2}\cdot z_{12}+\frac{1}{1-\omega^2}z_{23}\\
&=\frac{-\omega^2}{1-\omega^2}\cdot\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_1+z_2)+\frac{1}{1-\omega^2}\cdot\\
&\quad\frac{1}{1-\omega}(-\omega z_2+z_3)\\
&=\frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)}[\omega\cdot\omega^2z_1-(\omega+\omega^2)z_2+z_3].
\end{aligned}$$

类似地，

$$z_{234}=\frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)}[\omega\cdot\omega^2z_2-(\omega+\omega^2)z_3+z_4].$$

显然，方括号中各项的系数依次是 $(t-\omega)(t-\omega^2)$ 的展开式中 t^0,t^1,t^2 的系数. 例如，

$$z_{345}=\frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)}[\omega^3z_3-(\omega+\omega^2)z_4+z_5].$$

(3) 在进行第3次处理时，先给出$\triangle 01c_3$，其中 $c_3=\dfrac{1}{1-\omega^3}$，$\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$. 用 z_{1234}记边$\overrightarrow{z_{123}z_{234}}$所对应的自由顶点，则

$$\begin{aligned}
z_{1234}&=(1-c_3)z_{123}+c_3z_{234}\\
&=\frac{-\omega^3}{1-\omega^3}z_{123}+\frac{1}{1-\omega^3}z_{234}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\omega^3}{1-\omega^3} \cdot \frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)}\left[\omega^3 z_1 - (\omega + \omega^2) z_2 + z_3\right] + \frac{1}{1-\omega^3} \cdot \frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)}\left[\omega^3 z_2 - (\omega + \omega^2) z_3 + z_4\right]$$

$$= \frac{1}{(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)}\left[-\omega^6 z_1 + (\omega^3 + \omega^4 + \omega^5) z_2 - (\omega^3 + \omega^2 + \omega) z_3 + z_4\right].$$

方括号中 z_1, z_2, z_3, z_4 的系数依次是

$$(t-\omega)(t-\omega^2)(t-\omega^3)$$

的展开式中 t^0, t^1, t^2, t^3 的系数.

(4) 由上推知,经过 m 次处理(第 m 次取$\triangle 01 c_m$,其中 $c_m = \frac{1}{1-\omega^m}$) 后,自由顶点 $z_{123\cdots(m+1)}$ 可表为

$$z_{123\cdots(m+1)} = \frac{d_0 z_1 + d_1 z_2 + \cdots + d_m z_{m+1}}{(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^m)},$$

其中系数 $d_0, d_1, \cdots, d_m$ 依次是 $(t-\omega)(t-\omega^2)\cdots(t-\omega^m)$ 的展开式中 $t^0, t^1, \cdots, t^m$ 的系数.

(5) 当 $m = n-1$ 时,$d_0, d_1, \cdots, d_{n-1}$ 则依次是

$$(t-\omega)(t-\omega^2)\cdots(t-\omega^{n-1})$$

的展开式中 $t^0, t^1, t^2, \cdots, t^{n-1}$ 的系数.

由于 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ 是 $t^n - 1 = 0$ 的 n 个根,且

$$t^n - 1 = (t-1)(t-\omega)(t-\omega^2)\cdots(t-\omega^{n-1}),$$

故

$$(t-\omega)(t-\omega^2)\cdots(t-\omega^{n-1}) = \frac{t^{n-1}}{t-1}$$

$$= 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}.$$

所以 $d_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_{n-1} = 1$,

$$z_{123\cdots n} = \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})}.$$

又由于

$$\begin{aligned}&(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\\=&(t-\omega)(t-\omega^2)\cdots(t-\omega^{n-1})\Big|_{t=1}\\=&(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})\Big|_{t=1}=n.\end{aligned}$$

故 $$z_{1234\cdots n}=\frac{1}{n}(z_1+z_2+\cdots+z_n).$$

由轮换对称性可得

$$\begin{aligned}z_{23\cdots n1}=\cdots=z_{n12\cdots(n-1)}&=z_{123\cdots n}\\&=\frac{1}{n}(z_1+z_2+\cdots+z_n).\end{aligned}$$

即 n 个自由顶点均重合于原 n 边形 π_0 的重心.

(6) 在上述过程中,如果我们少作一次,即只作到 π_{n-2} 为止,则 π_{n-2} 就是一个正 n 边形.

(7) 特别地,当 $n=3$ 或 4 时,有如下结论:

① 在任意三角形的各边上向外(或都向内)作正三角形,这些正三角形的中心构成一个正三角形;

② 对于任意四边形,先在各边上向形外(或形内)作等腰直角三角形,顺次连结四个直角顶点得一对角线垂直且相等的四边形,再取这个新四边形的各边中点并顺次用线段连结,即得一个正方形.

(张 文 华)

(三) 圆

圆材埋壁 今有圆材,埋在壁中,不知大小.以锯锯之,深一寸,锯道长一尺.问径几何?

本题是《九章算术》卷九"勾股"的第 9 题.

如图 4-45,已知 $AC=1$ 寸,$BC=5$ 寸.在 Rt$\triangle OCB$ 中

$OB^2-OC^2=BC^2$,

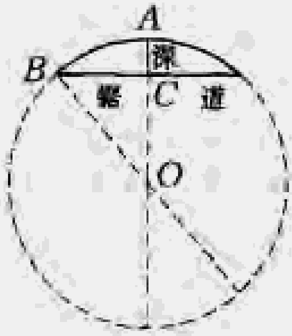


图 4-45

即 $(OB+OC)(OB-OC)=BC^2$,

有 $OB+OC=\dfrac{BC^2}{OB-OC}$. （*）

其中 $BC^2=5^2=25, OB-OC=OA-OC=AC=1$.

故 $OB+OC=25$.

而圆材直径为 $2\cdot OB=OB+OA=OB+OC+CA=25+1=26$(寸).

这题的解法"术"在《九章算术》中的叙述是很简洁的:"半锯道自乘,如深而一,以深寸增之,即材径."其中(*)式是关键.

参考文献 [1,p.245].

（睦秋生）

勾股容圆 今有句(勾)八步,股十五步.问句中容圆,径几何?

本题是《九章算术》卷九"勾股"的第16题.

本题是已知直角三角形的直角边长,求其内切圆直径,是我国古算题中著名的"勾股容圆"问题,由《九章算术》开始,后来发展为各种位置的圆与直角三角形各边相切的问题,求直角三角形的边长与相关切圆直径的关系.其中以李冶的《测圆海镜》最为著名.书中不仅详尽地研究各种位置的圆与直角三角形的边相切的关系,给出有关线段的计算公式,也发展了我国的古代代数方程——"天元术"的知识.

本题若分别设勾、股、弦及内切圆直径为 a、b、c 及 d,则有公式

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}.$$

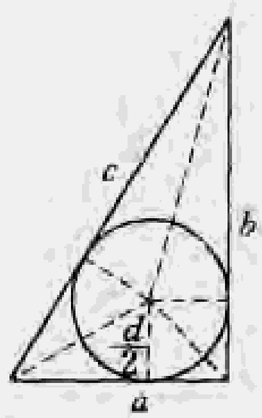


图 4-46

刘徽是用面积割补的方法来证明该公式的(如图 4-46):连结内切圆心与各顶点、各边切点,剖分直角三角

形. 然后拼补成长为 $\frac{1}{2}(a+b+c)$，宽为$\frac{d}{2}$的矩形(如图 4-47).
从而推导出上述公式. 本题内切圆直径为 6 步.

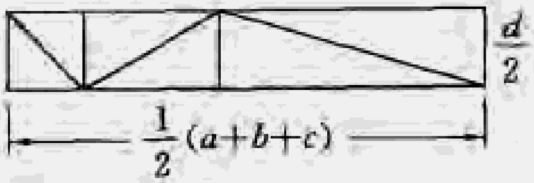


图 4-47

参考文献 [1,p.252].

(睦秋生)

弦外容圆 假令圆城一所，不知周径，四面开门，门外纵横各有十字大道，……其东南十字道头定为巽地，……或问：甲乙二人同立于巽地，乙西行四十八步而止，甲北行九十步，望乙与城参相直. 城径几何?

本题是《测圆海镜》第二卷的第 8 题. "弦外容圆"指在勾股形(直角三角形)外与弦(斜边)相切的旁切圆. 题设条件如图 4-48 所示，$CB=48$ 步，$CA=90$ 步，AB 正好与圆城相切于 D 点，求圆城的直径.

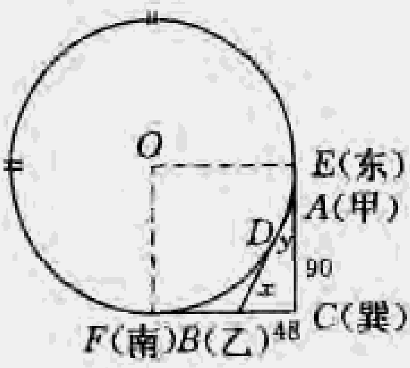


图 4-48

根据题意，四边形 $OFCE$ 是正方形，$EC=FC=OF=r$ (圆城半径). 设 $DA=y, DB=x$.

$\because AE=AD=y, BF=BD=x$,

$\therefore CE=CA+AE=90+y$,

$CF=CB+BF=48+x$,

故有 $90+y=48+x$,

$$x-y=42. \qquad ①$$

而 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=102$,

即 $x+y=102$, ②

由①和②可得 $x=72$(步).

于是 $r=CF=48+72=120$(步).

所以,圆城直径 $d=240$(步).

我国古代擅长通过计算来研究图形的度量性质.《测圆海镜》就是系统地研究勾股形与其相关圆关系的.

参考文献 [4,p.167].

(睦秋生)

圆田方池 今有圆田一段,内有方池.水占之外,计地五千(平方)步.只云从外田楞至内池角四边各一十五步,问方圆各多少?

本题是李冶所著《益古演段》中的一题.

我国古代认为"圆出于方",常用内接、外切或相关的正方形来表示或计算圆的直径、周长或面积.

本题(如图 4-49)若设方池边长为 x,取 $\sqrt{2}\approx1.4$,$\pi\approx3$,则可解方程 $\frac{3}{4}(1.4x+2\times15)^2-x^2=5\,000$. 从而解得方池边长约为 50 步,圆田直径约为 100 步.

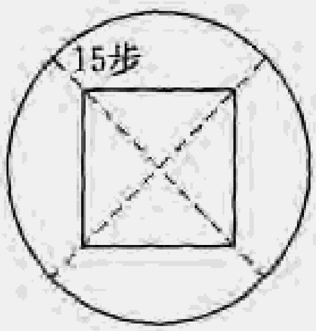


图 4-49

参考文献 [7,p.39].

(睦秋生)

割圆求积 有圆田,周一百八十一步,径六十步三分步之一.问为田几何?

本题是《九章算术》卷一"方田"的第 32 题.

已知圆形田的周长是 181 步,直径是 $60\frac{1}{3}$ 步,求其面积.

根据公式"半周乘半径",本题很容易求得圆田面积为 11 亩

$90\frac{1}{12}$ 步^2(1 亩 = 240 步^2).

可是我国古代在有关圆的实际计算中经常用"周三径一"取圆周率 $\pi \approx 3$，因而误差很大.

公元 3 世纪数学家刘徽在给《九章算术》作注时，在本题的注解里指出，圆的内接正六边形的周长是圆直径的 3 倍，圆的周长肯定不止其直径的 3 倍，并提出用圆内接正多边形的边数倍增(割圆)的方法来接近圆. 当边数无限增加时，就可以将正多边形的面积看成是圆面积了："割之弥细，所失弥少，割之又割以致不可割，则与圆合体，而无所失矣！"从而求得圆面积，计算出圆周率. 用现代方式表示他的具体方法如下.

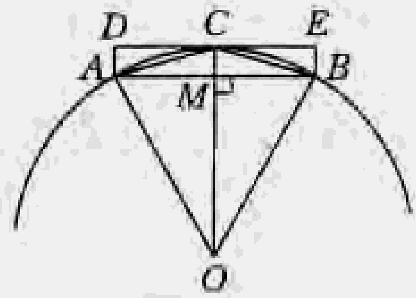


图 4－50

如图 4－50，从圆内接正六边形出发，不断进行倍边作图. 设 AB 为圆 O 的内接正 $3\cdot 2^n$ 边形的一边(记为 a_n). 作 $OM\perp AB$ 并延长交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 C 点，显然 M 平分 AB，C 平分 $\overset{\frown}{AB}$. 过 C 作圆 O 的切线，并自 A、B 向该切线作垂线，D、E 为垂足. 刘徽与众不同地不用圆的外切正多边形，而是用诸如图中的 $ABED$ 这样的矩形来进行推证：

设 S_n、S_{2n}、S 分别是圆的内接正 $3\cdot 2^n$ 边形、$3\cdot 2^{n+1}$ 边形以及圆的面积.

∵ $S_{2n} < S < S_n + nS_{ABED}$,

而 $S_{2n} - S_n = nS_{\triangle ABC} = \frac{n}{2}S_{ABED}$,

∴ $S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n)$,

即 $S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$.

当 n 充分大时，$S_{2n} - S_n$ 是足够小的，圆面积 S 与 S_{2n} 就几乎"无所失"了.

他还用勾股定理求出了圆内接正多边形的倍边公式

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

这样，刘徽在半径 $R=1$ 尺的圆里，计算出圆的内接正196边形的面积 $S=314$ 平方寸.

从这里也可求出圆周率 $\pi\approx 3.14$.

刘徽的这个方法就是著名的"割圆术". 他不仅提供了求圆周率的方法，更重要的是提出了严密的极限思想和方法. 这在求弓形面积和证明锥体的体积公式方面都有表述和应用. 他的数学思想方法还影响了后来的数学家祖冲之父子.

参考文献 [1,p.104],[8,p.66].

（眭秋生）

割圆术 见割圆求积.

祖冲之的密率 $\pi=\dfrac{355}{113}$.

祖冲之(429～500)是我国南北朝时代的伟大数学家. 他从半径为1丈的圆中计算出圆周率精确到小数点后7位的近似值:

$$3.141\,592\,6<\pi<3.141\,592\,7,$$

这个精确值在世界上曾保持了1 000年的领先记录!

为了便于计算，祖冲之还对圆周率给出两个分数值 $\dfrac{355}{113}$ 和 $\dfrac{22}{7}$，分别称之为"密率"和"约率". 公元前3世纪阿基米德就已发现约率 $\dfrac{22}{7}$. 但是，"密率"却是祖冲之首创的，为了纪念他的杰出成就，"密率"又称为"祖率".

参考文献 [8,p.86].

（眭秋生）

祖率 见祖冲之的密率.

会圆术 假令有圆田，径十步，欲割二步，问所割之弧长几何？

本题是沈括的《梦溪笔谈》第18卷的第四条.

从直径是10步的圆形田中，分割出一个矢高为2步的弓形田块来，问这个弓形田块的弧长应该是多少？

北宋大科学家沈括是我国数学史上第一个给出由弦长和矢长来求弧长近似公式的数学家.这个近似公式就是沈括的“会圆术”.

设圆的直径为d，半径为r，弦长为C，矢(高)长为h，弧长为S.

则
$$C=2\sqrt{r^2-(r-h)^2},$$
$$S\approx C+\frac{2h^2}{d}.$$

当圆心角不超过45°时，其相对误差小于0.02.

本题用“会圆术”解得弧长为8.8步.

参考文献 [2,p.140],[8,p.210].

(睢秋生)

月形定理(Lunar thorem) 以直角三角形的直角边为直径向外作半圆和以斜边为直径向内作半圆之间的两个月形面积之和等于直角三角形的面积.

这个定理是古希腊数学家Hippocrates提出并证明的.尽管此定理的证明十分简单，在数学上也没什么重要地位，但在数学史上因其曾在古希腊数学家探求三大作图难题的过程中起过作用，而作为数学佳话流传至今.定理的意义在于提出了曲边图形(月形)的面积可以用直边图形(直角三角形)的面积表示这一事实，且对“化圆为方”问题的讨论，在一定程度上要归咎于Hippocrates的这一定理.

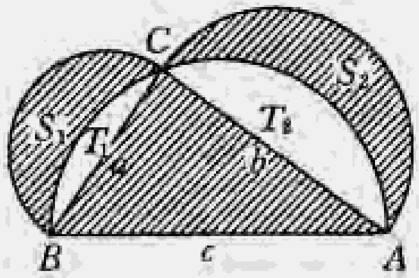


图4-51

设给定的直角三角形ABC中，a、b

为直角边，c 为斜边，以 a、b、c 为直径分别作半圆，得到两月形的面积分别为 S_1 和 S_2，则

$$S_1+S_2=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2+S_{\triangle ABC}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$=S_{\triangle ABC}+\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2),$$

根据勾股定理知 $a^2+b^2-c^2=0$，所以

$$S_1+S_2=S_{\triangle ABC}.$$

参考文献 [19,pp.167～168].

（涂荣豹）

鞋匠皮刀形（Shoemaker's knife） 设 C 为半圆直径 AB 上的一点，并设 $AB=2r$，$AC=2r_1$，$CB=2r_2$. 在形内分别以 AC、BC 为直径作两个半圆，再作 $CQ\perp AB$，交半圆 AB 于 P. 设 TW 为半圆 AC 和 CB 的公切线，且与 CP 交于 S，则（1）皮刀形 $ATCWBP$ 的面积（记为 S_1）等于以 CP 为直径的圆面积（记为 S_2）；（2）CP 与 TW 相等，且互相平分于 S，即 C、T、P、W 四点共圆，它的圆心为 S；（3）三点 A、T、P 共线，B、W、P 也共线；（4）外切于半圆 AC（或半圆 CB）和内切于半圆 AB 以及 CP 的两个圆必相等.

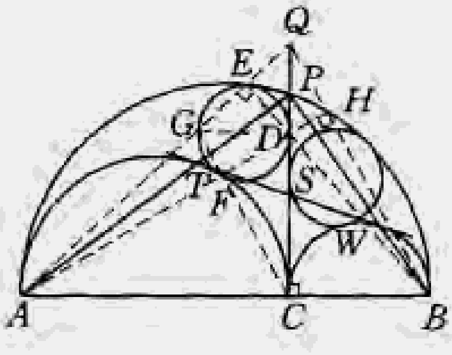


图 4－52

该图形出现于阿基米德所著的《引理集》（也可能是后人收集整理阿基米德研究过的一些初等几何问题而成），它具有许多奇妙的性质，曾为许多人研究过，如 Mackay，Simon 等.

（1）$S_1=\frac{1}{2}\pi r^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2-\frac{1}{2}\pi r_2^2$

$$= \frac{1}{2}\pi[(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2] = \frac{1}{4}\pi(2r_1 \cdot 2r_2)$$
$$= \frac{1}{4}\pi CP^2 = \pi \cdot \left(\frac{CP}{2}\right)^2 = S_2.$$

(2) 因为$CP^2 = 4r_1r_2, TW^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$，所以$CP = TW$. 又$SW = SC, SC = ST$，所以$SC = SP$，故$C$、$T$、$P$、$W$四点共圆，它的圆心为$S$.

(3) 由于T在以CP为直径的圆上，可见$\angle PTC = 90°$. 又$\angle ATC = 90°$，所以A、T、P三点共线. 同理B、W、P三点也共线.

(4) 设外切半圆AC于F、内切半圆AB于E，以及切CP于D的圆的直径为DG，则由E、F各为相似中心，可知AG与BD必相交于E，CG与AD必相交于F，延长AE和CP，设它们相交于Q，则D为$\triangle AQB$的垂心，所以$AD \perp BQ$，从而知$CF /\!/ BQ$，因此$\frac{DG}{AC} = \frac{QG}{QA} = \frac{BC}{AB}$，即$DG = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{2r_1r_2}{r}$.

同理可得：与半圆AB内切、半圆BC外切，以及与CP相切的圆的直径也为$\frac{2r_1r_2}{r}$，故这两圆相等.

从推理过程中可知，AD与BQ的交点H必在半圆AB上.

该图形还有其他一些性质.

参考文献 [10, p. 154], [22, pp. 148～149], [35, pp. 185～186].

(郑君文)

Hipparchus 定理(Hipparchus theorem) 设$\triangle$、R分别为一三角形的面积和外接圆半径，a、b、c为三角形的三条边，则$\triangle = \frac{abc}{4R}$.

Hipparchus(约前 190～前 125)生活于罗德斯和亚历山大里亚，长期从事天文观察和研究，由于天文研究的需要，他成为三角术的奠基人.

如图，$\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C$.

又由正弦定理，$\sin C=\frac{c}{2R}$，

$\therefore \triangle=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$.

如果利用相似三角形知识求证，则可作直径 AA' 与 BC 上的高 AH_1，于是

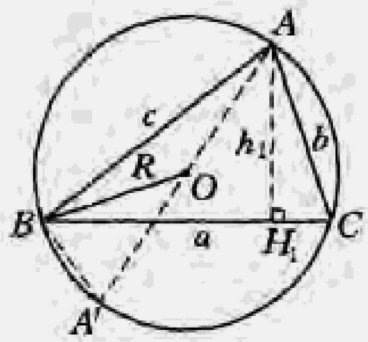


图 4－53

$\triangle ABA'\backsim\triangle AH_1C$，$\frac{2R}{b}=\frac{c}{h_1}$，即 $bc=2R\cdot h_1$.

从而 $abc=2R\cdot(h_1a)=4R\cdot\triangle$，$\triangle=\frac{abc}{4R}$.

参考文献　[33，p. 134]，[38，pp. 180～181].

（张文华）

托勒密定理（Ptolemy theorem）　若四边形内接于圆，则它的两双对边的乘积之和等于两对角线的乘积.

托勒密是古代天文学的集大成者，他继承前贤、特别是 Hipparchus 和梅内劳斯的成就，并加以整理发挥，写了一本名为《数学汇编》的书（阿拉伯人称之为《大汇编》）. 该书共有 13 篇，其中第一篇主要讲球面三角. 在讨论如何计算弧所对的弦的长度时，托勒密把这个定理作为引理提了出来. 但也有的资料说，这个定理是 Hipparchus 先提出的，托勒密只是摘引了它. 在《数学汇编》一书中，托勒密利用该定理导出了包括加法公式在内的一系列重要三角公式.

如图 4－54，设 $ABCD$ 是圆内接四边形，若作 $\angle BAE=\angle CAD$，E 在 BD 上，则 $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，$\triangle AED\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$，$\frac{AD}{AC}=\frac{ED}{BC}$.

即　$AB\cdot CD=AC\cdot BE$，

$BC\cdot AD=AC\cdot ED$.

$\therefore AB \cdot CD + BC \cdot AD$

$= AC \cdot BE + AC \cdot ED$

$= AC(BE + ED) = AC \cdot BD.$

即 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$

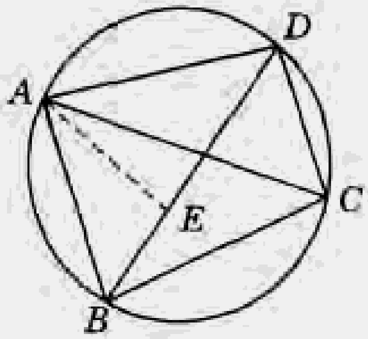


图 4-54

定理的推广

(1) 若 A、B、C、D 是平面上任意四点，则有

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD,$$

当且仅当按 A、B、C、D 顺序，A、B、C、D 四点共圆或共线时，等号成立.

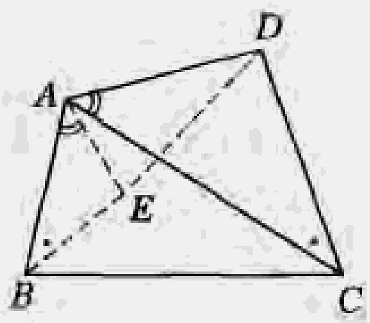


图 4-55

作 $\angle BAE = \angle DAC$，$\angle ABE = \angle ACD$，则

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$,

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$.

$AB \cdot CD = AC \cdot BE.$ ①

又$\because \angle BAC = \angle EAD$，$AB : AC = AE : AD$，

$\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$，

$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$,

$BC \cdot AD = AC \cdot ED.$ ②

由①、②得

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC(BE + ED) \geqslant AC \cdot BD.$

即 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$

(2) 若 A、B、C、D 既不共圆，也不共线，$\angle ABD \neq \angle ACD$，$E$ 点不在 BD 上，则 $BE + ED > BD$.

故 $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BC.$

(3) 对于同一直线上顺次四点 A、B、C、D，亦有 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. 这一结论是由欧拉首先提出的.

(4) 对于空间四点 A、B、C、D，若满足 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$，则 A、B、C、D 四点必共面，且它们或者顺序共圆或者顺序共线.

(5) 1985 年，杨路提出了如下定理：凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，若$\triangle A_4A_3A_2$、$\triangle A_1A_4A_3$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆半径分别为 R_1、R_2、R_3、R_4，则

$(R_1R_2 + R_3R_4)A_1A_2 \cdot A_3A_4 + (R_1R_4 + R_2R_3)A_1A_4 \cdot A_2A_3 = (R_1R_3 + R_2R_4)A_1A_3 \cdot A_2A_4$.

参考文献 [9, p. 177], [16, p. 30, p. 50], [27, p. 47, p. 122, p. 190], [33, pp. 136～139].

(张文华)

Brahmagupta 公式(Brahmagupta formula) 若圆内接四边形的四边之长为 a、b、c、d，半周长为 $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$，则

(1) 该四边形之面积为

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

(2) 该四边形的对角线长分别为

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Brahmagupta(598～665)是一位印度天文学家兼数学家. 公元 628 年，他写了一部有 20 卷的天文著作，在第 12 卷中有许多几何知识. 上述公式就是 Brahmagupta 首先提出的，当时他认为，公式对任意四边形都是适用的. 其实该公式只对圆内接四边形才有效.

公式(1)是海伦公式的推广，若 $d = 0$，四边形退化为三角形，于

是可得海伦公式

$$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(1) 如图 4-56,圆内接四边形 $ABCD$ 中,$ef=ac+bd$.

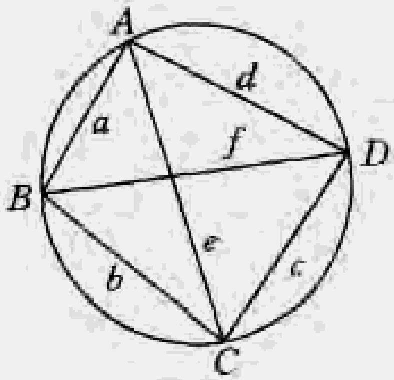


图 4-56

由 Bretschneide 公式得

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[2ef+(a^2-b^2+c^2-d^2)][2ef-(a^2-b^2+c^2-d^2)]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd+a^2-b^2+c^2-d^2)(2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-(b-d)^2][(b+d)^2-(a-c)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+c-b+d)(a+b+d-c)(b+c+d-a)}$$

$$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

若不借助于 Bretschneide 公式,可用另一种推导方式:

$$S=\frac{1}{2}(ad\sin A+bc\sin C)=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A,$$

$$f^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2+2bc\cos A,$$

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

$$\therefore S^2=\frac{1}{4}(ad+bc)^2\left[1-\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{16}[4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2]$$

$$=\frac{1}{16}(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc+b^2+c^2-a^2-d^2)$$

$$=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

$\therefore S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(2) $e^2=a^2+b^2-2ab\cos B, e^2=c^2+d^2-2cd\cos D$,

又 $\cos B+\cos D=0$, $\therefore \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)e^2=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}$,

$$\therefore e^2=\frac{1}{ab+cd}[(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab]$$
$$=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

$$\therefore e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

同样可导出对角线 f 的公式.

推广 对于任意凸四边形 $ABCD$,有如下面积公式:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}},$$

其中 a、b、c、d 是四边之长,$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

由于 $a^2+d^2-2ad\cos A=BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C$,

$$\therefore ad\cos A-bc\cos C=-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2-d^2). \quad ①$$

又 $2S=ad\sin A+bc\sin C$, ②

①^2 + ②^2,得

$$4S^2+\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2-d^2)^2$$
$$=(ad\cos A-bc\cos C)^2+(ad\sin A+bc\sin C)^2$$
$$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$$
$$=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\left(2\cos^2\frac{A+C}{2}-1\right)$$
$$=a^2d^2+b^2c^2+2abcd-4abcd\cos^2\frac{A+C}{2},$$

$\therefore 16S^2=4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2-$

$$16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$=(a+b+d-c)(a+c+d-b)(a+b+c-d)\cdot$$
$$(b+c+d-a)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-$$
$$16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

$$\therefore S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}.$$

参考文献 [12,p.146],[32,p.122],[35,pp.219～220].

（张文华 郑君文）

Brahmagupta 定理（Brahmagupta theorem） 若圆内接四边形的对角线互相垂直,则过对角线交点且垂直于一边的直线必平分其对边.

如图 4-57,四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,且 $AC\perp BD$ 于 E.过 E 作直线 $EF\perp AB$ 于 F,EF 交 CD 于 G.

在 Rt$\triangle AEB$ 中,由于 $EF\perp AB$,

$\therefore \angle BAE=\angle BEF$.

$\therefore \angle CDB=\angle CAB=\angle BEF=\angle DEG$,$\therefore GD=GE$.

又$\because \angle C=90°-\angle CDE=90°-\angle DEG=\angle GEC$,$\therefore EG=GC$.

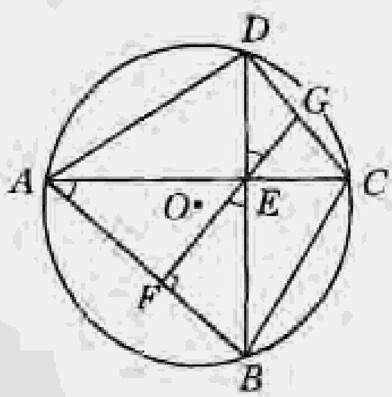


图 4-57

可见,过对角线交点 E 且垂直于 AB 边的直线平分对边 CD.

本定理的逆命题也是成立的.

参考文献 [12,p.146],[27,pp.66～67].

（张文华）

正弦定理(Sine theorem) 三角形的三边与它们所对角的正弦之比相等，即在$\triangle ABC$中，按通常记法有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

阿拉伯数学家、天文学家 Abul Wefa (940～998)，给出并证明了该定理. 波斯史学家 Al-Birûni (973～1048)也给出了该定理并作出一个证明. 阿拉伯天文学家、数学家 Nasir Eddin (1201～1274)所著的《横截线原理书》(*Book of the Principle of Transversal*)，是数学史上流传至今最早的三角学专门著作. 该书共分 5 卷，其中卷 3 清楚地陈述和论证了正弦定理.

结论的得出，可以按三角形的一角(如$\angle A$)分别为锐角、直角、钝角三种情况来研究.

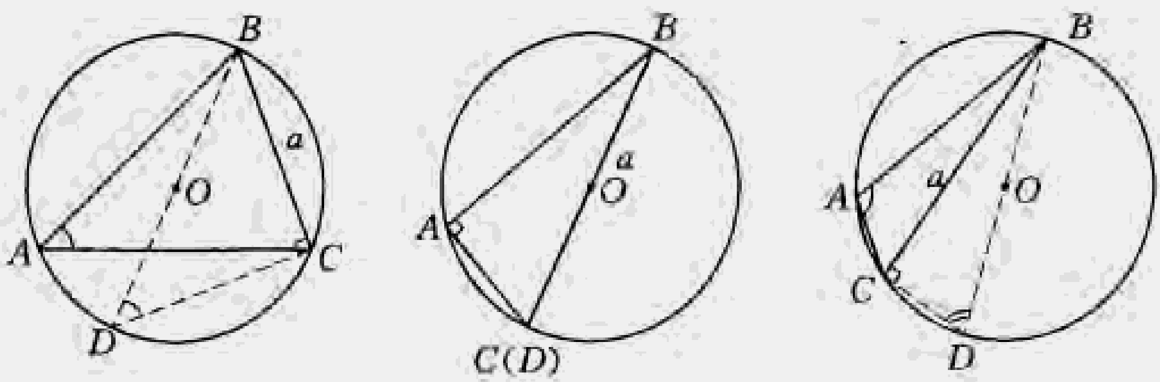


图 4－58

$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，作直径BD，连结DC，则当$\angle A$为锐角时，$a=2R\sin D=2R\sin A$；当$\angle A$为直角时，$a=2R=2R\sin 90^\circ=2R\sin A$；当$\angle A$为钝角时，$a=2R\sin D=2R\sin(180^\circ-A)=2R\sin A$，所以都有$\dfrac{a}{\sin A}=2R$.

同理 $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

故 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

注意,三角学中的正弦定理、余弦定理和射影定理,它们之间是等价的,即由一个可推导出其他两个.

参考文献　[11,pp. 91～92],[13,p. 21,p. 453],[38,p. 167],[33,p. 223]

（郑君文）

蝴蝶定理(**The theorem of butterfly**) 设 M 是某圆上弦 AB 的中点,过 M 又作此圆的另两弦 CD、EF,直线 CE 与 DF 分别交直线 AB 于 H 与 G,则 $MG=MH$,如图 4-59. 这一事实叫做蝴蝶定理,是因为它的图像一只飞舞的蝴蝶. 它最早作为一个征解题目出现于 1815 年西欧一本通俗杂志《男士日记》上,不久即有人给出解答,但解法颇繁. 直到 20 世纪,才有简捷的证法出现. 下述证明是简捷而易于推广的证法之一:

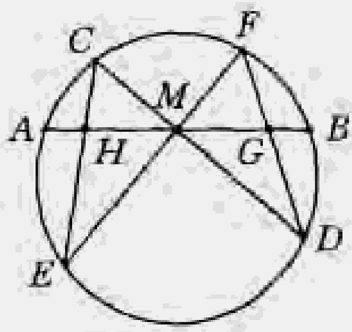


图 4-59

只要证明 $\dfrac{MH}{AH}=\dfrac{MG}{BG}$ 就可以. 也即要证明

$$\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{MG}=1 \qquad ①$$

用面积方法,得

$$\begin{aligned}\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{MG}&=\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle MDF}}=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{MC\cdot ME}{MD\cdot MF}\\&=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle DEF}}\cdot\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CDF}}\\&=\frac{BD\cdot DF\cdot BF}{AC\cdot CE\cdot AE}\cdot\frac{CE\cdot CF}{DE\cdot DF}\cdot\frac{DE\cdot CE}{DF\cdot CF}\\&=\frac{BD}{AC}\cdot\frac{BF}{AE}\cdot\frac{CE}{DF}\\&=\frac{BM}{CM}\cdot\frac{MF}{AM}\cdot\frac{CM}{MF}=\frac{BM}{AM}=1.\end{aligned}$$

注意到条件 $BM=AM$ 到最后一步才用上，上述证明实际上给出了推广的蝴蝶定理：若圆上三弦 AB、CD、EF 交于一点 M，直线 CE、DF 分别与直线 AB 交于 H、G，则有

$$\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{MG}=\frac{BM}{AM}. \tag{②}$$

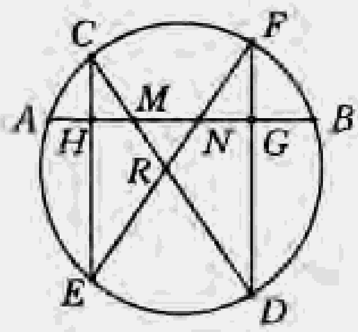


图 4-60

蝴蝶定理还可以进一步推广到三弦不交于一点的情形. 如图 4-60，设 A、B、C、D、E、F 是圆上任意六个点，直线 CD、EF、CE、DF 分别与直线 AB 交于 M、N、H、G，则有

$$\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{NG}=\frac{BM}{AN}. \tag{③}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{NG}&=\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle NDF}}=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle DCE}}\cdot\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle DEF}}\cdot\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle NDF}}\\&=\frac{BD\cdot BF\cdot DF}{AC\cdot AE\cdot CE}\cdot\frac{MC}{DC}\cdot\frac{DC\cdot DE\cdot CE}{DE\cdot DF\cdot EF}\cdot\frac{EF}{NF}\\&=\frac{BD}{AC}\cdot\frac{BF}{AE}\cdot\frac{MC}{NF}=\frac{MC}{AC}\cdot\frac{BF}{NF}\cdot\frac{BD}{AE}\\&=\frac{MB}{BD}\cdot\frac{AE}{AN}\cdot\frac{BD}{AE}=\frac{BM}{AN}.\end{aligned}$$

有趣的是，计算机还曾对这个推广的命题给出下述颇为简捷的证明：

$$\begin{aligned}\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{NG}\cdot\frac{AN}{BM}&=\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle NDF}}\cdot\frac{AN}{AB}\cdot\frac{AB}{BM}\\&=\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle DCE}}\cdot\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle DEF}}\cdot\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle NDF}}\cdot\frac{AN}{AB}\cdot\frac{AB}{BM}\\&=\frac{MC}{DC}\cdot\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle DEF}}\cdot\frac{EF}{NF}\cdot\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\square AEBF}}\cdot\frac{S_{\square ADBC}}{S_{\triangle BDC}}\end{aligned}$$

$$= \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\square ADBC}} \cdot \frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ACE}} \cdot \frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle DEF}} \cdot \frac{S_{\square AEBF}}{S_{\triangle ABF}} \cdot \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\square AEBF}} \cdot \frac{S_{\square ADBC}}{S_{\triangle BDC}}$$

$$= \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACE}} \cdot \frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle DEF}} \cdot \frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABF}} \cdot \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDC}}$$

$$= \frac{AB \cdot BC}{AE \cdot CE} \cdot \frac{DC \cdot CE}{DF \cdot EF} \cdot \frac{BD \cdot BF \cdot DF}{AB \cdot AF \cdot BF} \cdot \frac{AE \cdot EF \cdot AF}{BD \cdot DC \cdot BC}$$

$$= 1.$$

如果直线 AB 在圆外，M 是 AB 中点这个条件便失去了意义，但蝴蝶定理可用另一方式叙述：如图，自某圆圆心 O 向任一直线 AB 引垂线，垂足为 M，过 M 作两直线分别与圆交于 C、D 和 E、F. 直线 CE、DF 与直线 AB 分别交于 G、H，则 $MG = MH$.

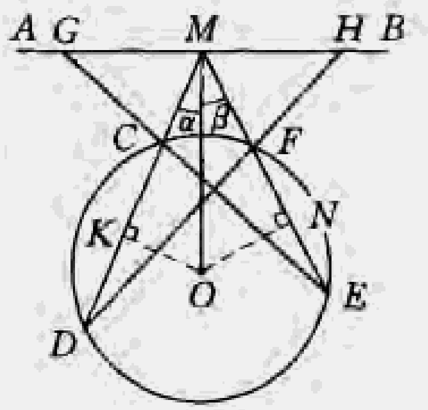


图 4－61

对于这种情形，前面的证明失效. 下面给出另一种面积证法. 它适用于这种叙述方式，但不能用于推广的蝴蝶定理.

如图 4－61，有

$$S_{\triangle MGE} - S_{\triangle MGC} = S_{\triangle MCE}.$$

因而

$$MG \cdot ME\sin(90^\circ + \beta) - MG \cdot MC\sin(90^\circ - \alpha)$$
$$= MC \cdot ME\sin(\alpha + \beta).$$

解出

$$MG=\frac{MC\cdot ME\sin(\alpha+\beta)}{ME\cos\beta-MC\cos\alpha}.$$

同理,得

$$MH=\frac{MD\cdot MF\sin(\alpha+\beta)}{MD\cos\alpha-MF\cos\beta}.$$

要证明的是上两式右端相等,于是要证

$$\frac{\cos\beta}{MC}-\frac{\cos\alpha}{ME}=\frac{\cos\alpha}{MF}-\frac{\cos\beta}{MD}.$$

此式可化为

$$\frac{(ME+MF)\cos\alpha}{ME\cdot MF}=\frac{(MD+MC)\cos\beta}{MD\cdot MC},$$

注意到 $ME\cdot MF=MD\cdot MC$ (圆幂定理),以及

$$\cos\alpha=\frac{MK}{MO}=\frac{(MD+MC)}{2MO},\cos\beta=\frac{MN}{MO}=\frac{(ME+MF)}{2MO},$$

可知要证的等式成立.

蝴蝶定理的原型,以及图 4-60 中的推广形式,可以把圆改为椭圆,其结论不变. 但图 4-61 型的叙述,则不能推广为椭圆上的命题.

除了圆(及椭圆)上的蝴蝶定理外,四边形的蝴蝶定理也是有趣的. 它的最一般形式为:

设四边形 $APBQ$ 的对角线 AB、PQ 交于 O. 在 PQ 上任取一点 R,过 R 作两直线,一条分别与 AP、BQ 交于 C、D,另一条分别与 AQ、BP 交于 E、F. 直线 CD、EF、CE、DF 分别与 AB 交于 N、M、H、G,如图 4-62. 则有

$$\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{NG}=\frac{BM}{AN} \qquad ④$$

当 R 与 O 重合时，则 O、N、M 三点重合，④式即成为②. 进一步，再设 PQ 平分 AB 时，则②成为①. 可见，此命题与圆上的蝴蝶定理十分相似.

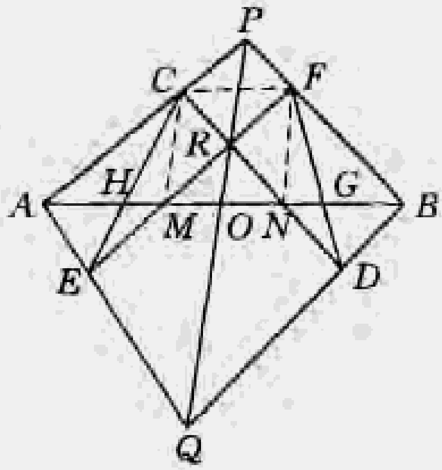


图 4－62

以下给出相应于图 4－62 的④式的证明：

$$\begin{aligned}\frac{MH}{AH}\cdot\frac{BG}{NG}&=\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle NDF}}\\&=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle MCE}}{S_{\triangle MCF}}\cdot\\&\quad\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle NCF}}\cdot\frac{S_{\triangle NCF}}{S_{\triangle NDF}}\\&=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ACE}}\cdot\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle NCF}}\cdot\frac{ME}{MF}\cdot\frac{NC}{ND}\end{aligned}$$

分别计算这四个分式：

$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BPQ}}\cdot\frac{S_{\triangle BPQ}}{S_{\triangle APQ}}\cdot\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ACE}}=\frac{BD\cdot BF}{BP\cdot BQ}\cdot\frac{BO}{AO}\cdot\frac{AP\cdot AQ}{AC\cdot AE},$$

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle NCF}}&=\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\square MNFC}}\cdot\frac{S_{\square MNFC}}{S_{\triangle NCF}}=\frac{CR}{CN}\cdot\frac{FM}{FR}\\&=\frac{S_{\triangle APR}}{S_{\triangle APN}}\cdot\frac{S_{\triangle BPM}}{S_{\triangle BPR}}=\frac{S_{\triangle APR}}{S_{\triangle BPR}}\cdot\frac{S_{\triangle BPM}}{S_{\triangle APN}}=\frac{AO}{BO}\cdot\frac{BM}{AN},\end{aligned}$$

$$\frac{ME}{MF}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABQ}}\cdot\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABP}}\cdot\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABF}}=\frac{AE}{AQ}\cdot\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABP}}\cdot\frac{BP}{BF},$$

$$\frac{NC}{ND}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABP}}\cdot\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABQ}}\cdot\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AC}{AP}\cdot\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABQ}}\cdot\frac{BQ}{BD},$$

代入前式，约简后恰得所要的等式④.

那么，圆上的蝴蝶定理与四边形上的蝴蝶定理之间有什么联系没有呢？可以这样看：在图 4－60 中，设 AE、BD 交于 Q，AC、BF

交于 P，则由帕斯卡定理，直线 PQ 通过 DC 与 EF 的交点 R. 这样，用四边形上的蝴蝶定理，即可推出圆上的蝴蝶定理. 可见，两种蝴蝶定理本质上是相通的.

（张景中）

Servois 定理（Servois theorem） 三角形任意一个顶点到垂心的距离，等于外心到它的对边的距离的两倍.

该定理是法国数学家 F. J. Servois（1767～1847）于 1804 年发现的，Carnot 于 1810 年重新发现了它.

设$\triangle ABC$ 的三条高 AH_1、BH_2、CH_3交于 H，O 是它的外心，M_1、M_3、D 各为 BC、BA、BH 的中点，连结 OM_1、OM_3、DM_1、DM_3，则 $M_3D \parallel AH_1 \parallel OM_1$，$OM_3 \parallel CH_3 \parallel M_1D$，$AH = 2M_3D$，所以四边形 DM_1OM_3为平行四边形，因此，$OM_1 = M_3D = \frac{1}{2}AH$.

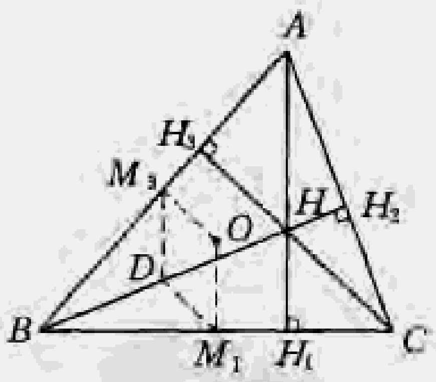


图 4－63

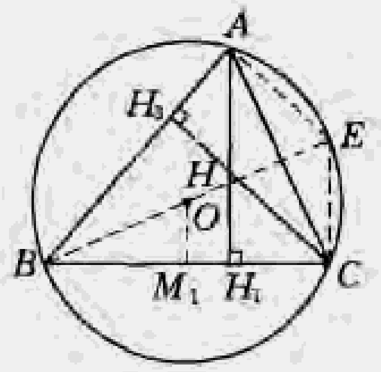


图 4－64

如果画出了$\triangle ABC$ 的外接圆 O，那么可作直径 BE，连结 AE、EC，易知四边形 $AHCE$ 为平行四边形，所以 $AH = EC = 2OM_1$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，且有 $\angle BEC = \angle A$，$\angle H_1HC = \angle H_3HA = \angle B$，$\angle AEB = \angle C$，所以可得到如下推论：

推论 1 （1）$AH = 2R\cos A$，$BH = 2R\cos B$，$CH = 2R\cos C$；（2）$AH + BH + CH = 2(R + r) = a\cot A + b\cot B + c\cot C$，其中 r 是$\triangle ABC$ 的内切圆半径. 后者是 Carnot 于 1803 年发现的.

推论 2 （1）$HH_1=2R\cos B\cos C$，$HH_2=2R\cos C\cos A$，$HH_3=2R\cos A\cos B$；（2）$HA\cdot HH_1=HB\cdot HH_2=HC\cdot HH_3=4R^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=-4R^2\cos A\cos B\cos C$，这里当$\triangle ABC$为锐角三角形时，其值为负，为钝角三角形时，其值为正．它是 Carnot 于 1801 年发现的．

推论 3 $a^2+AH^2=b^2+BH^2=c^2+CH^2=4R^2$；$AH^2+BH^2+CH^2=12R^2-(a^2+b^2+c^2)$．

推论 4 $H_2H_3+H_3H_1+H_1H_2=\frac{2\Delta}{R}$，这里 Δ 表示$\triangle ABC$的面积．

推论 4 是 Booth 于 1879 年得到的，它反映了三角形的垂足三角形的周长与原三角形的面积与其外接圆半径之间的关系．

推论 5 三角形的外心到它的各顶点的向量之和等于外心到它垂心的向量．

推论 5 是英国数学家 J. J. Sylvester（1814～1897）给出的，所以把它称为 Sylvester 定理．

参考文献 [31，p. 163]，[38，p. 195，pp. 202～204]．

（郑君文）

两圆的麦比乌斯定理（Möbius theorem of two circles） 通过两圆的交点 A 分别作两条直线 PQ 和 $P'Q'$，分别与圆相交于 P、P' 和 Q、Q'，则 PP' 与 QQ' 的交角$\angle S$ 的大小一定．

该定理是德国数学家麦比乌斯于 1837 年得到的．

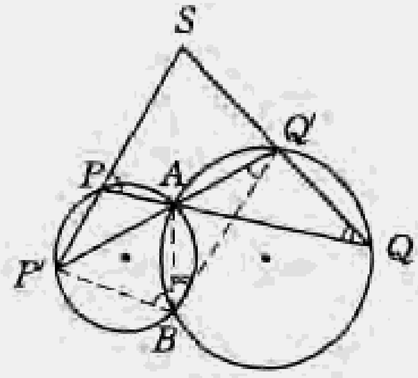


图 4－65

设两圆的另一个交点为 B，连结 AB、$P'B$、BQ'．因为两圆中的 AB 弧确定，所以$\angle Q'P'B$ 和$\angle P'Q'B$ 大小一定，从而$\angle P'BQ'$的大小也一定．又因为$\angle SPQ=\angle P'BA$，$\angle ABQ'=\angle Q$，所

以 $\angle SPQ+\angle SQP=\angle P'BA+\angle ABQ'=\angle P'BQ'$ 为定值，因此，PP' 与 QQ' 的交角 $\angle S$ 的大小一定.

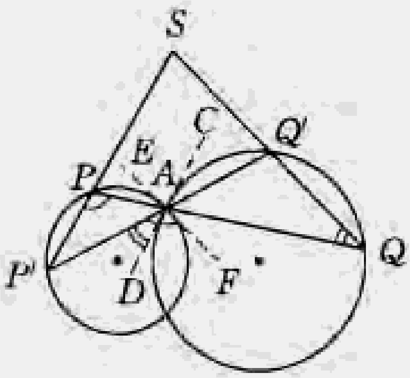


图 4－66

如果过 A 点分别作两圆的切线 CD、EF，则 $\angle CAQ'=\angle Q$，$\angle P'PA=\angle P'AF$，所以 $\angle S=\angle P'PA-\angle Q=\angle P'AF-\angle Q$. 但 $\angle CAQ'=\angle P'AD$，故 $\angle S=\angle P'AF-\angle P'AD=\angle DAF$. 由于 $\angle DAF$ 是两圆的交角，它的大小是一定的，所以 $\angle S$ 的大小也一定.

应当注意，图 4－68 只是给出了一种情形，还有多种情形的图存在.

参考文献 ［38，pp. 263～264］.

（郑君文）

雅可比定理（Jacobi theorem） 延长圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边分别交于点 E、F，则 E、F 关于该圆的幂之和等于 EF^2.

该定理是德国数学家雅可比于 1846 年得到的.

如图 4－67，作 $\triangle BCE$ 的外接圆交 EF 于点 Q，则 $\angle CQF=\angle CBE=\angle ADC$，从而 C、D、F、Q 四点亦共圆.

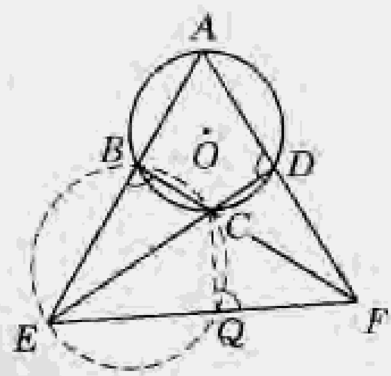


图 4－67

由 C、D、F、Q 四点共圆，得

$$EC\cdot ED=EQ\cdot EF. \qquad ①$$

由 B、C、Q、E 四点共圆，得

$$FC\cdot FB=FQ\cdot EF. \qquad ②$$

① ＋ ②，得

$$EC\cdot ED+FC\cdot FB=EQ\cdot EF+FQ\cdot EF$$
$$=EF(EQ+QF)=EF^2. \qquad ③$$

由于 E 点关于⊙O 的幂等于 $EC\cdot ED$，F 点关于⊙O 的幂等于 $FC\cdot FB$，故③式表明：E、F 关于⊙O 的幂之和等于 EF^2.

参考文献 [38,pp.256~257].

（张文华）

Chapple 定理(Chapple theorem) 设△ABC 的外接圆的半径为 R,内切圆或一旁切圆的半径为 r,d 是两圆的圆心距,则 $d^2=R^2\mp 2Rr$.

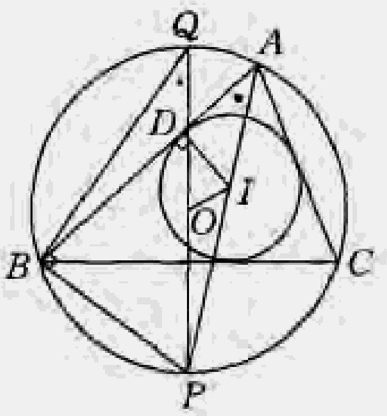


图 4-68

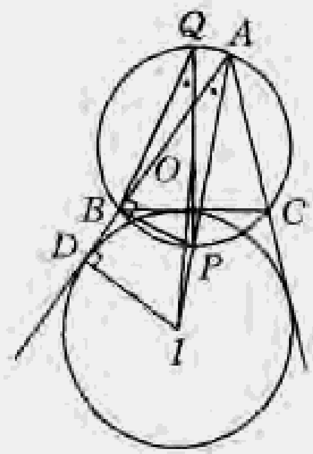


图 4-69

公式 $d^2=R^2-2Rr$ 是 Chapple 于 1746 年发现的,欧拉在 1765 年再发现与其等价的公式

$$d^2=\frac{a^2b^2c^2}{16\Delta^2}-\frac{abc}{a+b+c},$$

这里 Δ 表示△ABC 的面积.

设△ABC 外心为 O,内心或对着∠A 的旁心为 I,连结 AI 交⊙O 于 P,作⊙O 直径 PQ,连结 BQ.又设⊙I 切 AB 于 D,连结 ID,因 $\angle PQB=\angle IAD$,所以 Rt△PQB∽Rt△IAD,从而 $\frac{PQ}{IA}=\frac{PB}{ID}$,即 $2Rr=IA\cdot PB$.连结 BI,则 $\angle BIP=\frac{1}{2}(\angle DBC\pm\angle BAC)$,而 $\angle IBP=\frac{1}{2}\angle DBC\pm\angle PBC=\frac{1}{2}(\angle DBC\pm\angle ABC)$.由此推得 $\angle BIP=\angle IBP$.于是 $PB=PI$,且有 $2Rr=IA\cdot IP$.

易知,当 I 为△ABC 的内心时,$IA\cdot IP=R^2-d^2$,所以 $d^2=$

R^2-2Rr；当 I 为 $\triangle ABC$ 的旁心时，$IA\cdot IP=d^2-R^2$，所以 $d^2=R^2+2Rr$. 从而 $d^2=R^2\mp 2Rr$.

参考文献 [14, pp. 204～206]，[38, pp. 205～207].

（涂荣豹）

费尔巴哈公式（Feuerbach formula） 设 R、r 和 r_a、r_b、r_c 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径、内切圆半径和三个旁切圆半径，它的三边长分别为 a、b、c，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

(1) $r_br_c+r_cr_a+r_ar_b=s^2$；

(2) $r_a+r_b+r_c-r=4R$.

上述公式是费尔巴哈于 1822 年得到的.

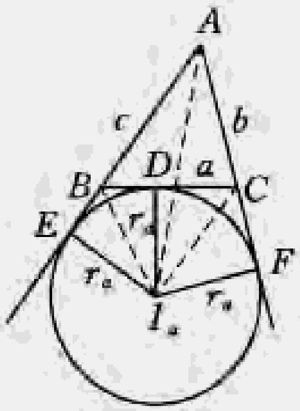


图 4-70

(1) 用 Δ 表示 $\triangle ABC$ 的面积，则

$$\Delta=S_{\triangle ABI_a}+S_{\triangle ACI_a}-S_{\triangle BCI_a}$$
$$=\frac{1}{2}(br_a+cr_a-ar_a)$$
$$=r_a(s-a).$$

同理可得

$$\Delta=r_b(s-b)=r_c(s-c).$$

所以 $r_br_c+r_cr_a+r_ar_b$

$$=\Delta^2\left[\frac{1}{(s-b)(s-c)}+\frac{1}{(s-c)(s-a)}+\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$$

$$=\Delta^2\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)},$$

但 $\Delta^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$，从而便得到(1).

如果利用三角知识，那么可得到

$$r_br_c+r_cr_a+r_ar_b=s^2\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right),$$

但易知 $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$，从而便得(1).

(2) 从图形上也可具体反映出它的关系. 设 I_a、r_a 等分别表示 $\triangle ABC$ 旁切圆的圆心和半径, I、r 为它的内切圆圆心和半径, X_1、Y_1、Z_1 和 D_1 为切点, 连结 II_a 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E_1, 则 $E_1I = E_1C = E_1I_a$, 即 E_1 为 II_a 的中点. 设 M_1 为 BC 的中点, 则 $r_a - r = 2E_1M_1$. 又 $CY_1 = BZ_1 = s - a$, 所以 M_1 为 Z_1Y_1 的中点.

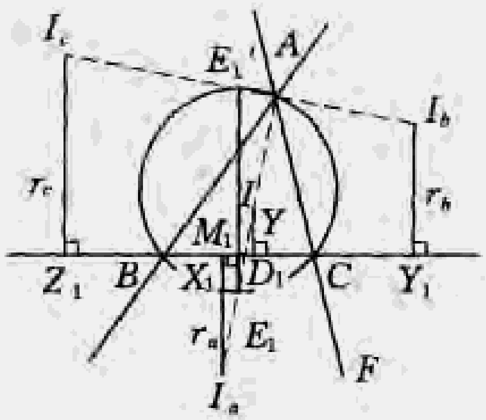


图 4－71

设 E_1M_1 与 $\triangle ABC$ 外接圆的另一个交点为 E_1', 则 E_1E_1' 为外接圆的直径, 且 AE_1' 平分 $\angle BAC$ 的外角, 所以 AE_1' 必过 I_b、I_c, 从而 $r_b + r_c = 2M_1E_1'$, 因此

$$r_a + r_b + r_c - r = 2E_1M_1 + 2M_1E_1' = 2E_1E_1' = 4R.$$

因为 $$r_a + r_b + r_c - r = \Delta\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right)$$

$$= \Delta \cdot c\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{s(s-c)}\right]$$

$$= \Delta \cdot c\,\frac{ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{\Delta},$$

又 $\Delta = \dfrac{abc}{4R}$, 所以便知(2)成立.

如果利用三角知识便有

$$r_a + r_b + r_c - r$$

$$= s\text{tg}\frac{A}{2} + s\text{tg}\frac{B}{2} + s\text{tg}\frac{C}{2} - (s-a)\text{tg}\frac{A}{2}$$

$$- (s-b)\text{tg}\frac{B}{2} - (s-c)\text{tg}\frac{C}{2} + 2r$$

$$= a\text{tg}\frac{A}{2} + b\text{tg}\frac{B}{2} + c\text{tg}\frac{C}{2} + 2r$$

$$= 4R\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right) + 2r$$

$$=2R[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]+2r$$
$$=4R-8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2r,$$

但 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,由此就得到(2).

应用上述公式,即可得到下列几何不等式:

① $\frac{4}{3}R<\frac{1}{3}(r_a+r_b+r_c)\leqslant\frac{3}{2}R$,见 L. Fejes Tóth, Mat. Lapok 1(1949),72.

事实上,由 $r_a+r_b+r_c-r=4R$,得 $r_a+r_b+r_c>4R$.而

$$r_a+r_b+r_c=4R+r,$$

又有 $r\leqslant\frac{R}{2}$,所以

$$r_a+r_b+r_c\leqslant 4R+\frac{R}{2}=\frac{9R}{2},$$

也即 $\frac{4}{3}R<\frac{1}{3}(r_a+r_b+r_c)\leqslant\frac{3}{2}R.$

② $9r\leqslant r_a+r_b+r_c\leqslant\frac{9}{2}R$,见 M. S. Klamkin, Math. Teacher 60(1967),323—328.

据 $r_a+r_b+r_c=4R+r$ 及 $2r\leqslant R$,得

$r_a+r_b+r_c\leqslant\frac{9}{2}R$ 以及 $r_a+r_b+r_c\geqslant 4\cdot 2r+r=9r.$

③ $54Rr\leqslant 3(bc+ca+ab)\leqslant 4(r_br_c+r_cr_a+r_ar_b)$,见 F. Leuenberger—J. Steining, Elem. Math. 20(1965),89—90.

由

$$r_br_c+r_cr_a+r_ar_b=s^2=\frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

和 $3(bc+ca+ab)\leqslant(a+b+c)^2$,得

$$3(bc+ca+ab)\leqslant 4(r_br_c+r_cr_a+r_ar_b).$$

由 $3(bc+ca+ab)=3abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$=6R(h_a+h_b+h_c)\geqslant 18R\cdot\frac{3}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$$

与 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$（该等式由 Terquem 于 1843 年得到），得

$$3(bc+ca+ac)\geqslant 54Rr.$$

参考文献　[30,pp. 66～67]，[38,p. 193,p. 181].

（郑君文）

Lemoine 公式（Lemoine formula）　设 O、I 和 H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心、内心和垂心，则

(1) $OH^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$
$=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$；

(2) $IH^2=2r^2-4R^2\cos A\cos B\cos C$
$=4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

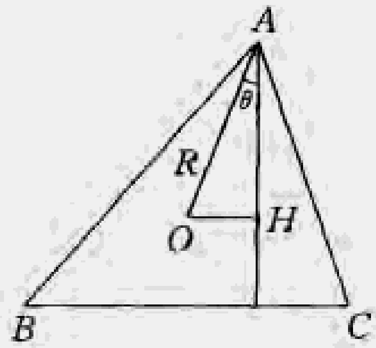


图 4-72

上述公式都是法国数学家 E. M. H. Lemoine(1840～1912)于 1870 年发现的.

(1) 因为 $OH^2=R^2+AH^2-2R\cdot AH\cos\theta$，$AH=2R\cos A$，$\theta=|\angle B-\angle C|$，所以

$$OH^2=R^2-2R\cos A[2R\cos(B-C)-2R\cos A]$$
$$=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C).$$

而 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$，故

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2).$$

(2) 因为 $IH^2=IA^2+HA^2-2IA\cdot HA\cos\varphi$，而

$$IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$HA = 2R\cos A, \varphi = \frac{1}{2}|\angle B - \angle C|,$$

所以

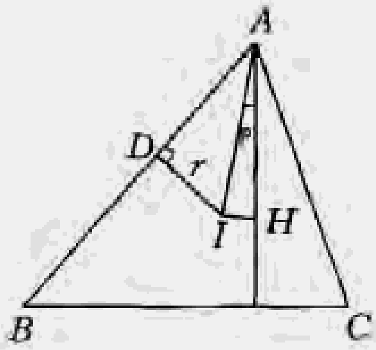


图 4－73

$$\begin{aligned} IH^2 &= 4R^2\Big(4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \cos^2 A - \\ &\quad 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos A\cos\frac{B-C}{2}\Big) \\ &= 4R^2\Big\{4\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}(1-\cos A) - \\ &\quad \cos A[\cos(B+C) + \sin B\sin C]\Big\} \\ &= 2r^2 - 4R^2\cos A\cos B\cos C \\ &= 2r^2 + 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

同样还可以导出$\triangle ABC$旁心I_a与垂心H间的距离的平方公式：$I_aH^2 = 2r_a{}^2 - 4R^2\cos A\cos B\cos C$等.

参考文献 [38,pp.204～205,pp.207～208].

（郑君文）

Fuss 定理(Fuss theorem) 设圆外切四边形有外接圆(又称双心四边形)，外接圆半径为R，内切圆半径为r，圆心距为d，则

$$2r^2(R^2+d^2) = (R^2-d^2)^2.$$

这个定理是欧拉的学生和朋友 N. Fuss(1755～1826)得到的，他还发现了双心五边形、双心六边形、双心七边形、双心八边形的相应的公式，而有关三角形的相应公式是由欧拉提供的，即$r^2 - d^2 = 2rR$.

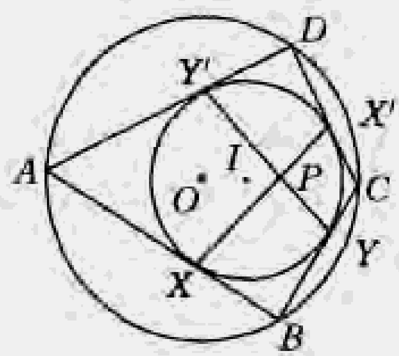


图 4－74

为了证明这个公式，首先要证双心四边形两双对边上切点的连线互相垂直. 设双心四边形$ABCD$的两双对边上切点是X与X'，Y与Y'. 因为$\angle PYC = \angle PY'D$，$\angle PXB = \angle PX'C$，所

以$\angle PYB+\angle PY'D=180°$，$\angle PXB+\angle PX'D=180°$.

而 $\angle PYB+\angle PXB+\angle B+\angle XPY=360°$，

$\angle PY'D+\angle PX'D+\angle D+\angle X'PY'=360°$，

两式相加后得 $\angle XPY+\angle X'PY'=180°$，但它们是对顶角，所以$XX'\perp YY'$.

要求证这个关于外接圆和内切圆半径及连心线的关系式，可借助下列轨迹问题：顶点固定在一个圆内的直角，绕着顶点旋转，求过该角的两边与圆的交点的两条圆切线交点的轨迹. 即求外切四边形顶点的轨迹.

为此只需取圆形的一部分研究. 如图 4-75，X、Y是$\odot I$的两切点，过X、Y的两切线交于B，取P点使$PX\perp PY$，过P作$PN\perp XY$交XY于N，$BI\perp XY$交XY于M，在PI上取一点O，设$IO=d$，则$BO=R$. 由$\angle XFY$是直角，可知$PN^2=XN\cdot YN$. 设$PI=e$，$\angle BIP=\varphi$，则

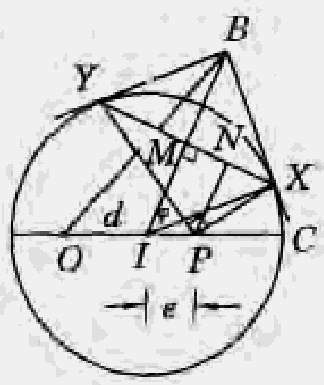


图 4-75

$PN=MI-e\cos\varphi$，$XN=MX-e\sin\varphi$，

$YN=MX+e\sin\varphi$.

记$MI=\rho$，$MX=\rho'$，则有

$(\rho-e\cos\varphi)^2=(\rho'-e\sin\varphi)(\rho'+e\sin\varphi)$，

两边同加ρ^2，得

$$2\rho^2-2\rho e\cos\varphi+(e\cos\varphi)^2+(e\sin\varphi)^2=\rho^2+\rho'^2,$$

其中 $\rho^2+\rho'^2=MI^2+MX^2=r^2$.

故 $2\rho^2-2\rho e\cos\varphi+e^2=r^2$. ①

又因为$\triangle IXB$也是直角三角形，所以有$IX^2=IB\cdot IM$. 记$IB=p$，于是 $r^2=\rho\cdot p$. ②

将②代入①，得 $2\cdot\dfrac{r^4}{p^2}-2\dfrac{r^2}{p}e\cos\varphi+e^2=r^2$，

$$2r^4 = 2pr^2e\cos\varphi + p^2(r^2 - e^2),$$

得 $\dfrac{2r^2}{r^2 - e^2}pe\cos\varphi = \dfrac{2r^4}{r^2 - e^2} - p^2.$ ③

在$\triangle OBI$中，由余弦定理，得

$$OB^2 = OI^2 + BI^2 + 2BI \cdot OI\cos\varphi.$$

因为 $OB = R, OI = d, BI = p$，所以

$$R^2 = d^2 + p^2 + 2dp\cos\varphi.$$

此时，在轨迹问题里 d 还是不定的，如果现选取

$$d = \frac{r^2e}{r^2 - e^2}, \tag{④}$$

那么 $R^2 = d^2 + p^2 + \dfrac{2r^2e}{r^2 - e^2}p\cos\varphi.$ ⑤

将③代入⑤，得

$$R^2 = d^2 + \frac{2r^4}{r^2 - e^2}. \tag{⑥}$$

同理，如果对 A、C、D 点也作上述运算，也能得到这个公式，这说明 A、B、C、D 四点共圆.

由⑥可得 $r^2 - e^2 = \dfrac{2r^4}{R^2 - d^2}$，代入④式，得

$$e = \frac{2dr^2}{R^2 - d^2}.$$

于是 $r^2 - e^2 = r^2 - \left(\dfrac{2dr^2}{R^2 - d^2}\right)^2$，代入⑥化简，得

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2.$$

事实上，比 Fuss 定理更值得注意的是从前面定理证明过程中得到的关于双心四边形的另一定理. 如果一个圆内有一内含圆（不一定同心），那么自外圆周上一点作内含圆的切线交外圆

周于另一点，再以这点作内含圆切线交外圆周于又一点，将此过程继续下去，便可得到庞斯莱横截线. 由 n 条外圆的弦组成的横截线称为 n 边的横截线. 法国数学家庞斯莱推得："如果在外圆上的一点，对其内含圆的四边横截线在此点闭合，那么外圆周上任意起点对其内含圆的四边横截线也在起点闭合."

庞斯莱证明这个定理不仅适用于四边横截线，而且普遍适用于 n 边横截线；不仅适用于圆，而且适用于任何圆锥曲线.

参考文献 [18,p. 237],[31,pp. 211～216].

（涂荣豹）

Spieker 圆(**Spieker circle**) 三角形的任一 Nagel 点到各顶点连线的中点所构成的三角形，与原三角形的中点三角形有一共同的内切圆或旁切圆，此圆称为原三角形的 Spiker 圆(也称 P - 圆).

该题首见于Spieker, Grunerts, Archiv, 51,1870,pp. 10～14.

如图 4－76，$\triangle ABC$ 的三条中线 AD、BE、CF 交于点 G，$\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的中点三角形. I 是 $\triangle ABC$ 的内心，N 是 $\triangle ABC$ 的 Nagel 点，A'、B'、C'分别是 NA、NB、NC 的中点. $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 位似，其外位似中心为 N，相似比为$\frac{1}{2}$. 又$\triangle ABC$

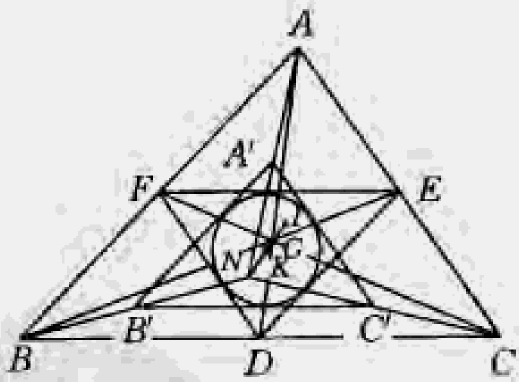


图 4－76

和$\triangle DEF$ 位似，其内位似中心为 G，相似比为－2. 可见$\triangle A'B'C'$与$\triangle DEF$ 也位似，其内位似中心应在 NG 上，且应是 NG 的中点，相似比是－1，即 $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEF$.

今考察$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$、$\triangle DEF$ 的内切圆之间的关系. 当将$\triangle ABC$ 变换成$\triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 的内切圆变换成$\triangle A'B'C'$的内切圆，由于 N、G、I 在同一直线上，且 $IG = \frac{1}{2}GN$，故$\triangle A'B'C'$ 的内切圆圆心 K' 应是 NI 的中点. 当将$\triangle ABC$ 变为

$\triangle DEF$ 时，$\triangle ABC$ 的内切圆变换成$\triangle DEF$ 的内切圆. 因相似比是 -2，其内切圆圆心 K 也应在 NG 上，且 $KG=\frac{1}{2}GI$. 由此可见，K' 和 K 必重合. 又由于这两个内切圆是等圆，故此两圆必重合.

关于旁切圆的情况，可类似地讨论.

三角形的 Spieker 圆是原三角形的中点三角形的内切圆和旁切圆.

参考文献 [14,p.452],[22,pp.285~286].

(张文华)

Salmon 定理(Salmon theorem) 圆心 O 到 A、B 两点的距离与 A 到 B 的极线 b 及 B 到 A 的极线 a 的距离成比例.

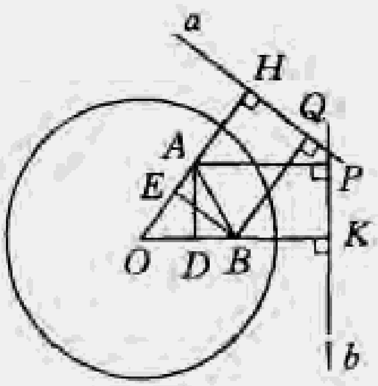


图 4-77

该定理为英国数学家 G. Salmon 所发现，它是极和极线理论中的一个基本定理.

如图 4-79，直线 a、b 分别是点 A、B 的极线，$OA\perp a$ 于 H，$OB\perp b$ 于 K，AP 是 A 到极线 b 的距离，BQ 是 B 到极线 a 的距离. 作 $AD\perp OB$ 于 D，$BE\perp OA$ 于 E，则 A、E、D、B 四点共圆，于是有

$$OD\cdot OB=OE\cdot OA, \quad ①$$

又

$$OB\cdot OK=R^2=OA\cdot OH, \quad ②$$

②−①，得 $OB(OK-OD)=OA(OH-OE)$,

即 $OB\cdot AP=OA\cdot BQ$,

$OA:OB=AP:BQ$.

参考文献 [22,pp.132~133],[38,p.245].

(张文华)

Johnson 定理(Johnson theorem) 若三个等圆 $C_1(r)$、$C_2(r)$、C_3

(r)通过同一个点O,另外的三个交点为P_1、P_2、P_3,那么$\triangle P_1P_2P_3$的外接圆半径也是r.

这个定理是美国几何学家Royer Johnson于1916年提出来的.

由于三个已知圆的半径都是r,所以图形中包含着许多菱形.从菱形$C_1P_1C_2O$与菱形$C_2P_2C_3O$,知$C_1P_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} OC_2 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} C_3P_2$,得四边形$C_1P_1P_2C_3$为平行四边形,可得$C_1C_3=P_1P_2$.同理得$C_2C_3=P_1P_3$,$C_1C_2=P_3P_2$.则$\triangle C_1C_2C_3 \cong \triangle P_1P_2P_3$,而$OC_1=OC_2=OC_3=r$,即$\triangle C_1C_2C_3$的外接圆半径正好是$r$,所以$\triangle P_1P_2P_3$的外接圆半径也是$r$.

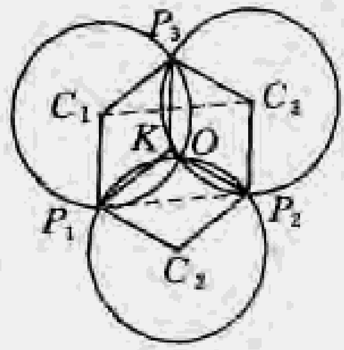


图4-78

此定理有一更为简捷的证法:取点K使得四边形$KP_1C_2P_2$为菱形,则有$KP_1=KP_2=r$.因为$P_3C_3 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} C_1O \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} P_1C_2$,且$P_1C_2 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} KP_2$,所以$P_3C_3 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} KP_2$,得四边形$KP_2C_3P_3$也是菱形,$KP_3=r$.从而得$\triangle P_1P_2P_3$外接圆半径是$r$.

参考文献 [15,pp.282~283].

(涂荣豹)

葛尔刚点(Gergonne points) 设圆I是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆,它切BC、CA、AB于X、Y、Z,则AX、BY、CZ三线共点.这样的点称为葛尔刚点.

因为一个三角形有一个内切圆和三个旁切圆,所以,一个三角形有四个葛尔刚点.

葛尔刚点见 Annales de Math. 9(1818~9).

由于$BX=ZB$,$XC=CY$,$YA=AZ$,于是有$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$,根据塞瓦定理知$AX$、$BY$、$CZ$三线共点.

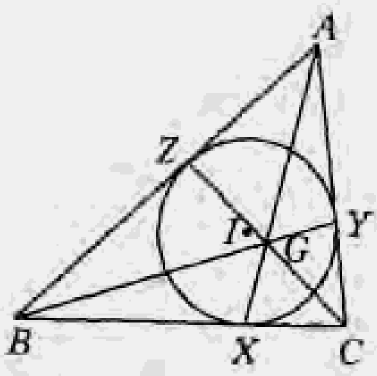


图4-79

参考文献　[18,pp.202～203].

（涂荣豹）

等角中心(Isogonic centre)　自任意三角形各边向外作正三角形,则三角形的三个顶点分别与相对的正三角形的外顶点的连线交于一点,此点称为正等角中心.如果向内作正三角形,同样有三线共点,此点称为负等角中心.

三角形的正等角中心是三角形的巧合点之一,早在希腊时代就已被发现,17世纪费马曾提出一个问题,征求解答.这个问题是:"求一点,使其与已知三角形三顶点的距离之和为最小."而恰恰当已知三角形的最大内角小于120°时,这个点就是该三角形的正等角中心,又称为费马点.

以$\triangle ABC$的各边为边分别向形外作正三角形$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$.假定$\triangle ABC$有一个内角为120°,不妨设$\angle A=120°$,这时BAB'、CAC'都是直线,因而AA'、BB'、CC'都交于A点.

假定$\triangle ABC$各内角都小于120°,这时BB'、CC'应交于$\triangle ABC$内部一点O,连结OA、OA'.由于$AB=AC'$,$AB'=AC$,且$\angle BAB'=\angle CAC'=\angle BAC+60°$,所以$\triangle BAB'\cong\triangle C'AC$.由此可知点$A$与$BB'$、$CC'$等距,于是$OA$平分$\angle B'OC'$.同时又$\angle AB'B=\angle ACC'$,因此$A$、$B'$、$C$、$O$四点共圆,得$\angle CAB'=\angle COB'=60°$.又已知$\angle A'BC=60°$,故$\angle COB'=\angle A'BC$,即$A'$、$B$、$O$、$C$四点共圆,从而$\angle A'OC=\angle A'BC=60°$,即$OA'$是$\angle BOC$的平分线,因而,$A$、$O$、$A'$三点共线,即$AA'$、$BB'$、$CC'$三线交于点$O$.

假定$\triangle ABC$有一内角大于120°,不妨设$\angle A>120°$,这时BB'、CC'应交于$\triangle ABC$外部一点O(O、A在BC同侧),连结OA、OA',仿上面的步骤同样可证$\triangle ABB'\cong\triangle AC'C$,以及$O$、$B$、$A'$、$C$四点共圆,所以$OA$、$OA'$同是$\angle BOC$的平分线,即$OA$、$OA'$重合,从而$AA'$、$BB'$、$CC'$交于一点$O$.

关于负等角中心也可类似地分情形进行证明.

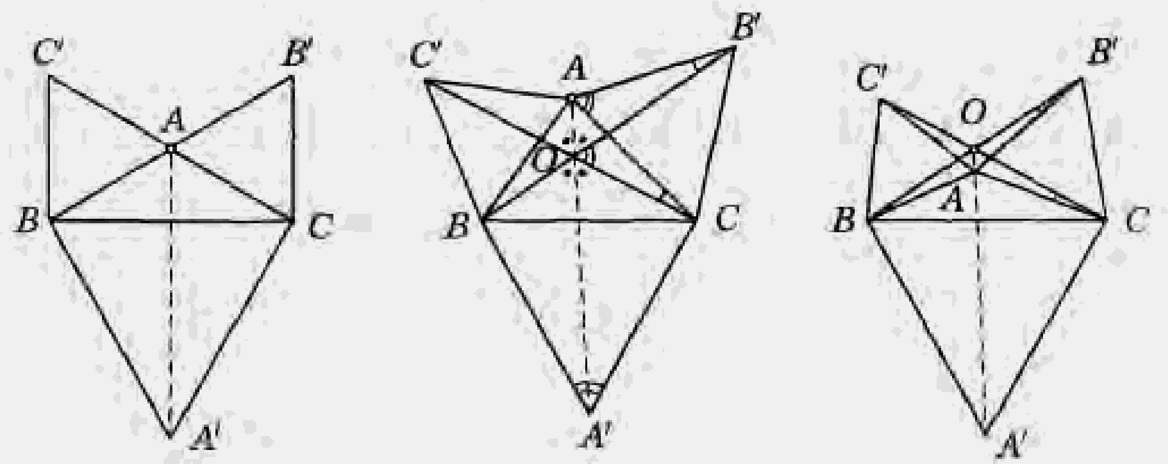


图 4-80

参考文献 [14,pp.169～171],[18,pp.201～202].

（涂荣豹）

布利安香定理(Brianchon theorem) 若一个六边形的六条边与一个圆相切,则它的三条相对顶点连线共点或者彼此平行.

这个定理是法国数学家布利安香于1806年发现的,它与帕斯卡线是有名的对偶命题.参见**帕斯卡线**.

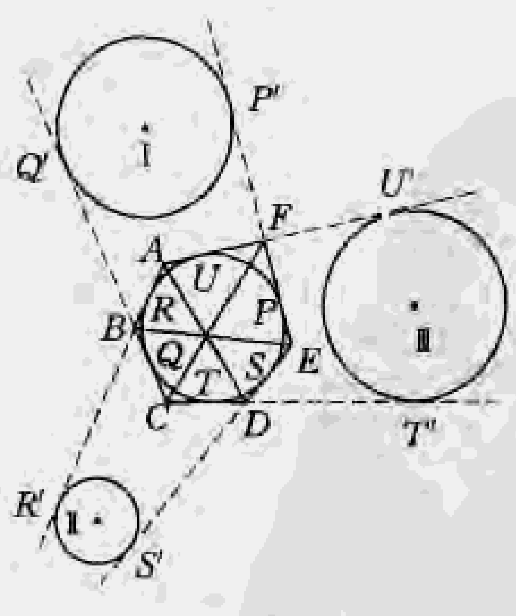


图 4-81

设 $ABCDEF$ 是凸六边形,且六条边与一个圆相切,R、Q、T、S、P、U 分别是切点,对角线 AD、BE、CF 都是内切圆的割线,因此不可能互相平行.在线段 EF、CB、AB、ED、CD、AF 的延长线上取点 P'、Q'、R'、S'、T'、U',使得 $PP'=QQ'=RR'=SS'=TT'=UU'$.容易证明,可作⊙Ⅰ与 PP' 和 QQ' 在 P'、Q' 点相切,可作⊙Ⅱ与 RR' 和 SS' 在 R'、S' 点相切,可作⊙Ⅲ与 TT' 和 UU' 在 T'、U' 相切.

因为 $AR = AU, RR' = UU'$，相加后得 $AR' = AU'$. 又因为 $DS = DT, SS' = TT'$，相减后得 $DS' = DT'$. 于是 A、D 关于⊙Ⅱ和⊙Ⅲ是等幂的，连线 AD 是这两个圆的根轴. 同理 BE 是⊙Ⅰ和⊙Ⅱ的根轴，CF 是⊙Ⅲ和⊙Ⅰ的根轴.

因为以不共线的三点为圆心的三个圆，有且只有一点关于这三个圆的幂是相等的，这个点就是三条根轴的公共点，又称为这三个圆的根心.

如果这个六边形不是凸六边形，那么三条相对顶点的连线，即三条根轴就可能是相互平行的.

此定理可推广到圆锥曲线的情形，即圆锥曲线外切六边形的三条相对顶点的连线共点或互相平行，它的逆定理是射影几何学里的一个定理，即若一个六边形的三条相对顶点连线共点，则它的六条边与一条圆锥曲线相切(包括该曲线退化成关于六边形的一对点偶的情形).

在特殊情形，外切六边形的两邻边接成一条线段，如 AF 和 EF 接成一条线段 AE，则得一圆外切五边形，原 AF 与 EF 的公共点 F 就是接成线段 AE 与内切圆的切点. 这个圆外切五边形 $ABCDE(F)$ 可看成是在点 F 为平角的退化六边形 $ABCDEF$，这时用布利安香定理可得关于圆外切五边形的定理：圆外切五边形的 AE 边的切点 F 落在顶点 C 与 AD 和 BE 交点的连线上.

同样也可把圆外切四边形看做圆外切六边形的退化情形，用布利安香定理可得关于圆外切四边形的定理：圆外切四边形对角线交点在一双对边切点的连线上.

参考文献 [14, p. 227], [27, pp. 87～90].

(涂荣豹)

欧拉线(Euler line) 任意三角形的外心、重心和垂心三点在一条直线上，且垂心到重心的距离是外心到重心距离的两倍. 这条直

线称为三角形的欧拉线.

欧拉线,这是欧拉于1765年发表的《三角形的几何学》一书中首先提出的,并因此而得名.

在$\triangle ABC$中,设M为AB中点,G为重心,则$CG = 2GM$.设O为外心,$OM \perp AB$,延长OG至H,使$GH = 2OG$,连结CH,得$\triangle OMG \backsim \triangle HCG$,因而$\angle OMG = \angle MCH$,从而得$CH \parallel OM$,进而可得$CH \perp AB$.

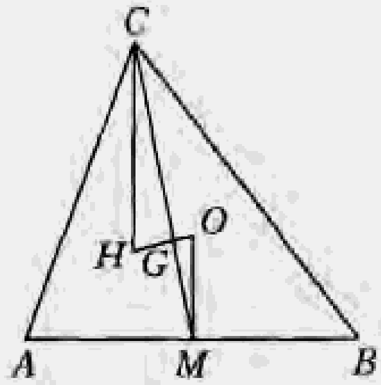


图4-82

同理可证$BH \perp AC$,$AH \perp BC$.于是H是三条高线的交点,即为$\triangle ABC$的垂心.

关于欧拉线,还有更一般的情形,即不仅三角形的外心、重心和垂心在这条直线上,而且九点圆(参见**九点圆**)的圆心也在这条直线上,且若九点圆的圆心为O_1,则这四点间有如下关系:

$$OG : GO_1 : O_1H = 2 : 1 : 3.$$

参考文献 [17,pp.149~150],[19,p.269],[31,p.162].

(涂荣豹)

Simson定理(Simson theorem) 从一点向三角形的各边所引垂线的垂足共线的充分必要条件是该点在三角形的外接圆上.

这三个垂足所在的直线叫做该点关于三角形的Simson线,这个定理称为Simson定理.Simson是在几何学和算术方面都有一定贡献的数学家,Simson线是他的几何观念的典型代表,但Simson线实际是1797年由W.Wallace发现的.

Simson线实际是三角形的垂足三角形的特殊情形,即P点落在三角形外接圆上的情形.参见**三角形的垂足三角形**.下面来证明此定理.

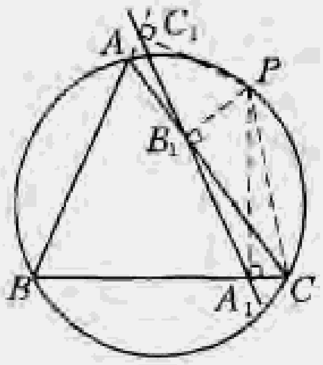


图 4－83

假设 P 点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，过 P 点分别作 BC、CA、AB 的垂线，垂足分别是 A_1、B_1、C_1. 因为 P、A_1、B、C_1 四点共圆，所以 $\angle APC = 180° - \angle B = \angle C_1PA_1$，两边减去 $\angle APA_1$，得 $\angle A_1PC = \angle C_1PA$. 易知 $\angle A_1PC = \angle A_1B_1C$，$\angle C_1PA = \angle C_1B_1A$. 于是 $\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$，即 A_1、B_1、C_1 三点共线. 此时垂足三角形是退化的.

反过来，设过 P 点向 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 引垂线所得的三个垂足 A_1、B_1、C_1 在一条直线上，那么只需把上面的证明过程反过来写，就可以证得 P 点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

Simson 线可以看做是清宫定理的特例. 参见**清宫定理**.

参考文献 ［27，p. 46］.

（涂荣豹）

Simson 线（Simson line） 见 **Simson 定理**.

清宫定理 设 P、Q 是 $\triangle ABC$ 外接圆上异于 A、B、C 的两点，P 点关于三边 BC、CA、AB 的对称点分别是 L、M、N，连结 QL、QM、QN 交 BC、CA、AB 或其延长线于 D、E、F，则 D、E、F 三点在一条直线上.

这个定理是日本数学家清宫俊雄在 16 岁时（1926 年）发现的关于 Simson 定理的一个推广，即若 P、Q 重合，则 D、E、F 三点成为从 $P(Q)$ 点向 BC、CA、AB 或其延长线所引垂线的垂足，D、E、F 所在直线就是 P 点关于 $\triangle ABC$ 的 Simson 线. 这个定理的物理意义是：将 $\triangle ABC$ 的三边或其延长线作为镜面，于是从 P 点出发的光线照到 D 经 BC 反射后通过 Q，从 P 点出发的光线照到 E 点经 CA 反射后通过 Q，从 P 点出发的光线照到 F 点经 AB 反射后也通过 Q.

清宫定理可以用梅内劳斯定理的逆定理来证明.

由 A、B、P、C 四点共圆，知 $\angle PCE=\angle ABP$.

由 P 与 M 关于 CA 对称，得 $\angle PCM=2\angle PCE$. 同理得 $\angle PBN=2\angle ABP$.

所以 $\angle PCM=\angle PBN$.

因为 $\angle PCQ=\angle PBQ$，所以 $\angle PCM+\angle PCQ=\angle PBN+\angle PBQ$，得

$$\angle QCM=\angle QBN.$$

由于 $\triangle QCM$ 和 $\triangle QBN$ 有一个顶角相等，因此，

$$\frac{S_{\triangle QCM}}{S_{\triangle QBN}}=\frac{CM\cdot CQ}{BN\cdot BQ}.$$

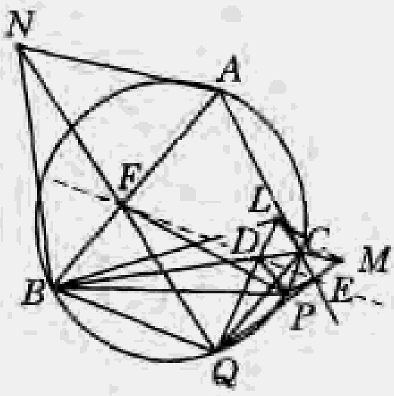


图 4-84

而 $CM=CP$，$BN=BP$，于是得

$$\frac{S_{\triangle QCM}}{S_{\triangle QBN}}=\frac{CP\cdot CQ}{BP\cdot BQ}.$$

同理可得 $$\frac{S_{\triangle QAN}}{S_{\triangle QCL}}=\frac{AP\cdot AQ}{CP\cdot CQ},$$

$$\frac{S_{\triangle QBL}}{S_{\triangle QAM}}=\frac{BP\cdot BQ}{AP\cdot AQ}.$$

于是 $$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$$

$$=\frac{S_{\triangle QBL}}{S_{\triangle QCL}}\cdot\frac{S_{\triangle QCM}}{S_{\triangle QAM}}\cdot\frac{S_{\triangle QAN}}{S_{\triangle QBN}}$$

$$=\frac{S_{\triangle QBL}}{S_{\triangle QAM}}\cdot\frac{S_{\triangle QCM}}{S_{\triangle QBN}}\cdot\frac{S_{\triangle QAN}}{S_{\triangle QCL}}$$

$$=\frac{BP\cdot BQ}{AP\cdot AQ}\cdot\frac{CP\cdot CQ}{BP\cdot BQ}\cdot\frac{AP\cdot AQ}{CP\cdot CQ}=1.$$

根据梅内劳斯定理的逆定理，D、E、F 三点在同一条直线上.

参考文献 [15,pp. 296~298].

(涂荣豹)

帕斯卡定理(Pascal theorem) 圆的内接六边形的三双对边如果分别相交,那么三个交点共线.该定理称为帕斯卡定理,这条直线称为帕斯卡线.

这是法国数学家帕斯卡16岁时发现的一个惊人的定理,发表于1639年.帕斯卡本人对定理的证明已经丢失,但在丢失之前莱布尼茨看到过,并称赞过他的证明.后人为了重现帕斯卡已失传的证明,即要求所给出的证明只能采用帕斯卡时代所能采用的结果和方法,作出了多种尝试.因为帕斯卡很喜欢运用梅内劳斯定理,所以下面给出的是选自T. Spieker的《平面几何教程》(*Lehrbuch der ebenen Geometrie*)第18版中的一种证明方法.

设 $ABCDEF$ 是圆内接六边形,AB 与 DE 交于 L,BC 与 EF 交于 M,DC 与 AF 交于 N.

因为直线 LDE、MCB、NFA 都是△XYZ 的截线,由梅内劳斯定理,得

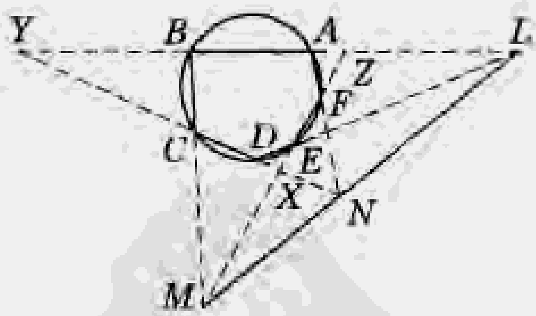


图 4-85

$$\frac{LY}{LZ}\cdot\frac{EZ}{EX}\cdot\frac{DX}{DY}=1,$$

$$\frac{MZ}{MX}\cdot\frac{CX}{CY}\cdot\frac{BY}{BZ}=1,$$

$$\frac{NX}{NY}\cdot\frac{AY}{AZ}\cdot\frac{FZ}{FX}=1.$$

三式相乘并整理,得

$$\frac{LY}{LZ}\cdot\frac{MZ}{MX}\cdot\frac{NX}{NY}\cdot\frac{EZ\cdot FZ}{AZ\cdot BZ}\cdot\frac{DX\cdot CX}{EX\cdot FX}\cdot\frac{BY\cdot AY}{DY\cdot CY}=1.$$

根据圆幂定理,得

$$EZ\cdot FZ=AZ\cdot BZ, DX\cdot CX=EX\cdot FX, BY\cdot AY=DY\cdot CY.$$

于是可得 $\frac{LY}{LZ}\cdot\frac{MZ}{MX}\cdot\frac{NX}{NY}=1.$

根据梅内劳斯定理的逆定理，知 L、M、N 三点在一直线上.

帕斯卡把这个定理推广到对内接于圆锥曲线的六边形也成立，即：在圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）的内接六边形中，三双对边的交点共线. 如果允许内接六边形的顶点重合，那么可以得到一些关于内接五边形和内接四边形的有趣定理.

参考文献 [19，pp. 222～226]，[27，pp. 84～86].

（涂荣豹）

帕斯卡线（Pascal line） 见帕斯卡定理.

Lemoine 线（Lemoine line） 过三角形的顶点作它的外接圆的切线与对边相交，这样的三个交点在同一直线上.

上述结论是由 Lemoine 首先发现的，所以这样的直线被命名为三角形的 Lemoine 线.

如图 4－88，过 A 作△ABC 的外接圆的切线 AF 交 BC 于点 X，过 B 作外接圆的切线 BY 交 AC 于点 Y，过 C 作外接圆的切线 CF，交 AB 于点 Z. 我们要证明 X、Y、Z 三点在同一直线上. 设 BY 交 AF 于 E、交 CF 于 D.

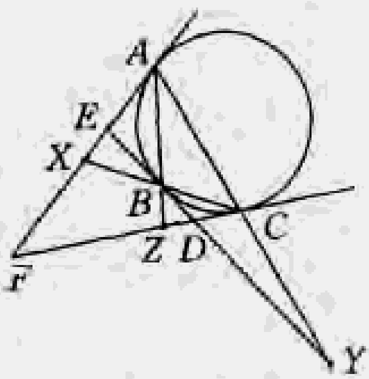


图 4－86

根据梅内劳斯定理，

∵ 直线 XEF 截△BCD，∴ $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{FD}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{EB}}=1.$ ①

∵ 直线 YDE 截△ACF，∴ $\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EF}}\cdot\frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}=1.$ ②

∵ 直线 ZDF 截△ABE，∴ $\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{FA}}=1.$ ③

①×②×③，得

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=-1.$$

又 $|\overline{DC}|=|\overline{DB}|,|\overline{FC}|=|\overline{FA}|,|\overline{EA}|=|\overline{EB}|,$

$$\therefore \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1.$$

由于 X、Y、Z 分别在 $\triangle ABC$ 的三边之延长线上，故根据梅内劳斯定理知，X、Y、Z 三点在同一直线上.

参考文献 [14,p.168].

（张文华）

完全四边形的 Simson 线（Simson line of the complete quadrilateral） 完全四边形的 Miquel 点在四边上的射影共线，该直线叫做完全四边形的 Simson 线.

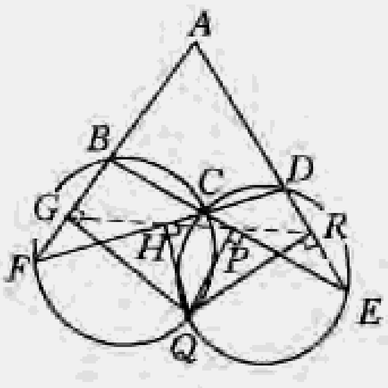


图 4-87

$ABCDEF$ 是一完全四边形，$\triangle ABE$、$\triangle ADF$、$\triangle BCF$、$\triangle CDE$ 的外接圆相交于一点 Q，点 Q 称为完全四边形 $ABCDEF$ 的 Miquel 点.

设 Q 点在 AB、BC、CD、DA 所在直线上的投影分别为 G、P、H、R.

由于点 Q 在 $\triangle BCF$ 的外接圆上，G、H、P 是 Q 在三边上的射影，所以 G、H、P 在同一条直线上(Simson 线).

由于 Q 点在 $\triangle CDE$ 的外接圆上，Q 在三边上的射影是 H、P、R，所以 H、P、R 在同一条直线上.

$\therefore$ G、H、P、R 四点在同一条直线上.

参考文献 [38,p.246].

（张文华）

完全四边形的垂心线（Orthoceter line of the complete quadrilateral） 完全四边形的各边所构成的四个三角形的四个

垂心在同一直线上，该线称为完全四边形的垂心线，它平行于完全四边形的 Simson 线.

如图 4－90，$ABCDEF$ 是一完全四边形，H_1、H_2、H_3、H_4分别是$\triangle ABE$、$\triangle BCF$、$\triangle ADF$、$\triangle CDE$ 的垂心，则点 H_1、H_2、H_3、H_4必在同一直线上，且该线必平行于完全四边形的 Simson 线.

辅助命题：圆上任一点对于圆内接三角形的 Simson 线必平分该点和此三角形垂心的连结线.

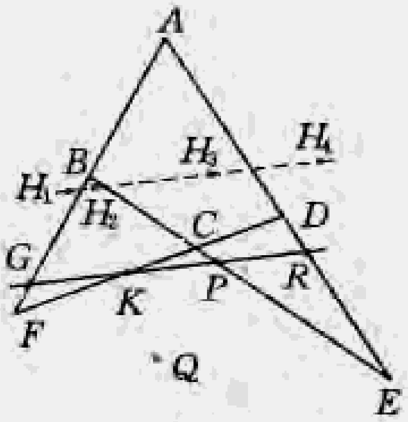


图 4－88

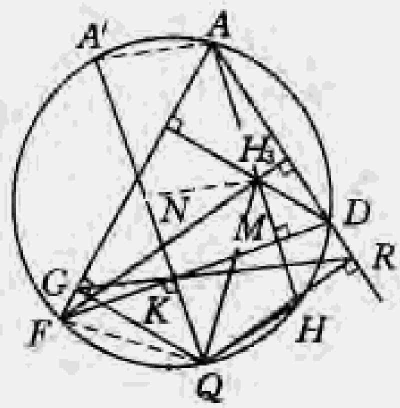


图 4－89

如图 4－91，Q 是$\triangle AFD$ 的外接圆上一点，Q 在 FD、AD 上的射影是 K、R. KR 是点 Q 关于$\triangle AFD$ 的 Simson 线，H_3是$\triangle AFD$ 的垂心，今要证明 KR 必平分线段 QH_3.

设 AH_3交 FD 于 M，交外接圆于 H，则 $H_3M = MH$，且 $HH_3 \perp KD$. 延长 QK 交外接圆于 A'，过 H_3作 $H_3N \parallel AA'$，交 $A'Q$ 于 N，则 $H_3N = AA' = HQ$. 故四边形 H_3HQN 是等腰梯形，而 MK 是该梯形的对称轴，故 K 是 NQ 的中点. 由于 $\angle AGK = \angle A'QF = \angle GAA'$，$GR \parallel AA' \parallel NH_3$，故 GR 必平分 H_3Q.

现在回到原题. 如图 4－90，设 Q 是完全四边形的 Miquel 点，Q 在 AB、BC、CD、DA 上的射影分别是 G、P、K、R，则 G、K、P、R 四点共线(完全四边形的 Simson 线).

根据辅助命题，KP 平分线段 QH_3，GR 平分线段 QH_1，GK

平分线段 QH_2，PR 平分线段 QH_4，即线段 QH_1、QH_2、QH_3、QH_4 的中点在一条直线 GR 上，则 H_1、H_2、H_3、H_4 亦必在同一条直线上，且该线平行于 GR，即平行于完全四边形的 Simson 线.

参考文献 [14，p. 221].

（张文华）

三圆的相似轴（Axis of similitude of three circles） 若三圆各不相等且圆心不共线，则它们两两之间的六个相似中心分布在四条直线上，每条直线上有三点，这四条直线叫做三圆的相似轴.

三圆的相似轴，载于蒙日的 *Geometrie descriptive*（1798）中.

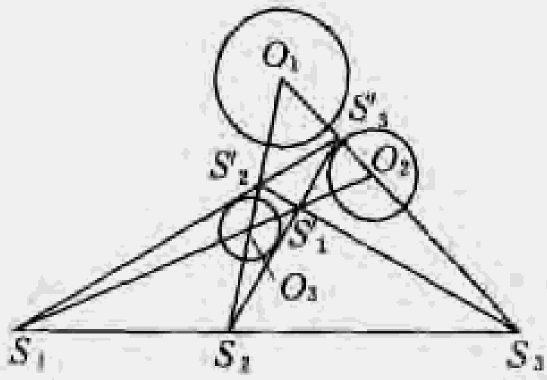


图 4－90

假设 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 各不相等且圆心不共线，而 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$、$\odot O_3$ 与 $\odot O_1$、$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的外相似中心各为 S_1、S_2、S_3，内相似中心各为 S_1'、S_2'、S_3'.

把三个圆看做是顺位似图形时，那么 S_1、S_2、S_3 三点共线.

把 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$、$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 看做是逆位似图形时，且把 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 看做是顺位似图形时，那么 S_3'、S_2'、S_1 三点共线.

再把上述两种看法在各图中调换一下，还可得到两组相似中心 S_3'、S_2、S_1' 和 S_3、S_2'、S_1' 也分别是共线的.

所得的 4 条直线，都是原来三圆的相似轴.

参考文献 [14，pp. 343～344]，[38，p. 269].

（涂荣豹）

三角形的五点圆（Five-point circle of triangle） 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，AB 的中垂线交 AC 于 E，AC 的中垂线交 AB 于 F，则 B、F、O、C、E 五点共圆.

由 LE、NF 是 AB、AC 的中垂线知 $\angle ABE = \angle A$，$FC =$

AF，$\angle ACF = \angle A$，故 $\angle ABE = \angle ACF$. 所以 F、B、E、C 四点共圆.

因为 $\angle BFO = 180° - \angle AFO = 180° - (90° - \angle A) = 90° + \angle A$，同理 $\angle BEG = 90° + \angle A$，于是 $\angle BFO = \angle BEG$. 所以 F、B、E、O 四点共圆.

综上所述，B、F、O、C、E 五点共圆.

参考文献 [18，p. 213].

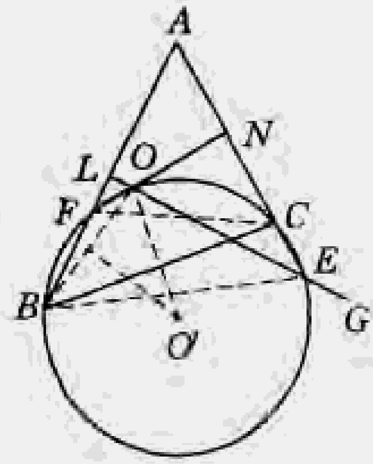


图 4－91

（涂荣豹）

Miquel 定理(Miquel theorem) 延长任一五边形 $ABCDE$ 的五边，得到五边形形外的五个三角形，作这五个三角形的外接圆，则相邻外接圆的五个交点 A''、B''、C''、D''、E''(异于 A、B、C、D、E)必共圆.

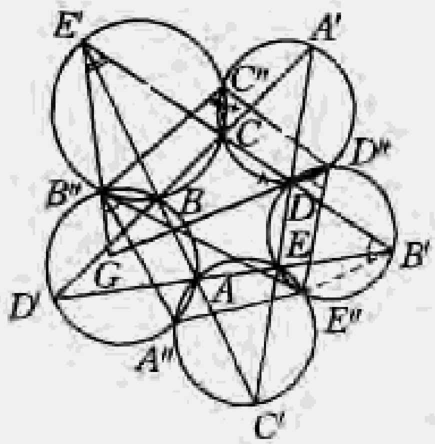


图 4－92

如图 4－94，设五边形 $ABCDE$ 各边的延长线相交于点 A'、B'、C'、D'、E'，得到五个三角形 $\triangle ABD'$、$\triangle BCE'$、$\triangle CDA'$、$\triangle DEB'$、$\triangle EAC'$，它们的外接圆顺次相交于点 C''、B''、D''、E''、A''. 连结 $E''B''$、$E''D''$、$D''C''$、$C''B''$、$C''C$，延长 $D''D$ 和 $E'B''$交于 G.

注意由 $E'C'$、$C'D$、$E'B'$、AB' 四直线所确定的完全四边形，由它们所确定的四个三角形($\triangle AEC'$、$\triangle DEB'$、$\triangle E'B'A$、$\triangle DE'C'$)中，设$\triangle AEC'$和$\triangle DEB'$的外接圆相交于另一点 E''，则$\triangle E'B'A$ 之外接圆也必过 E''点. 注意到由 $E'B'$、$B'D'$、AE'、$D'C$ 四条直线所确定的完全四边形，由于$\triangle E'BC$和$\triangle D'BA$ 的外接圆交于点 B''，故$\triangle E'B'A$ 的外接圆亦过点 B''. 从而点 B''、E''、B'、E' 四点共圆，$\angle GB''E'' = \angle E'B'E''$.

又 $\angle E'B'E'' = \angle GD''E''$，所以 $\angle GB''E'' = \angle GD''E''$. 故过

B''、E''、D'' 的圆必过点 G.

四边形 $CDD''C''$ 内接于圆，$\angle GDE' = \angle D''C''C$，又 $\angle GE'D = \angle B''C''C$，所以 $\angle B''C''D'' + \angle E'GD = \angle GDE' + \angle GE'D + \angle E'GD = 180°$.

故四边形 $GD''C''B''$ 必内接于圆. 因此过 B''、D''、E'' 之圆必过 C'' 点.

同理可证，过 B''、D''、E'' 之圆必过 A'' 点. 从而 A''、B''、C''、D''、E'' 五点共圆.

参考文献 [21，pp. 223～224].

（张文华）

三角形的第一 Lemoine 圆（First lemoine circle of triangle） 过三角形陪位重心作三边的平行线与各边相交的六个交点共圆.

陪位重心：设△ABC 的三条中线 AM、BN、CL 的交点为 G（重心）. 过 A 作 AM' 使 $\angle CAM' = \angle BAM$，作 BN' 使 $\angle ABN' = \angle CBN$，作 CL' 使 $\angle ACL' = \angle BCL$，则 AM'、BN'、CL' 三线共点于 K，这个点就称为三角形的陪位重心，AM'、BN'、CL' 称为陪位中线.

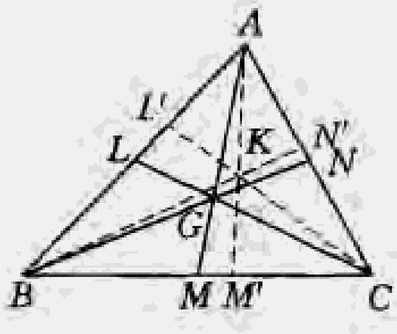


图 4-93

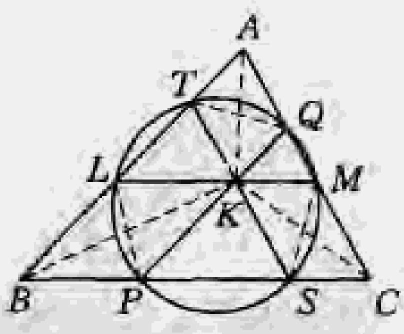


图 4-94

该圆于 1873 年为 Lemoine 所得到.

设 K 为△ABC 陪位重心，过 K 作 $LM \parallel BC$ 交 AB、AC 于 L、M，作 $PQ \parallel AB$ 交 BC、AC 于 P、Q，作 $ST \parallel AC$ 交 BC、AB 于 S、T.

连结 TQ、AK，因为四边形 $ATKQ$ 是平行四边形，所以 TQ 与 AK 互相平分. 因为 AK 是 $\triangle ABC$ 的陪位中线，所以过 K 点的关于 BC 的逆平行线也被 AK 平分，故而 TQ 为关于 BC 的逆平行线.

于是 $\angle AQT=\angle ABC=\angle ALM$，$T$、$L$、$M$、$Q$ 四点共圆. 同理可证 Q、P、S、M 四点共圆，T、L、P、S 四点共圆，从而得到 T、L、P、S、M、Q 六点共圆.

参考文献 [18，p. 216].

（涂荣豹）

三角形的第二 Lemoine 圆（Second lemoine circle of triangle） 过三角形陪位重心作各边的逆平行线与各边相交的六个交点共圆.

该圆于1873年为 Lemoine 所得到.

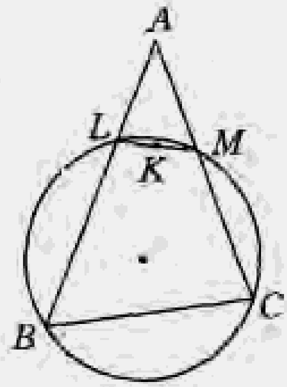


图 4-95

逆平行线：过 $\triangle ABC$ 内任一点 K，作直线交 AB、AC 于 L、M，使 $\triangle AML \backsim \triangle ABC$，但 $LM \nparallel BC$，则称 ML 为过 K 关于 BC 的逆平行线. 三角形有三类这样的逆平行线. 若 K 是陪位重心，则 K 将平分过 K 的三条逆平行线.

设 K 是陪位重心，LM、PQ、ST 是过 K 点的逆平行线. 因为

$\angle ALM=\angle C$，$\angle AML=\angle B$，

$\angle BST=\angle A$，$\angle BTS=\angle C$，

$\angle CQP=\angle B$，$\angle CPQ=\angle A$，

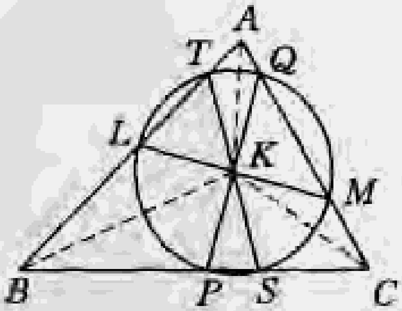


图 4-96

所以 $\angle ALM=\angle BTS$，$\triangle KTL$ 是等腰三角形，其两腰 $KL=KT$.

同理有 $KP=KS$，$KM=KQ$.

又陪位重心 K 平分过 K 点的逆平行线，所以又有 $KL=KM$，$KP=KQ$，$KS=KT$.

这样 L、P、S、M、Q、T 六点到 K 点的距离相等，从而这六点

共圆.

参考文献 [18,pp.214～215].

(涂荣豹)

Tucker 圆(Tucker circle) 设 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心,A' 是 AK 上的点.

(1) 若过 A' 作 AB 的平行线交 KB 于 B',过 A' 作 AC 的平行线交 KC 于 C',则 $B'C' /\!/ BC$.

(2) $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边(所在直线)的六个交点共圆,该圆称为 $\triangle ABC$ 的Tucker 圆.

该结论是由英国数学家 Tucker(1832～1905)提出的,故该圆被命名为 Tucker 圆.当 A' 点在 AK 上变动时,就可以得到一群圆,称它们为 Tucker 圆系.三乘比圆(第一 Lemonie 圆)和余弦圆(第二 Lemonie 圆)都属于 Tucker 圆系.

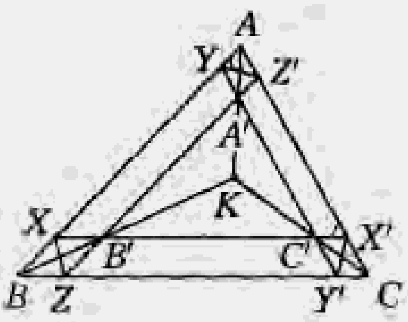


图 4-97

(1) 由于 $KB':KB = KA':KA = KC':KC$,所以 $B'C' /\!/ BC$.同理 $A'B' /\!/ AB$,$A'C' /\!/ AC$.K 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的外相似中心.

(2) 如图 4-97,设 $A'B'$(所在直线)分别交 BC、AC 于 Z、Z',$B'C'$ 分别交 AB、AC 于 X、X',$A'C'$ 分别交 AB、BC 于 Y、Y'.

由于四边形 $AYA'Z'$ 是平行四边形,AA' 平分 YZ'.又由于 K 是 $\triangle ABC$ 的陪位重心,因此 YZ' 必是 BC 的逆平行线,$\angle AYZ' = \angle ACB = \angle AX'X$,故 Y、Z'、X'、X 四点共圆.

同理,X、Z、Y'、Y 四点共圆,Z'、Z、Y'、X' 四点共圆.

显然,上述三个圆实为同一圆,故 X、X'、Y、Y'、Z、Z' 六点共圆.

显然,XZ、$Y'X'$、YZ' 是上述圆中的三条等弦.因此 Tucker 圆也可这样确定:作 $\triangle ABC$ 的三边的逆平行线段 YZ'、$X'Y'$、XZ(其

端点分别在另两边上)，若这三条逆平行线相等，则它们的六个端点共圆，该圆称为 Tucker 圆.

参考文献　[14,p.192],[22,pp.346～347].

(张文华)

泰勒圆(Taylor circle)　三角形每边上高的垂足在另两边上的射影共六点在同一圆周上.这圆称为三角形的泰勒圆.

设$\triangle ABC$三条高AH、BI、CJ的垂足分别为H、I、J，它们在另两边上的射影分别为H'、H''，I'、I''，J'、J''.

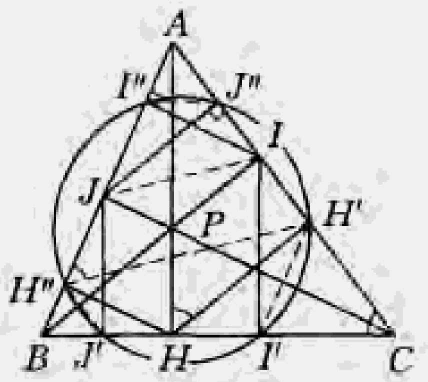


图 4-98

因为BI、CJ是高，所以B、C、I、J四点共圆，得$\angle AJI=\angle C$.

因为I''、J''分别为I、J的射影，所以I、J、I''、J''四点共圆，得$\angle AJ''I''=\angle AJI=\angle C$，从而有$I''J''\parallel BC$.

由于H'、H''是H的射影，所以A、H''、H、H'四点共圆，$\angle AH''H'=\angle AHH'=90°-\angle HAC=\angle C$，于是$\angle AJ''I''=\angle AH''H'$，推得$H'$、$J''$、$I''$、$H''$四点共圆.

同理可得，$I'H'\parallel AB$，$H''J'\parallel AC$，以及I'、H'、J''、H''四点共圆和J'、I'、I''、H''四点共圆.

由$I'H'\parallel AB$，$H''J'\parallel AC$，得$\angle CI'H'=\angle B$，$\angle BH''J'=\angle A$.

$$
\begin{aligned}
\text{而}\ \angle H'H''J' &= 180°-\angle AH''H'-\angle BH''J' \\
&= 180°-\angle C-\angle A \\
&= \angle B=\angle CI'H',
\end{aligned}
$$

因而J'、I'、H'、H''四点共圆.故I'、H'、J''、H''、J'五点共圆，进而得I'、H'、J''、I''、H''、J'六点共圆.

参考文献　[18,p.216].

(涂荣豹)

Brocard 圆(**Brocard circle**) $\triangle ABC$ 的外心 O,陪位重心 K,正、负 Brocard 点 Q、Q',直线 BQ 与 CQ' 的交点 A',直线 CQ 与 AQ' 的交点 B',直线 AQ 与 BQ' 的交点 C',此七点共圆.此圆以 OK 为直径,称为 Brocard 圆.

如图 4-99,$\angle QAB=\angle QBC=\angle QCA=\angle Q'AC=\angle Q'CB=\angle Q'BA=\omega$($\omega$ 为 Brocard 角,参见 **Brocard 点**).

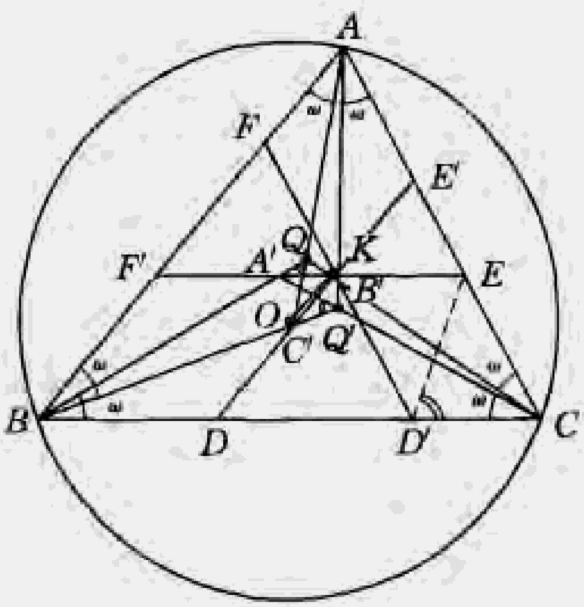


图 4-99

过 A' 作 $EF'\parallel BC$ 分别交 AC、AB 于 E、F',再过点 B' 作 $D'F\parallel AC$ 分别交 BC、CA 于 D'、F.设 EF' 与 $D'F$ 交于点 K'.

通过计算可以证明:$K'E\cdot K'F'=2R^2\operatorname{tg}\omega=K'D'\cdot K'F$($R$ 为外接圆半径),D'、E、F、F' 四点共圆,从而 $\angle K'D'E=\angle AF'K'=\angle B$.又四边形 $K'D'CE$ 是平行四边形,$D'E$ 被 CK' 平分,$\angle CED'=\angle K'D'E$,所以 $\angle CED'=\angle B$,$D'E$ 是 AB 的逆平行线.既然 CK' 平分 AB 的逆平行线 $D'E$,故 CK' 必是 $\triangle ABC$ 的陪位中线.

同样地,若过 C' 作 $DE'\parallel AB$,分别交 BC、CA 于 D、E',并记 DE'、EF' 的交点为 K'',DE' 与 $D'F$ 的交点为 K''',则同理可证 BK''

和 AK''' 也是 $\triangle ABC$ 的倍位中线，从而 CK'、BK''、AK''' 交于陪位中心 K. 用反证法可以证明，K'、K''、K''' 必与 K 重合. 可见 EF'、$D'F$、DE' 都通过点 K.

由于 $\angle A'BC=\angle A'CB=\omega$，$A'$ 在 BC 的中垂线上，又由于 $EF' \parallel BC$，所以 $\angle OA'K=90°$，即 A' 点在以 OK 为直径的圆上. 同理可证 B'、C' 也在以 OK 为直径的圆上，从而 O、K、A'、B'、C' 五点共圆.

又 $\angle A'QC'=\angle QAB+\angle QBA=\omega+(\angle B-\omega)=\angle B=\angle A'KC'$，$\angle A'Q'C'=\angle Q'CB+\angle Q'BC=\omega+(\angle B-\omega)=\angle B=\angle A'KC'$. 所以 Q、Q' 都在上述圆上.

故 O、K、A'、B'、C'、Q、Q' 七点共圆，且该圆以 OK 为直径.

Brocard 圆有很多有趣的性质. 例如，设 A'' 是 $\odot QCA$ 与 $\odot Q'AB$ 的交点，B'' 是 $\odot QAB$ 与 $\odot Q'BC$ 的交点，C'' 是 $\odot QBC$ 与 $\odot Q'CA$ 的交点，则 A''、B''、C'' 均在 Brocard 圆上，从而，外心 O，陪位重心 K，正、负 Brocard 点 Q、Q'，以及 A'、B'、C'、A''、B''、C'' 这十点共圆.

如图 4－100，A'' 是 $\odot Q'BC$ 与 $\odot QAB$ 的交点，C' 是 AQ 与 BQ' 的交点，连 $A''Q$、$A''Q'$，则 $\angle QA''A=\angle ACQ=\omega$(Brocard 角)，$\angle AA''Q'=\angle ABQ'=\omega$，所以 $\angle QA''Q'=2\omega$. 但 $\angle QC'Q'=$

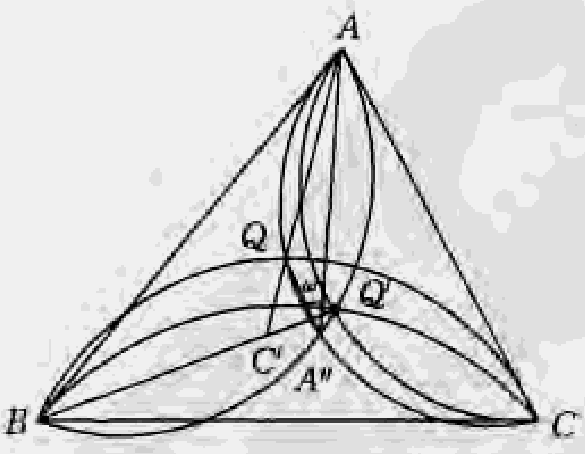


图 4－100

$\angle C'AB + \angle ABC' = 2\omega$(参见 **Brocard 点**),所以点 A'' 点必在 $\odot C'QQ'$ 上,即 A'' 点必在 Brocard 圆上.

参考文献 [18,p.217],[22,pp.338~361].

(张文华)

Fuhrmann 圆(Fuhrmann circle) 在$\triangle ABC$ 中,H 是垂心,I 是内心(或旁心),N 是与 I 对应的 Negel 点.连结 AI、BI、CI 分别交外接圆于 A'、B'、C',这三点关于 BC、CA、AB 的对称点分别为 A_2、B_2、C_2.又 A_1、B_1、C_1是 N 点在 AH、BH、CH 上的投影,则 A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2、N、H 八点共圆,此圆以 NH 为直径,称为 Fuhrmann 圆.

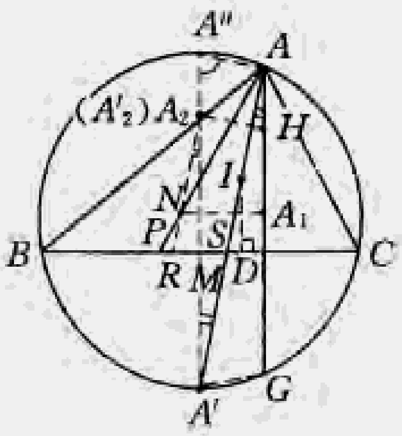


图 4-101

如图 4-101,作 $ID \perp BC$ 于 D,连 AN 交 BC 于 P,由于 I 是$\triangle ABC$ 的内心,N 是 I 的等截共轭点,故 $BP = DC = \frac{1}{2}(a+b-c)$,其中 a、b、c 是$\triangle ABC$ 的三边之长.

过 N 作 AI 的平行线交 $A'A''$(BC 的中垂线)于 A_2',则 $PR : PS = PN : PA$,

$PR = \frac{PS \cdot PN}{PA}$.由于$\frac{PN}{PA} = \frac{(b+c-a)}{(a+b+c)}$,

$$PS = BS - BP = \frac{ac}{(b+c)} - \frac{1}{2}(a+b-c)$$
$$= \frac{(c-b)(a+b+c)}{2(b+c)},$$

故
$$PR = PS \cdot \frac{PN}{PA} = \frac{(c-b)(a+b+c)}{2(b+c)} \cdot \frac{(b+c-a)}{(a+b+c)}$$
$$= \frac{(b+c-a)(c-b)}{2(b+c)},$$

又
$$SD = SC - DC = \frac{ab}{(b+c)} - \frac{1}{2}(a+b-c)$$

$$= \frac{(c+b+a)(c-b)}{2(b+c)},$$

$\therefore PR = SD, RM = MS$($M$ 是 BC 中点).

$\therefore \text{Rt}\triangle RMA_2' \cong \text{Rt}\triangle SMA', MA_2' = MA'$，即 A_2' 必与 A_2 重合.

设 AH 延长后交外接圆于 G，则 H、G 关于 BC 对称，所以 $\angle A'A_2H = \angle A_2A'G = \angle A'A''A$. 又 $\angle NA_2A' = \angle A''A'A$，所以 $\angle NA_2H = \angle A''AA' = 90°$. 故点 A_2 应在以 NH 为直径的圆上.

同理，B_2、C_2 也在以 NH 为直径的圆上.

又 $\angle NA_1H = 90°$，则点 A_1 必在以 NH 为直径的圆上. 同理，点 B_1、C_1 也在以 NH 为直径的圆上.

综上所述，点 N、H、A_2、B_2、C_2；A_1、B_1、C_1 八点共圆，NH 是该圆的一条直径.

参考文献　[18，p. 220]，[14，pp. 459～460].

（张文华）

八点圆(Eight point circle)　四边形 $ABCD$ 中，$AC \perp BD$，P、Q、R、S 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，由 P、Q、R、S 向对边引垂线，垂足分别是 P'、Q'、R'、S'，则 R'、P、Q、S'、P'、R、Q'、S 八点共圆.

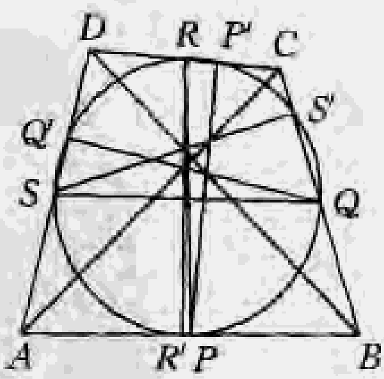


图 4－102

该八点圆是在 1944 年由 Cincinnati 的 Louis Brand 提出的.

四边形 $ABCD$ 各边中点 P、Q、R、S 是一个平行四边形的顶点，其各边都与相应的对角线 AC、BD 平行，由于 $AC \perp BD$，所以平行四边形 $PQRS$ 是矩形，对角线 PR、QS 是矩形外接圆的直径.

因为 $\angle PP'R = \angle QQ'S = \angle RR'P = \angle SS'Q = 90°$，所以

P'、Q'、R'、S'都在矩形外接圆上.

因此,P、Q、R、S、P'、Q'、R'、S'八点共圆.

参考文献 [15,pp.283~284].

(涂荣豹)

九点圆(Nine point circle) 任意三角形三条高线的垂足、三边中点以及顶点与垂心的三条连线的中点,共九点都在半径为$\frac{1}{2}R$(三角形外接圆半径)的圆上,且圆心是外心与垂心所连线段的中点.这个圆称为九点圆,这是庞斯莱命名的.

九点圆是几何上一个著名的问题.据载在英国1804年的一种杂志上,B. Bevan提出过这个问题.其实,欧拉早在1765年就证明了"垂三角形和中位三角形有同一外接圆".所以有时人们常把这个定理归功于欧拉,并称该圆为"欧拉圆".九点圆的第一个完整的证明是庞斯莱在1821年发表的,所以应称该圆为"庞斯莱圆".1822年,费尔巴哈在他的论文里也给出证明,还添进很多出人意料的性质,以致后人常把九点圆叫做"费尔巴哈圆".

设$\triangle ABC$中,A'、B'、C'为三边中点,D、E、F是三高的垂足,H是垂心,O是外心,K、L、M分别是AH、BH、CH的中点.

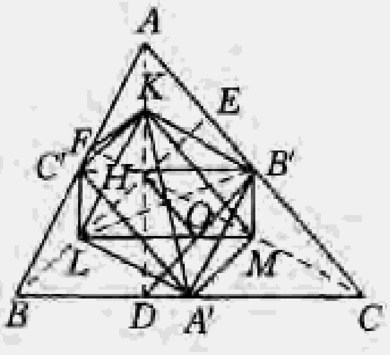


图4-103

因为BC是$\triangle ABC$和$\triangle HBC$的公共边,所以由中点连成的线段$B'C'$和LM都平行于BC,且等于BC长的一半.因此四边形$B'C'LM$是平行四边形.又$B'M$和$C'L$都平行于AD,而$AD \perp BC$,所以四边形$B'C'LM$是矩形.同理四边形$A'B'KL$和$C'A'MK$也都是矩形.

从而$A'K$、$B'L$、$C'M$是同一圆上的三条直径.又$\angle A'DK = 90°$,则D在以$A'K$为直径的圆周上.同理E、F也都在这个圆上.即A'、B'、C'、D、E、F、K、L、M九点共圆.

因为 $\triangle A'B'C' \cong \triangle KLM$，且彼此可从对方绕圆心(即 $A'K$ 中点)旋转 180°得到. $\triangle ABC$ 的外心 O 是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心，$\triangle KLM$ 的垂心是 H，旋转 180°后，这两个三角形的垂心也互换位置，即 OH 以圆心为中点. 所以九点圆的圆心是 $\triangle ABC$ 的外心与垂心连线的中点.

参考文献 [17, pp. 151～152], [19, pp. 301～303], [27, pp. 23～25].

(涂荣豹)

欧拉圆(Euler circle) 见九点圆.

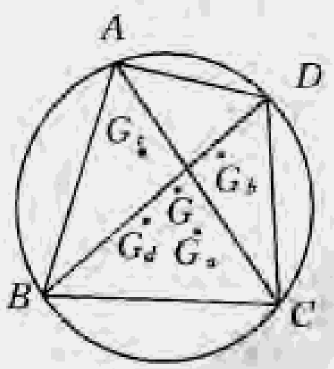
庞斯莱圆(Poncelet circle) 见九点圆.

费尔巴哈圆(Feuerbach circle) 见九点圆.

形心圆(Cyclic centroids) 设 A、B、C、D 四点共圆，G_a、G_b、G_c、G_d 分别是 $\triangle BCD$、$\triangle ACD$、$\triangle DAB$、$\triangle CAB$ 的形心(重心)，则这四个形心也共圆.

该问题由 Colorado 大学的 D. P. Ambrose 提出，并由 Michael Galdberg 解答，见《美国数学月刊》(1965)1 026 页，问题 E1 740.

一些难度很大的几何问题常常可以用力学的方法迅速解决. 设 A、B、C、D 四点上各悬挂 1 单位质量的物质，则四个形心处相当于各悬挂了 3 个单位质量的物质. 再设这个系统的重心为 G，则 G 点处的质量是 4 个单位，且 G 在线段 DG_d 上，以 1∶3 将此线段



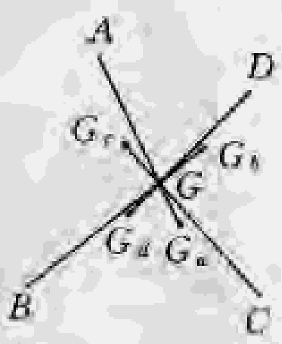


图 4-104

分成两段. 同样 G 也位于 AG_a、BG_b、CG_c 上，以 1∶3 将它们均分成两段. 于是以相似系数 $-\frac{1}{3}$ 作关于 G 点的伸缩变换，就使 A、B、C、D 变为 G_a、G_b、G_c、G_d. 但经过伸缩变换，圆仍然变成圆. 由 A、B、C、D 共圆，知 G_a、G_b、G_c、G_d 也共圆.

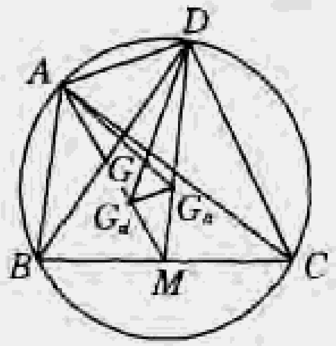


图 4－105

如果采用几何方法也可得证. 如图 4－105，取 BC 的中点 M，连结 MA、MD，由于 G_d 是 $\triangle ABC$ 的重心，G_d 在 AM 上，且 $MG_d=\frac{1}{3}AM$；又由于 G_a 是 $\triangle BCD$ 的重心，G_a 在 DM 上，且 $MG_a=\frac{1}{3}DM$，所以 $G_aG_d \parallel AD$，且 $G_aG_d=\frac{1}{3}AD$.

连结 AG_a、DG_d，它们相交于点 G，且 $G_aG : GA = 1:3$，$G_dG : GD = 1:3$. 可见 G 点是 AG_a 上的一个定点，它内分 G_aA 成1∶3.

同理可证，BG_b、CG_c 也通过定点 G，且 $G_bG : GB = 1:3$，$G_cG : GC = 1:3$.

由于 G_aA、G_bB、G_cC、G_dD 均过定点 G，且 $G_aG : GA = G_bG : GB = G_cG : GC = G_dG : GD = 1:3$，故四边形 $G_aG_bG_cG_d$ 是四边形 $ABCD$ 的位似形，其位似中心是 G，其相似比为 $\frac{1}{3}$. 既然四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，故四边形 $G_aG_bG_cG_d$ 必是圆内接四边形，即 G_a、G_b、G_c、G_d 必共圆.

上述结论可推广到圆内接任意多边形的情形，即由圆的任意内接多边形 n 个顶点，可以确立与之相类似的多边形，其 n 个顶点就是 n 个小多边形（$n-1$ 边形）的形心，这 n 个小多边形是由原多边形 n 个顶点中的 $n-1$ 个顶点构成.

在三维空间，也有类似的关系.

参考文献 [37,pp.198～199].

（涂荣豹 张文华）

Catalan 定理(Catalan theorem) 由圆内接四边形的任意三个顶点构成的四个三角形的垂心共圆.

该定理是比利时数学家 E. C. Catalan(1814～1894)于 1860 年发现的.

如图 4－106,四边形 $A_1A_2A_3A_4$内接于⊙O,$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_1A_2A_4$、$\triangle A_1A_3A_4$的垂心分别是 H_4、H_1、H_3、H_2.

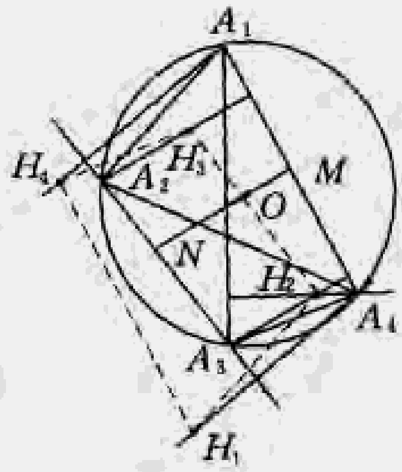


图 4－106

作 $OM\perp A_1A_4$ 于 M. 在 $\triangle A_1A_2A_4$ 中, $A_2H_3=2OM$, $A_2H_3\parallel OM$. 在 $\triangle A_1A_3A_4$ 中,$A_3H_2=2OM$,$A_3H_2\parallel OM$. 所以 $A_2H_3 \underline{\underline{\parallel}} A_3H_2$,四边形 $A_2A_3H_2H_3$ 是平行四边形,$H_2H_3 \underline{\underline{\parallel}} A_2A_3$.

同理可证：$H_3H_4 \underline{\underline{\parallel}} A_3A_4$,

$H_4H_1 \underline{\underline{\parallel}} A_1A_4$,$H_1H_2 \underline{\underline{\parallel}} A_2A_1$.

所以四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 全等.

既然四边形 $A_1A_2A_3A_4$有外接圆,则四边形 $H_1H_2H_3H_4$必有外接圆,即 H_1、H_2、H_3、H_4四点共圆.

参考文献 [14,p.190],[38,pp.255～256].

（张文华）

施泰纳定理(Steiner theorem) 对于完全四边形的四个三角形有：(1) 各外接圆交于一点,这一点叫做施泰纳点；(2) 四个外心共圆,并且它通过施泰纳点,这个圆叫做施泰纳圆.

该定理是施泰纳于 1828 年发现的,1938 年 Miquel 重新发现了它,所以有时也称其为 Miquel 点、Miquel 圆.

(1) 设$\triangle BEC$ 和$\triangle DCF$ 的外接圆交于点 P,连结 CP、DP、EP,如图,则有 $\alpha=\alpha'$,$\beta=\beta'$. 又 $\alpha+\beta+\angle A=180°$,所以$\alpha'+$

$\beta' + \angle A = 180°$，因此 A、E、P、D 四点共圆，也就是说 $\triangle AED$ 的外接圆通过 P 点．同理，$\triangle ABF$ 的外接圆也通过 P 点．

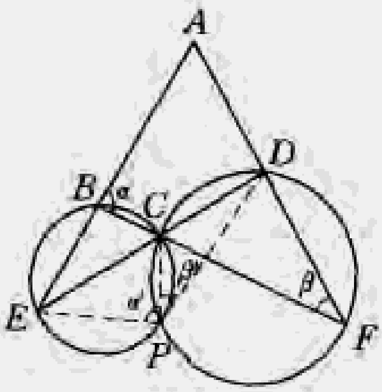


图 4－107

（2）设 $\triangle CDF$、$\triangle AED$、$\triangle ABF$、$\triangle BEC$ 的外心分别为 O_1、O_2、O_3、O_4，则 EP 是圆 O_2、O_4 的公共弦，所以 $O_2O_4 \perp EP$．同理，$O_1O_2 \perp PD$．由于 $\angle O_4O_2O_1$ 与 $\angle A$ 同为 $\angle EPD$ 的补角，所以 $\angle O_4O_2O_1 = \angle A$．同理，$\angle O_4O_3O_1 = \angle A$．因此 O_2、O_4、O_1、O_3 四点共圆．因为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_4$ 相交于 C、P，所以 $\angle CEP = \angle O_1O_4P$，$\angle CDP = \angle O_4O_1P$，故 $\angle O_4PO_1 = \angle EPD = 180° - \angle A = 180° - \angle O_4O_2O_1$．因此 O_2、O_4、P、O_1、O_3 五点共圆．

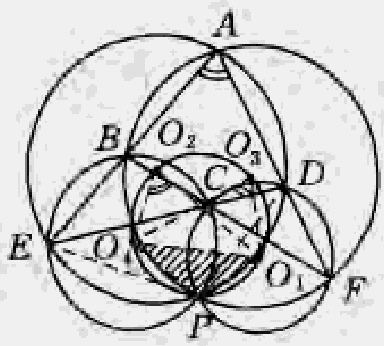


图 4－108

参考文献　［38，pp. 232～234］．

（郑君文）

施泰纳点（Steiner point）　**见施泰纳定理．**

施泰纳圆（Steiner circle）　**见施泰纳定理．**

Miquel 点（Miquel point）　（1）即施泰纳点，**见施泰纳定理**；（2）在 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 所在直线上各取一点 D、E、F，则 $\odot AEF$、$\odot BDF$、$\odot CDE$ 交于点 P，这点 P 叫做 D、E、F 关于 $\triangle ABC$ 的 Miquel 点，这三个圆叫做 $\triangle ABC$ 的 Miquel 圆，$\triangle DEF$ 叫做 $\triangle ABC$ 关于点 P 的 Miquel 三角形．

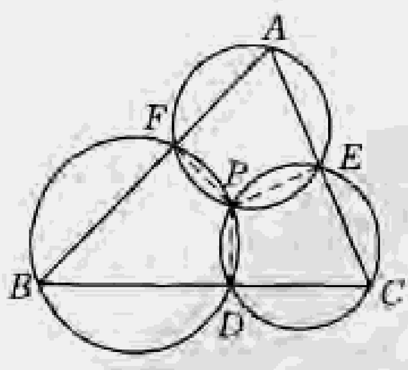


图 4－109

1838 年 A. Miquel 对（2）作了表述及证明，但谁先提出，尚属疑问．

设 ⊙AEF 与 ⊙BDF 相交于 P，连结 PD、PE、PF，则 $\angle AEP=\angle BFP$，$\angle BFP=\angle CDP$，所以 $\angle AEP=\angle CDP$，因此 C、D、P、E 四点共圆，即 P 在 ⊙CDE 上，也就是说，三圆 ⊙AEF、⊙BDF、⊙CDE 交于一点 P.

推论 1 以△ABC 的诸 Miquel 圆的圆心为顶点的三角形，必与原三角形 ABC 相似.

推论 2 △ABC 关于定点 P 的诸 Miquel 三角形，都是同向相似的.

推论 3 如果两同向相似三角形的对应顶点在一定三角形边上，则此两三角形有同一的 Miquel 点.

参考文献 ［22，pp. 167～171］.

（郑君文）

Brocard 点（Brocard point） 对于△$A_1A_2A_3$，过 A_3 作圆 C_3 与 A_1A_2 相切于点 A_1，过 A_1 作圆 C_1 与 A_2A_3 相切于点 A_2，过 A_2 作圆 C_2 与 A_3A_1 相切于 A_3，则此三圆相交于一点 Q. 此点称为 Brocard 点.

Brocard 点是 19 世纪五六十年代兴起的近世几何中的基本概念之一. 此点首先由 Crell 于 1816 年发现，同时雅可比及其他数学家亦曾发现其若干性质，但当时未予深入研究. 直至 1875 年，法国军官 H. Brocard 重新发现了此点，研究三角形几何学又盛行起来. 据统计报告，到 1895 年，欧洲关于这方面的研究文章，出版的有 600 多种，其中较著名的有 Brocard、Neuberg、Lemonie、Mclay、Tucker 等人的文章.

如图 4－110，设圆 C_3、圆 C_2 相交于点 Q. 由于 A_1A_2 是圆 C_3 的切线，$\angle QA_1A_2=\angle A_1A_3Q$，由于 A_1A_3 是圆 C_2 的切线，$\angle A_1A_3Q=\angle QA_2A_3$，所以 $\angle QA_2A_3=\angle QA_1A_2$. 可见 Q 必在圆 C_1 上. 从而 C_1、C_2、C_3 三圆交于一点 Q. 记 $\angle QA_1A_2=\angle QA_2A_3=\angle QA_3A_1=\omega$，则 ω 称为 Brocard 角，A_1Q、A_2Q、A_3Q 称为 Brocard 线.

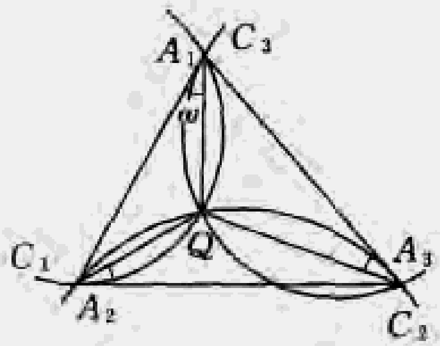


图 4-110

同样的道理，若过 A_3 作圆 C_3' 与 A_1A_2 相切于 A_2，过 A_1 作圆 C_1' 与 A_2A_3 相切于 A_3，过 A_2 作圆 C_2' 与 A_1A_3 相切于 A_1，则 C_1'、C_2'、C_3' 三圆亦相交于一点 Q'，此点亦称为 Brocard 点. 为区别起见，Q 称为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的正 Brocard 点，Q' 称为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的负 Brocard 点.

Brocard 点有很多有趣的特性，例如，三角形的两个 Brocard 点是等角共轭点，$\cot\omega = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4\Delta}$.

参考文献 [22, pp. 333～335].

（张文华）

费尔巴哈定理(Feuerbach theorem) 三角形的九点圆与三角形的内切圆和旁切圆均相切.

本定理是费尔巴哈于 1822 年发现的，它阐述了九点圆的一个重要性质. 许多人也把九点圆称为费尔巴哈圆，因为费尔巴哈重新发现了欧拉的有关发现，并添进了更多的出人意料的性质.

如图 4-111，$\triangle ABC$ 中，A'、B'、C' 分别是 BC、CA、AB 的中点，$\odot A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 的九点圆. $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，它与 BC 相切于点 X，$\odot I_a$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，它与 BC 相切于点 X_a.

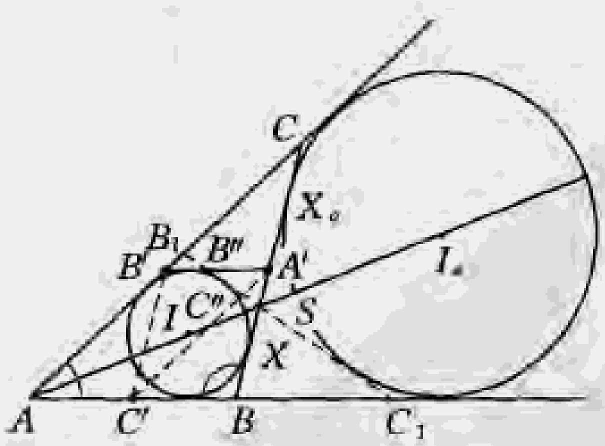


图 4-111

作$\odot I$与$\odot I_a$的另一条内公切线分别交AC、AB的延长线于B_1、C_1，交$A'B'$、$A'C'$于B''、C''.

设$BC=a, CA=b, AB=c, p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

$\because CX_a=BX=p-b$,

$\therefore A'X=A'X_a=\frac{1}{2}a-(p-b)=\frac{1}{2}(b-c)$.

设B_1C_1交BC于点S，显然A、I、S、I_a均在$\angle A$的平分线上，故有$\frac{SC}{SB}=\frac{b}{c}$，$\frac{SC}{SC+SB}=\frac{b}{b+c}$，故$SC=\frac{ab}{b+c}$.

同理，$SB=\frac{ac}{b+c}$.

$\therefore SA'=\frac{1}{2}(SC-SB)=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}$.

由于$A'B' \parallel AB$，$\triangle SA'B'' \backsim \triangle SBC_1$，

$$A'B'':BC_1=SA':SB,$$

$$\therefore A'B''=\frac{a(b-c)}{2(b+c)}\cdot\frac{b-c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{(b-c)^2}{2c}.$$

同理可证　$A'C''=\frac{(b-c)^2}{2b}$.

又$A'B'=\frac{c}{2}$，$A'C'=\frac{b}{2}$.

$$\therefore A'B''\cdot A'B'=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2, A'C''\cdot A'C'=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

今以$\odot A'\left(\frac{b-c}{2}\right)$为反演基圆进行反演变换，则$B'$的反点是$B''$，$C'$的反点是$C''$，$\odot A'B'C'$的象是直线$B_1C_1$. 又由于$\odot I$、$\odot I_a$均与反演基圆$\odot A'\left(\frac{b-c}{2}\right)$正交(因$A'X=A'X_a=\frac{1}{2}(b-c)$)，所以在上述反演变换下$\odot I$和$\odot I_a$都不变. 今已知$B_1C_1$与$\odot I$和$\odot I_a$相切，由于反演变换具有保角性，故原象$\odot A'B'C'$与$\odot I$、$\odot I_a$均相切.

参考文献 [21,p.92],[27,p.137].

(张文华)

Manheim 定理(Manheim theorem) 过定圆⊙I 外的一定点 A,作⊙I 的切线 AE、AF,又任意作⊙I 的切线与 AE、AF 交于 B、C,则$\triangle ABC$ 的外接圆恒切于与 AB、AC 相切的定圆.

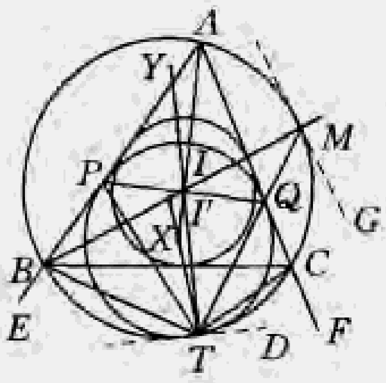


图 4-112

此定理实际上就是:若$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 位置一定,且内切圆⊙I 的位置也一定,则当第三边 BC 移动时,外接圆 ABC 恒切于与 AB、AC 相切的定圆.

在$\angle BAC$ 内作一个与 AB、AC 相切,并且与$\triangle ABC$ 外接圆相内切的⊙X,切点为 P、Q、T.连结 TB、TC 及 TP、TQ,可得 $\angle BTC=\angle ABC+\angle ACB$,$\angle APQ=\angle AQP=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$,以及 $\angle APQ=\angle PTQ=180^\circ-(\angle TPQ+\angle BPT)$.

作$\angle BTC$ 的平分线 TY,可得 $\angle CTY=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\angle PTQ$,从而 $\angle PTY=\angle CTQ$.

延长 TQ 交⊙ABC 于 M,过 T、M 分别作⊙ABC 的切线 TD、MG,得 $\angle MTD=\angle TMG$.但 TD 又是⊙X 的切线,故又有 $\angle MTD=\angle TQC$,从而有 $\angle TMG=\angle TQC$,因此得到 $MG\parallel AC$.于是推得 M 为$\overset{\frown}{AC}$ 的中点.由此可见,BM 为$\angle ABC$ 的平分线,$\angle CTQ=\frac{1}{2}\angle ABC$.

因为$\angle CTP=\angle CTQ+\angle PTQ=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB$,所以$\angle CTP>\angle CTY>\angle CTQ$,可见 TY 在 TQ、TP 之间,TY 必与 PQ 相交,设交点为 I'.

连结 BI'，由 $\angle BTI'=\angle CTI'=\angle APQ$，得 B、T、I'、P 四点共圆，从而有 $\angle PBI'=\angle PTI'=\angle CTQ=\frac{1}{2}\angle ABC$，$BI'$ 为 $\angle ABC$ 的平分线，即 I' 在 BM 上．

同理又可推得 CI' 是 $\angle ACB$ 的平分线，故 I' 为 $\triangle ABC$ 的内心，即 I' 与 I 重合．

最后根据 I 为定点，推得 P、Q 位置一定，从而圆 PTQ 是一定圆．可见，$\triangle ABC$ 的外接圆恒切于定圆$\odot PTQ$．

参考文献　[14，p. 451]．

（涂荣豹）

施泰纳圆系（Steiner system of circles）　有两个不同心的圆，其中一个落在另一个的内部．再画一串依次外切的圆，使它们与原先的两个圆都相切，若其最后一个又与这串圆的第一个相切，就构成施泰纳圆系．其条件是原先两圆的反演距离 δ 必须满足

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}.$$

首先，任意两个不相交的圆的反演距离定义为：在反演下这两个圆变成同心圆时，它们半径之比（较大者作分子，较小者作分母）的自然对数．即对两个不相交的圆 α 和 β，以一个适当的点（极限点）为反演圆心，就可将 α 和 β 反演成两个同心圆，半径分别为 a、b，满足 $a>b$（或 $a<b$），那么圆 α 和 β 的反演距离 $\delta=\ln\frac{a}{b}$．

当假设中原先的两个圆反演成两个同心圆，其他的圆就变成环状排列的一串全等的圆，它们的圆心构成一个正 n 边形，设 A 是环状排列的圆的圆心之一，T 是相应的圆与这一串圆中相邻圆的切点，O 是同一圆的圆心，外圆半径为 a，内圆半径为 b，则 $\triangle OAT$ 是直角三角形，且有

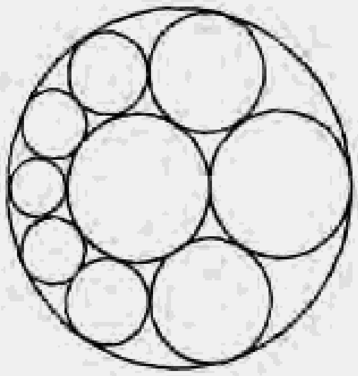


图 4－113

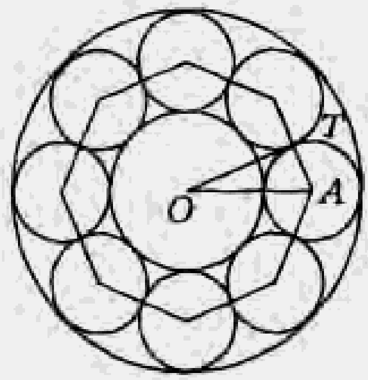


图 4－114

$$OA=\frac{a+b}{2},AT=\frac{a-b}{2},\angle AOT=\frac{\pi}{n}.$$

因为两个同心圆的反演距离是 $\delta=\ln\frac{a}{b}$，所以

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{AT}{OA}=\frac{a-b}{a+b}=\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1}.$$

因此，只要原先两个圆的反演距离 δ 满足方程

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}+1},$$

则施泰纳圆系就成立.

由上述方程可解出 e^{δ}，然后再求出 δ：

$$e^{\delta}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}=\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2=\left(\sec\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

$$\delta=2\ln\left(\sec\frac{\pi}{n}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right).$$

如果相切圆序列在绕行 d 圈以后闭合（$d>1$），则施泰纳圆

系仍然成立，只要在公式中用分数$\frac{n}{d}$代替n就行了.

参考文献 [27,pp. 144~146].

（涂荣豹）

Casey 定理(Casey theorem) (1) 设r_1、r_2分别是$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径，t_{12}是这两个圆的公切线长，则在反演变换下，$\frac{t_{12}^2}{r_1r_2}$保持不变. (2) 设四个圆O_1、O_2、O_3、O_4各切于另一圆O，t_{ij}表示圆O_i与圆O_j的公切线长，则$\pm t_{12}t_{34}\pm t_{13}t_{42}\pm t_{14}t_{23}=0$.

上述定理(1)是 J. Casey(1820~1891)于 1866 年发现的，它是反演变换中的一个重要不变式. (2) 可见 Casey 的 *A Sequel to Euclid* 一书，它是托勒密定理的推广，并有多人对此进行过研究.

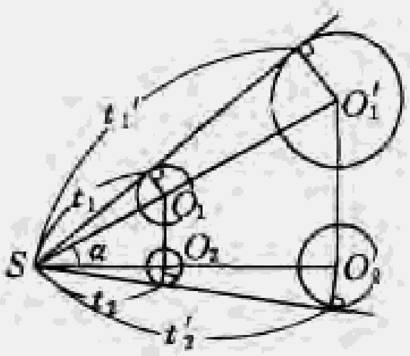


图 4-115

(1) 如图，设以S为反演中心，k^2为反演幂，把$\odot O_1$、$\odot O_2$分别反演变换为$\odot O_1'$、$\odot O_2'$，再设t_1、t_1'、t_2、t_2'分别为从S所作$\odot O_1$、$\odot O_1'$、$\odot O_2$、$\odot O_2'$的切线的长，且$O_1O_2=d$，$O_1'O_2'=d'$，则$d^2=SO_1^2+SO_2^2-2SO_1\cdot SO_2\cos\alpha$，即

$$d^2-r_1^2-r_2^2=t_1^2+t_2^2-2SO_1\cdot SO_2\cos\alpha, \qquad ①$$

同样可得

$$d'^2-r_1'^2-r_2'^2=t_1'^2+t_2'^2-2SO_1'\cdot SO_2'\cos\alpha. \qquad ②$$

因为$t_1t_1'=t_2t_2'=k^2$，$SO_1':SO_1=t_1':t_1$，$SO_2':SO_2=t_2':t_2$，所以$t_1'^2+t_2'^2=\frac{k^4}{t_1^2}+\frac{k^4}{t_2^2}=\frac{k^4}{t_1^2t_2^2}(t_1^2+t_2^2)$，

$$SO_1'\cdot SO_2'=\frac{t_1'}{t_1}\cdot\frac{t_2'}{t_2}\cdot SO_1\cdot SO_2=\frac{k^4}{t_1^2t_2^2}\cdot SO_1\cdot SO_2.$$

把它们代入②式，得

$$d'^2-r_1'^2-r_2'^2=\frac{k^4}{t_1^2t_2^2}(t_1^2+t_2^2-2SO_1\cdot SO_2\cos\alpha).$$

于是由①，得　$d'^2-r_1'^2-r_2'^2=\frac{t_1't_2'}{t_1t_2}(d^2-r_1^2-r_2^2)$.

但 $\frac{t_1'}{t_1}=\frac{r_1'}{r_1}$，　$\frac{t_2'}{t_2}=\frac{r_2'}{r_2}$，　所以$\frac{d'^2-r_1'^2-r_2'^2}{d^2-r_1^2-r_2^2}=\frac{r_1'r_2'}{r_1r_2}$，

即有　$$\frac{d'^2-(r_1'-r_2')^2}{r_1'r_2'}=\frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{r_1r_2}$$

和　$$\frac{d'^2-(r_1'+r_2')^2}{r_1'r_2'}=\frac{d^2-(r_1+r_2)^2}{r_1r_2}.$$

这里 $d^2-(r_1-r_2)^2$ 与 $d'^2-(r_1'-r_2')^2$ 分别是 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 与 $\odot O_1'$、$\odot O_2'$ 的外公切线长的平方，$d^2-(r_1+r_2)^2$ 与 $d'^2-(r_1'+r_2')^2$ 分别是它们的内公切线长的平方，因此经反演变换$\frac{t_{12}^2}{r_1r_2}$不变.

注意，上述反演中心 S 不能取在一圆的内部和另一圆的外部.

(2) 设圆 O_1、O_2、O_3、O_4都切于圆 O，它们的半径各为 r_1、r_2、r_3、r_4，当圆 O_i、O_j 和圆 O 都是外切或内切时，则 t_{ij}为外公切线长；当其一外切和一内切时，则 t_{ij}为内公切线长. 如果圆 O_1、O_3与圆 O 的切点分隔圆 O_2、O_4与圆 O 的切点，则

$t_{12}t_{34}+t_{14}t_{23}-t_{13}t_{24}=0$.（其他情况类同）

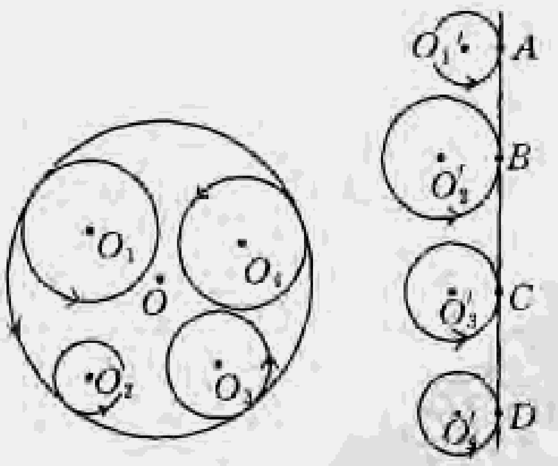


图 4－116

以$\odot O$ 上的一点为反演中心，于是$\odot O$ 反演变换成一直线，而

圆 O_1、O_2、O_3、O_4的反演变换为切于这直线的四个圆，设在该直线上的切点分别为 A、B、C、D，则据欧拉定理（有向线段）有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

又由(1)，得 $\frac{AB}{\sqrt{r_1'r_2'}}=\frac{t_{12}}{\sqrt{r_1r_2}}, \frac{BC}{\sqrt{r_2'r_3'}}=\frac{t_{23}}{\sqrt{r_2r_3}}$ 等，所以

$$t_{12}\cdot t_{34}\cdot\frac{\sqrt{r_1'r_2'}\sqrt{r_3'r_4'}}{\sqrt{r_1r_2}\sqrt{r_3r_4}}+t_{23}\cdot t_{14}\cdot\frac{\sqrt{r_2'r_3'}\sqrt{r_1'r_4'}}{\sqrt{r_2r_3}\sqrt{r_1r_4}}$$

$$=t_{13}t_{24}\cdot\frac{\sqrt{r_1'r_3'}\sqrt{r_2'r_4'}}{\sqrt{r_1r_3}\sqrt{r_2r_4}},$$

即 $t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}-t_{13}t_{24}=0$,

定理(2)的逆命题也成立.

参考文献 [21, pp. 148～151], [22, pp. 155～159], [38, pp. 270～271, p. 428].

（郑君文）

圆链(A chain of circles) 圆 C_0的半径为 1km，与直线 l 切于 Z 点. 圆 C_1半径为 1mm，在圆 C_0的右侧，且与圆 C_0及 l 相切. 由此向右画出一系列的圆 C_i，使 C_i与 C_0及 l 相切，并与前面的圆 C_{i-1}相切，直到 C_i非常大，以致不能再画出新的圆来. 在出现这种情形之前，可以画出多少个圆来？

该问题选自 A. P. Domoryad 所写的 *Mathematical Games and Pastimes* (1964)一书的问题 19，解答是从 C. Stanley Ogilvy 那里获得的(1974).

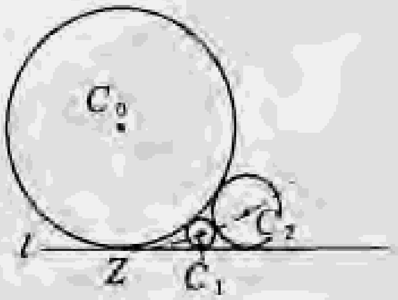


图 4-117

先把距离以 mm 为单位表示，则 C_1的半径为 1，C_0的半径为 10^6，对这一连串的圆关于圆 I 取反演变换，圆 I 的圆心设为 Z 点，半径为 $2\cdot10^6$.

因为直线 l 通过反演中心 Z，所以 l

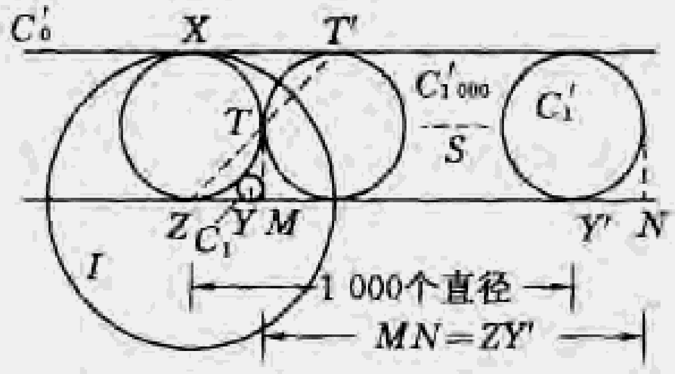


图 4-118

的反像就是自身，圆 I 与圆 C_0内切于 X，所以圆 C_0的反演像直线 C_0'与直线 l 双双与圆 C_0切于直径的两个端点上，所以$C_0' /\!/ l$，它们确定了一个狭长的条带形平面区域 S.

由于每个圆 C_i都与 C_0及 l 相切，所以它们的反演像 C_i'与 S 的两条边界相切. 这些圆除 C_0外均不经过反演圆心 Z 点，因此它们的反演像 C_i'也是一些圆，它们两两相切构成了一系列与圆 C_0大小相等且与 S 的边界相切的圆.

因为圆 C_1在反演圆 I 内，又临近圆心 Z，因而它的像 C_1'在圆 I 的外部，位于条带 S 中远离 I 的地方. 如果取 $i=1,2,3,\cdots$ 那么这一系列圆 C_i的反演圆 C_i'均沿指向 C_0的方向进入条带 S 内. 根据反演关系有

$$ZY\cdot ZY'=(2\cdot 10^6)^2,$$

即 $$2\cdot 10^3(ZY')=4\cdot 10^{12},$$

$$ZY'=2\cdot 10^9=1\,000(2\cdot 10^6)$$

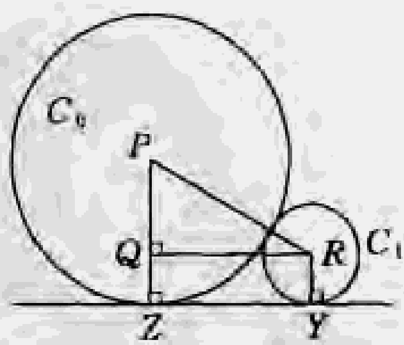


图 4-119

C_1和C_1'只能在Y和Y'处与l相切. 如图 4-119，$PR=10^6+1$，$PQ=10^6-1$，由勾股定理可得 $ZY=2\cdot 10^3$. 这说明 ZY' 恰好是 C_i' 直径的1 000 倍.

因为圆 I 的半径是圆 C_0半径的 2

倍，C_0和C_{1000}'切于T，所以T的反演像T'为直线ZT与直线C_0'的交点T'；C_{1000}'与I的切点W也是l与I的交点. 可见C_{1000}上的三个点T'、T和W反演为T、T'和W，所以C_{1000}'的反演像就是其自身，即$C_{1000} \equiv C_{1000}'$与$C_0$一样大. 这样，画出这一串圆的过程中，在向$C_{1000}$靠近时，圆逐渐加大，直到等于$C_0$时而得到$C_{1000}'$. 至此，这个圆链不能再扩展，$C_{1000}$就是其中最后一个圆.

这个圆链实际是关于C_0和l的施泰纳圆链的一部分，其中把l看成是一个半径为无穷大的圆.

参考文献 [37，pp. 180～183].

（涂荣豹）

（四）点的轨迹

阿波罗尼奥斯圆（Apollonius circle） 若一动点到两定点的距离之比等于两已知不相等线段之比，则该动点的轨迹是一个圆.

本题是由古希腊数学家阿波罗尼奥斯在他的著作《平面轨迹》中提出的.

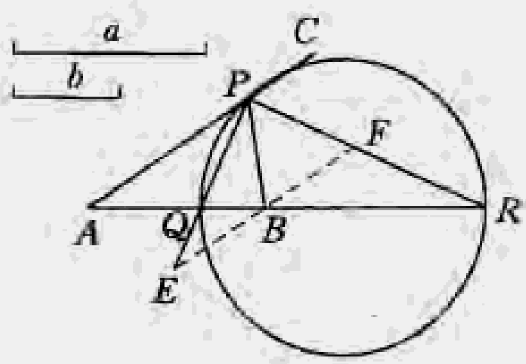


图 4-120

设A、B是两个定点，a、b是两条已知线段，$a \neq b$，动点P适合关系式$PA : PB = a : b$.

作$\angle APB$的平分线交AB于Q，作$\angle CPB$（$\angle APB$的邻补角）的平分线交AB的延长线于R. 由于PQ、PR是$\triangle PAB$的内、外角平分线，$AQ : QB = PA : PB = a : b$，$AR : BR = PA : PB = a : b$，即点$P$、$Q$内、外分$AB$成$a : b$，$Q$、$R$是两个定点. $\angle QPR = \angle QPB + \angle BPR = \frac{1}{2}\angle APB + \frac{1}{2}\angle BPC = 90°$，可见，动点$P$必

在以 QR 为直径的圆上.

另一方面,在以 QR 为直径的圆上任意取一点 P,连结 PA、PB、PQ、PR,过 B 作 PA 的平行线,交 PQ 的延长线于 E,交 PR 于 F. 则 $\triangle QAP \backsim \triangle QBE$,$\triangle RAP \backsim \triangle RBF$. 所以 $\frac{PA}{EB}=\frac{QA}{QB}=\frac{a}{b}$,$\frac{PA}{FB}=\frac{AR}{BR}=\frac{a}{b}$,所以 $\frac{PA}{EB}=\frac{PA}{FB}$,$EB=FB$,即 B 是 EF 的中点. 但 $\angle EPF=90°$,所以 $PB=EB$. 即 $PA:PB=a:b$.

这就证实了 P 点的轨迹是以 QR 为直径的圆,这个圆被称为阿波罗尼奥斯圆.

推广 在三维空间中,到两定点的距离之比等于常数 $k(k\neq 1)$ 的点的轨迹是一个球面. 该球亦称为阿波罗尼奥斯球.

参考文献 [35,p.167],[38,p.297].

(张文华)

定和幂圆(**Circle as a locus of points which has a fixed power sum**) 到两个定点的距离平方和等于常数的点的轨迹是一个圆.

设 A、B 是两个定点,动点 P 满足 $PA^2+PB^2=k^2$ (k 是实数).

取 AB 的中点 M,由三角形中线公式,

$2(PA^2+PB^2)=AB^2+4PM^2$,

若记 $AB=a$,则

$$PM^2=\frac{1}{4}(2k^2-a^2),$$

$$|PM|=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-a^2}.$$

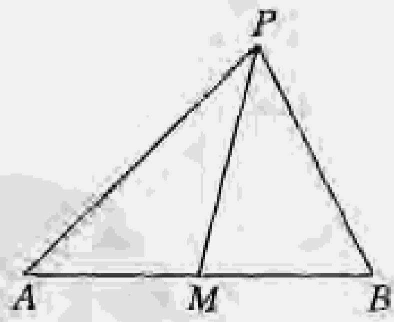


图 4-121

可见,当 $2k^2-a^2>0$ 时,P 点的轨迹是一个以 M 为中心的圆,该圆称之为定和幂圆.

当 $2k^2-a^2=0$ 时，轨迹退化为一点（点圆），当 $2k^2-a^2<0$ 时，则是一个虚圆（不存在实的轨迹）.

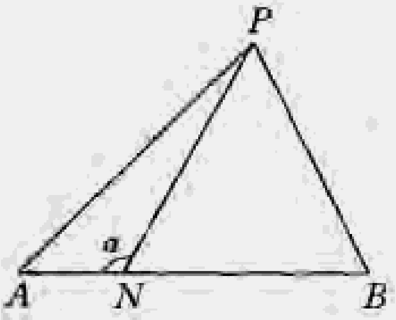


图 4-122

推广 1 若动点 P 满足条件 $mPA^2+nPB^2=k^2$（m、n 是正常数），则 P 点的轨迹仍是一个圆.

设 N 内分 AB 成 $n:m$，即

$$AN=\frac{n}{m+n}a,NB=\frac{m}{m+n}a.$$

$$PA^2=AN^2+PN^2-2AN\cdot PN\cdot\cos\alpha,$$
$$PB^2=NB^2+PN^2-2NB\cdot PN\cdot\cos(180^\circ-\alpha),$$

$$\therefore mPA^2+nPB^2=\frac{mn}{m+n}a^2+(m+n)PN^2.$$

$$\therefore PN^2=\frac{1}{m+n}\left(k^2-\frac{mn}{m+n}a^2\right)=\text{常量}.$$

推广 2 在三维空间中，到两定点距离平方和等于定值的点的轨迹是一个球面，其球心是连结两定点的线段的中点.

参考文献 [38,p. 298].

（张文华）

定差幂线（Line as a locus of points which has a fixed power difference） 到两定点的距离的平方差是定值的点的轨迹是两条直线，它们都垂直于两定点的连线.

设 A、B 是两定点，动点 P 满足 $PA^2-PB^2=k^2$（k 是定值）.

过 P 作 $PQ\perp AB$ 于 Q，当 $PA>PB$ 时，$QA^2-QB^2=PA^2-PB^2=k^2$.

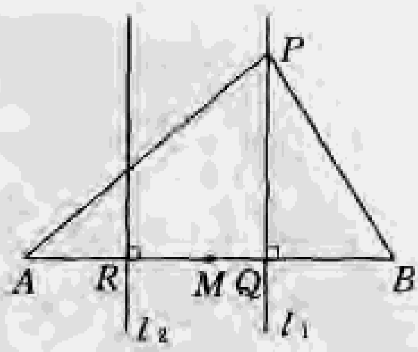


图 4-123

记 $AB=a$，点 M 是 AB 的中点，则

$2a\cdot MQ=k^2$，$MQ=\dfrac{k^2}{2a}$（定值）.

所以 P 点在过 Q 点且垂直于 AB 的直线 l_1 上.

当 $PA<PB$ 时,取 $RM=\frac{k^2}{2a}$,动点 P 在过 R 点且垂直于 AB 的直线 l_2 上.

又容易证明,在 l_1 或 l_2 上的点都满足条件

$$PA^2 \sim PB^2 = k^2.$$

故动点 P 的轨迹是垂直于 AB 的两条直线,并称之为定差幂线.

注意:(1) 若要求动点 P 满足条件 $mPA^2 \sim nPB^2 = k^2$ $(m \neq n)$,则动点 P 的轨迹不是两条直线,而是两个同心圆.

(2) 在三维空间中,到两个定点的距离平方差是定值的点的轨迹是两个平面,它们垂直于两定点的连线.

参考文献　[38,p.298].

(张文华)

牛顿轨迹问题(Newton problem of locus)　设 A、B 分别是定直线 a、b 上的定点,P、Q 分别是 a、b 上的动点,满足条件 $AP:BQ=k$(定值).点 R 在 PQ 上,使 $PR:RQ=m:n$(定比),求动点 R 的轨迹.

此题是牛顿的《自然哲学的数学原理》一书中的第 23 个补充题.

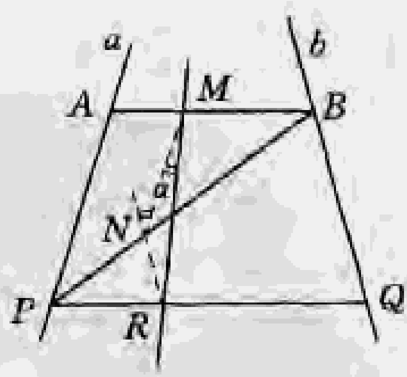


图 4-124

在 AB 上取一点 M,使 $AM:MB=m:n$,M 是一定点.连结 PB,作 $MN \parallel AP$ 交 PB 于 N,连结 NR.因为 $PN:NB=AM:MB=m:n=PR:RQ$,所以 $NR \parallel BQ$.又由于 $AP:BQ=k$,$MN=\frac{n}{m+n}AP$,$NR=\frac{m}{m+n}BQ$,所以 $MN:NR=(n\cdot AP):$

$(m \cdot BQ) = nk : m$(定值). 又 a、b 是定直线，$\angle MNR$ 是定角，可见$\triangle MNR$ 的形状一定，从而 $\angle NMR = \alpha$ 是定角. 可见，点 R 在过 M 点且与定直线 a 的交角为 α 的一条直线上.

本题也可利用向量来解.

设 O 是坐标原点，$\vec{a}$、$\vec{b}$分别是直线 a、b 上的单位向量，则

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + kt\,\vec{a}\ (t \text{ 是参数}),$$
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OB} + t\,\vec{b},$$
$$\overrightarrow{OR} = \frac{n\,\overrightarrow{OP} + m\,\overrightarrow{OQ}}{m+n} = \frac{n\,\overrightarrow{OA} + m\,\overrightarrow{OB}}{m+n} + t\,\frac{nk\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m+n}.$$

而 $\dfrac{nk\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m+n}$ 也是定向量. 若点 M 分线段 AB 成 $m : n$，则

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n\,\overrightarrow{OA} + m\,\overrightarrow{OB}}{m+n}.$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + t\left(\frac{nk\,\vec{a} + m\,\vec{b}}{m+n}\right).$$

可见 R 点的轨迹是过点 M 的一条直线.

参考文献 [38,p.300].

（张文华）

根轴(Radical axis) 关于两个不同心的定圆有相等幂的点的轨迹是垂直于两圆连心线的一条直线. 此线称为两圆的根轴，有时也叫等幂轴.

这个命题是 Gaultier 于 1813 年提出的.

这里，点 P 关于$\odot O(R)$的“幂”是指有向线段之积 $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = OP^2 - R^2$ (A、A'是过 P 的直线和$\odot O$ 的两个交点，它们可以重合). 首先用“幂”来表示这种意义的是施泰纳.

设$\odot O_1(R_1)$、$\odot O_2(R_2)$的方程为

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2,$$
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R_2^2,$$

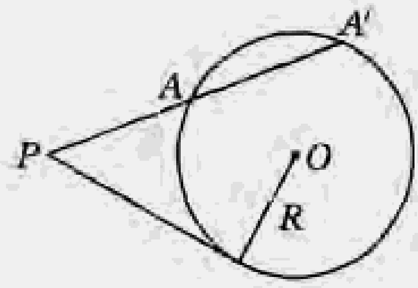


图 4-125

其中$O_1(a_1,b_1)$,$O_2(a_2,b_2)$.

点$P(x,y)$关于$\odot O_1(R_1)$和$\odot O_2(R_2)$的幂分别为

$$O_1P^2-R_1^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-R_1^2,$$
$$O_2P^2-R_2^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-R_2^2.$$

点$P(x,y)$关于$\odot O_1(R_1)$和$\odot O_2(R_2)$等幂的充要条件是

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-R_1^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-R_2^2.$$

化简得

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+[R_1^2-R_2^2-a_1^2-b_1^2+a_2^2+b_2^2]=0.$$

这个二元一次方程表示一条直线l,其斜率　$k=-\dfrac{a_1-a_2}{b_1-b_2}$.

又,直线O_1O_2的方程为

$$(b_2-b_1)x-(a_2-a_1)y+b(a_2-a_1)-a_1(b_2-b_1)=0,$$

其斜率　$k'=\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$.

由$kk'=-1$知,直线$l\perp O_1O_2$.

所以关于两个不同心的圆有等幂的点的轨迹是一条直线,它垂直于两圆的连心线.

由幂的概念易知:相交两圆的等幂轴是两圆公共弦所在的直线;相切两圆的等幂轴是过两圆切点的公切线;相离两圆的等幂轴必不与两圆相交.

参考文献　[27,pp. 36～38],[38,p. 313].

（张文华）

共轴圆(Coaxial circles) 关于两个不同心的圆的幂之比为不等于1的常数的点的轨迹是一个圆,这个圆与两个已知圆有公共的根轴.

设两已知圆为

$\odot O_1(R)$: $x^2+y^2=R^2$, ①

$\odot O_2(r)$: $(x-a)^2+y^2=r^2$. ②

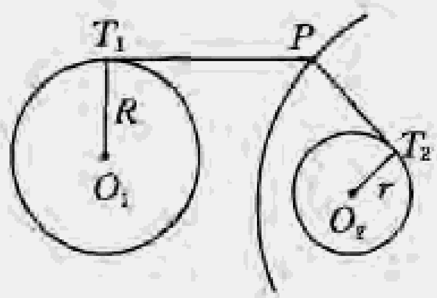


图 4-126

点 $P(x,y)$ 关于 $\odot O_1$ 的幂 $p_1=x^2+y^2-R^2$,点 P 关于 $\odot O_2$ 的幂 $p_2=(x-a)^2+y^2-r^2$. 若 $p_1:p_2=\lambda(\lambda\neq1)$,则

$$x^2+y^2-R^2=\lambda(x^2-2ax+a^2+y^2-r^2).$$

即 $$(1-\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2+2a\lambda x=R^2+\lambda a^2-\lambda r^2. \quad ③$$

这方程表明,P 点的轨迹是一个圆,它的圆心 O 在 x 轴上(因而在直线 O_1O_2 上),其坐标为 $x=\dfrac{a\lambda}{\lambda-1}$.

由①、②,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的等幂轴是 $x=\dfrac{R^2-r^2+a^2}{2a}$.

由①、③,$\odot O_1$ 和 $\odot O$ 的等幂轴方程是

$$2a\lambda x=R^2+\lambda a^2-\lambda r^2-(1-\lambda)R^2,$$

即 $$x=\frac{R^2+a^2-r^2}{2a}.$$

可见 $\odot O$ 和 $\odot O_1$ 的等幂轴就是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的等幂轴. 因此 $\odot O$ 和两个已知圆($\odot O_1$、$\odot O_2$)共轴.

如果我们把③中的 λ 看做参变数,那么它表示一簇圆,这些圆的圆心都在连心线 O_1O_2 所在直线上,这些圆(连同原来的 $\odot O_1$、$\odot O_2$)中,每两个圆的等幂轴是同一条直线,因此这簇圆称之为共轴圆系,而共轴圆系中的若干个圆就叫做共轴圆.

共轴圆有这样的特点:如果其中有两个圆相交,则簇中的每

个圆都通过这两个圆的交点;如果其中有两个圆相切,则其中的每两个都相切于该切点;如果其中有两个圆没有公共点,则所有圆都没有公共点.

参考文献 [38,p.313].

(张文华)

Serret 轨迹问题(Serret problem of locus) 若 AB 和 CD 是两条不平行的线段,动点 P 满足条件 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=k^2$(定值),则 P 点的轨迹是一个平行四边形.

此题是由法国数学家 P. Serret 于 1855 年提出的.

如图 4-127,设 AB、CD 所在直线相交于点 O,并分别取 $OM=AB$,$ON=CD$,则

$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle POM}$,$S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PON}$.

$S_{MONP}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}$

$=k^2$(定值).

又 $S_{\triangle OMN}=h^2$(定值).

$\therefore S_{\triangle PMN}=k^2-h^2$(定值).

故 P 点必在平行于 MN 的直线段 $M'N'$ 上.

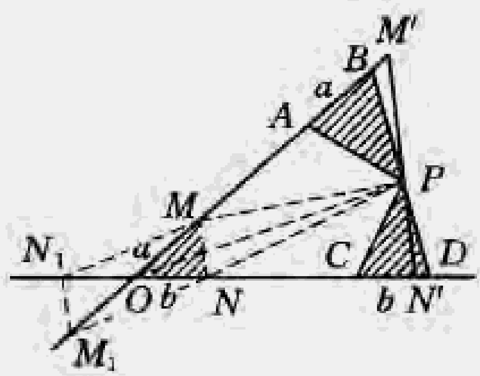


图 4-127

两相交直线把平面分成四个区域.前面只考察了 P 点在 $\angle AOC$ 内部时的情况.当 P 点在另外三个区域时,上述讨论也完全有效.若再在 AB、CD 上分别取 $OM_1=AB$、$ON_1=CD$,并按照上述方法讨论,可知 P 点分别在平行于 MN_1、M_1N_1、M_1N 的三条线段上,它们和第一条线段 $M'N'$ 一起构成一个平行四边形,而点 O 是该平行四边形的中心.

参考文献 [38,p.311].

(张文华)

Peaucellier 反演器原理(Principle of Peaucellier inversioner) 设点 O 是定圆 S 上一定点,菱形 $ABCD$ 的边长为 a,顶点 A 在

$\odot S$ 上，$OB=OD=b$（定长），当 A 在$\odot S$ 上移动时，求顶点 C 的轨迹.

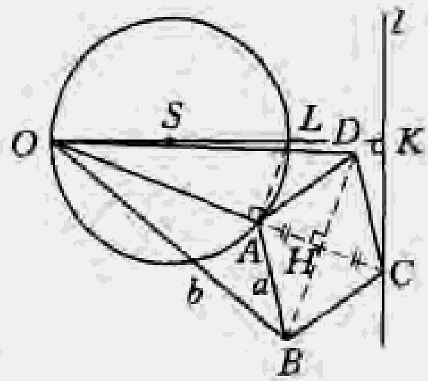


图 4-128

本题是由法国海军军官 A. Peaucellier 提出的，1864 年，Peaucellier 据此制作了 Peaucellier 反演器.

如图 4-128，由于 $OB=OD$，$AB=AD$，$CB=CD$，O、A、C 三点始终在同一直线（BD 的中垂线）上.

又由于 $BD\perp AC$ 于 H，

$$b^2-a^2=BO^2-BA^2=OH^2-AH^2$$
$$=(OH+AH)(OH-AH)=OA\cdot OC,$$

即 $OA\cdot OC=(\sqrt{b^2-a^2})^2$.

因此，若以 $\odot O(\sqrt{b^2-a^2})$ 为反演基圆的话，A 和 C 互为反点. 当 A 在$\odot S$ 上移动时，C 点的轨迹是$\odot S$ 的反形. 由于$\odot S$ 过反演极 O，故其反形是一条垂直于 OS 的直线，即 C 点的轨迹是垂直于直线 OS 的一条直线 l（若 $OS\perp l$ 于 K，交$\odot S$ 于 L，则 $OL\cdot OK=b^2-a^2$）.

根据这个结果可以制作反演器. 用四根等长（长度为 a）的棒连接成菱形 $ABCD$，并于 B 和 D 处接上两根长度都等于 b 的棒 OB 和 OD，使各连接处均可以自由转动，这样便制成了一个反演器. 使用时，可在 O 点处装上一针，使之可固定于图板上某点，再于 A 处装上一针，C 处装上铅笔，然后让 A 描绘某个已知图形 F，则 C 点就绘出 F 的反形 F'.

参考文献 [14，p. 368]，[24，p. 210]，[40，p. 27].

（张文华）

Catalan 轨迹问题（Catalan problem of locus） $\odot O(r)$ 及 $\odot O'(r')$ 是两个定圆，动点 A 在$\odot O$ 上，A'在$\odot O'$ 上，且 A 对于

$\odot O'$的幂等于A'对于$\odot O$的幂，过A作$\odot O$的切线，过A'作$\odot O'$的切线，两切线相交于点P，则动点P的轨迹是一个圆，该圆与$\odot O$、$\odot O'$共轴.

本题是Catalan于1879年发现的.在Desboves著的《几何问题》(*Questions de Geometriel*)一书中，本题是作为解决马尔法蒂问题的辅助定理提出的(参见**马尔法蒂问题**).

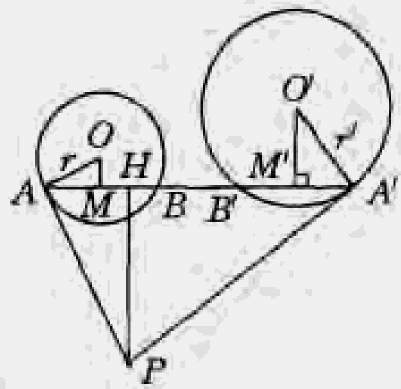


图 4-129

设AA'分别交$\odot O$、$\odot O'$于B、B'，由于A对于$\odot O'$的幂等于A'对于$\odot O$的幂，$AA'\cdot AB'=AA'\cdot A'B$，故

$$AB'=A'B, AB=A'B'. \qquad ①$$

若作$OM\perp AB$于M，$O'M'\perp A'B'$于M'，$PH\perp AA'$于H，则$Rt\triangle AOM\backsim Rt\triangle PAH$，$PA:OA=PH:AM$，即

$$\frac{PA}{r}=\frac{PH}{AM}. \qquad ②$$

同理，
$$\frac{PA'}{r'}=\frac{PH}{A'M'}. \qquad ③$$

由于 $AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}A'B'=A'M'$，故由②、③得

$$PA:PA'=r:r'. \qquad ④$$

从而 $Rt\triangle PAO\backsim Rt\triangle PA'O'$，$PO:PO'=r:r'$.

由阿波罗尼奥斯轨迹定理，当$r\neq r'$时P点的轨迹是一个圆.

由于$PA^2:PA'^2=r^2:r'^2$，故点P关于$\odot O$、$\odot O'$的幂之比为常数$\frac{r^2}{r'^2}$.所以，当$r\neq r'$时，P点的轨迹是与$\odot O$，$\odot O'$共轴的圆(参见**共轴圆**)；当$r=r'$时，P点的轨迹是一直线l，l是$\odot O$与

$\odot O'$的根轴.

参考文献 [38,p.317].

（张文华）

外接于定三角形的正三角形的重心轨迹（Locus of centroids of the equilateral triangles, which circumscribe to a fixed triangle） 外接于定三角形的正三角形的重心的轨迹是一个圆.

本题选自《美国数学月刊》Vol.66的问题E 1351.

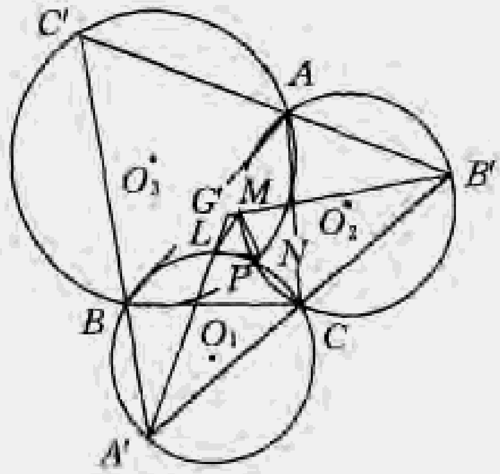


图4-130

如图4-130,设$\triangle ABC$是定三角形,分别以BC、CA、AB为弦作$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$,使在$\triangle ABC$内部一侧的弧均为120°.过A任作一直线与$\odot O_2$、$\odot O_3$分别交于点B'、C',连结CB'并延长交$\odot O_1$于点A',此时A'、B、C'必共线,$\triangle A'B'C'$是定$\triangle ABC$的外接正三角形.设$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$(都等于120°)的中点分别是L、M、N,易证

$$LM^2=MN^2=NP^2=\frac{1}{6}(BC^2+CA^2+AB^2)-\frac{\sqrt{3}}{6}S_{\triangle ABC},$$

所以$\triangle LMN$是正三角形.

设G'是$A'L$、$B'M$(或其延长线)的交点,由于$A'G'$平分$\angle BA'C$,$B'G'$平分$\angle A'B'C'$,故G'是正$\triangle A'B'C'$的重心,且$\angle A'G'B'=120°$.由此可见,点G'必在正$\triangle LMN$的外接圆上.又当$B'C'$绕着A点转动时,G'可以跑到$\overset{\frown}{LN}$或$\overset{\frown}{MN}$上,故$\triangle A'B'C'$的重心轨迹是$\triangle LMN$的外接圆.

参考文献 [40,p.41].

（张文华）

(五) 作图

作圆内接三角形，使它与给定三角形有相等的三个角(Construct a inscribed triangle being given its three angles)

本题出自欧几里得的名著《几何原本》.

已知$\triangle ABC$及定圆O，试在$\odot O$内作$\triangle A_1B_1C_1$，使

$$\angle A_1 = \angle A, \angle B_1 = \angle B, \angle C_1 = \angle C.$$

在$\odot O$上取一点A_1，过A_1作$\odot O$的切线DE，作$\angle EA_1C_1 = \angle ABC$，$A_1C_1$交$\odot O$于$C_1$，作$\angle DA_1B_1 = \angle ACB$，$A_1B_1$交圆于$B_1$，连结$B_1C_1$，则$\triangle A_1B_1C_1$即为所求. 这时，$\angle A_1B_1C_1 = \angle EA_1C_1 = \angle ABC$，$\angle A_1C_1B_1 = \angle DA_1B_1 = \angle ACB$.

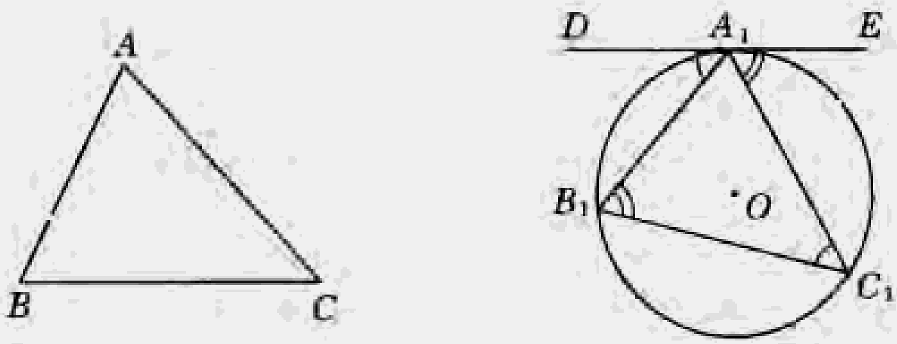


图 4-131

参考文献 [32,pp. 56~57].

(张文华)

费马作图问题(Fermat construction problem)

(1) 已知a，$\angle A = \alpha$，$(b-c):h_a$，求作$\triangle ABC$；

(2) 已知a，$\angle A = \alpha$，$(b-c)+h_a$，求作$\triangle ABC$.

问题(1)是帕斯卡向费马提出的，由费马作出解答；问题(2)是费马提供给帕斯卡的，并流传于世.

下面的解法源于费马.

(1) 假定$\triangle ABC$已作出. 作$\triangle ABC$的外接圆O，设N是$\overset{\frown}{BAC}$

的中点，M 是线段 BC 的中点，作 $NP\perp AB$ 于 P，$NQ\perp CA$ 于 Q，则

$$\angle NAP=\angle NAQ, AP=AQ.$$

又 $\mathrm{Rt}\triangle BNP\cong \mathrm{Rt}\triangle CNQ$，$BP=CQ$.
故 $AB-AP=AC+AQ$，$AB-AC=2AP$，即 $2AP=b-c$.

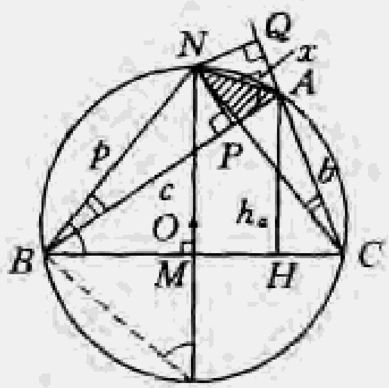


图 4-132

另一方面，

$$NB^2-NA^2=BP^2-PA^2$$
$$=(BP+PA)(BP-PA)$$
$$=bc.$$

而 $bc=2Rh_a\left(\because S_\triangle=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{abc}{4R}\right)$，

$$\therefore NB^2-NA^2=2Rh_a. \qquad ①$$

$\because \triangle PAN\backsim\triangle MBN$，$\therefore AP:BM=NA:NB$.

$$\therefore AP=\frac{NA}{NB}\cdot\frac{a}{2}. \qquad ②$$

设 $NA=x$，$NB=p$，则由①、②，有

$$p^2-x^2=2Rh_a, \frac{1}{2}(b-c)=\frac{x}{p}\cdot\frac{a}{2}.$$

从而

$$\frac{b-c}{h_a}=\frac{2Rax}{p(p^2-x^2)}. \qquad ③$$

由 a 和 $\angle\alpha$ 可知外接圆半径 R 及 $BN=p$，$\dfrac{b-c}{h_a}=\dfrac{m}{n}$ 是已知条件，故由③式可得

$$2Rax:p(p^2-x^2)=m:n.$$

$$\frac{m}{n}(p^2-x^2)=\frac{2Ra}{p}x.$$

$$p^2-x^2=\frac{2Ra}{p}\cdot\frac{n}{m}\cdot x.$$

$$x^2+\frac{2Ra}{p}\cdot\frac{n}{m}\cdot x-p^2=0.$$

根据这个二次方程可作出满足条件的线段 x. 因此△ABC 可作出.

(2) 由(1)之第③式，得

$$\frac{b-c}{(b-c)+h_a}=\frac{2Rax}{2Rax+p(p^2-x^2)},$$

$$\therefore (b-c)+h_a=(b-c)[2Rax+p(p^2-x^2)]\cdot\frac{1}{2Rax}.$$

又由(1)之第②式，得 $b-c=\frac{NA}{NB}\cdot a=\frac{x}{p}a$.

$$\therefore (b-c)+h_a=\frac{ax}{p}[2Rax+p(p^2-x^2)]\cdot\frac{1}{2Rax}$$

$$=[2Rax+p(p^2-x^2)]\cdot\frac{1}{2Rp}.$$

$\because (b-c)+h_a=q$ 是已知的，

$$\therefore p^2-x^2+\frac{2Rax}{p}=2Rq,$$

$$x^2-\frac{2Rax}{p}+(2Rq-p^2)=0.$$

据此二次方程可求出 x，进而作出△ABC.

参考文献 [40，p. 174].

(张文华)

Castillon 问题(Castillon problem) 作一个三角形，使它内接于一个已知圆，且三边分别通过一个已知点.

本题由瑞士数学家 Gabriel Cramer(1704～1752)提出，1776 年由意大利数学家 Castillon(1709～1791，原名 I. F. Salvemini)解决.

设已知圆 Σ 及三个已知点 A、B、C，求作 △XYZ，使其内接于圆 Σ，且 YZ、ZX、XY 分别过点 A、B、C.

其作法如下：

(1) 在 AB 上取一点 M，使 $AM \cdot AB = p^2X$，其中 p^2 是点 A 关于已知圆 Σ 的幂；

(2) 连结 MC，并在其延长线上取一点 Q，使 $MQ \cdot MC = q^2$，其中 q^2 是点 M 关于已知圆 Σ 的幂；

(3) 过点 Q 作弦 LN，使其所对的圆周角等于 $\angle AMQ$（设圆 Σ 的圆心为 O，半径为 r，$\angle AMC=\varphi$，作 $\odot O\left(r\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)$，再过 Q 作该圆之切线）；

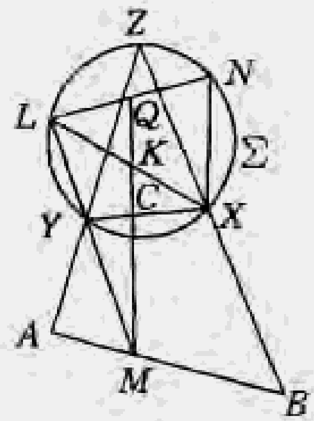


图 4-133

(4) 连结 LM 交圆于 Y，连结 AY 并延长交圆于 Z，连结 BZ 交圆于点 X. 则 $\triangle XYZ$ 即为所求.

下面来证明 XY 必过 C 点，即 YC、YX 必在同一直线上.

(1) 由作法，$AM \cdot AB = AY \cdot AZ$，$M$、$B$、$Z$、$Y$ 四点共圆，$\angle AMY = \angle AZB$. 但 $\angle AZB = \angle YLX$，所以 $\angle AMY = \angle YLX$，$LX \parallel AB$.

(2) 设 CQ 与 LX 交于 K，由于 $LX \parallel AB$，$\angle LKQ = \angle AMC$. 又由作法 $\angle LXN = \angle AMK$，所以 $QK \parallel NX$，从而 $\angle KQL = \angle XNL$.

(3) 由作法，$MQ \cdot MC = MY \cdot ML$，$C$、$Q$、$L$、$Y$ 四点共圆. $\angle LYC = 180° - \angle CQL$. 又 L、Y、X、N 共圆，$\angle LYX = 180° - \angle LNX$. 由于 $\angle LQK = \angle LNX$，$\therefore \angle LYC = \angle LYX$. $\therefore$ 点 C 在 XY 上.

本题若用施泰纳的对合对应中的二重元素的投影解法，解法比较简单. 还可以利用相似方法解决如下 Castillon 问题的对偶命题：已知一个圆及三条直线，求作一个三角形，使其外切于已知圆，且三个顶点分别在三条已知直线上.

本题可推广如下：已知一圆及不在圆上的四点，求作这个圆的内接四边形，使它的四边或其延长线按一定次序通过该

四点.

参考文献 [31,pp.165～168].

（张文华）

已知三条高的长度，求作三角形（Describe a triangle being given its three altitudes）

本题由 Ardueser 提出，可参见其著作 *Geometriae theoricae et practicase*(1627)，p.149.

已知：三线段 h_1、h_2、h_3.

求作：$\triangle ABC$，使它的高 $AD=h_1$，$BE=h_2$，$CF=h_3$.

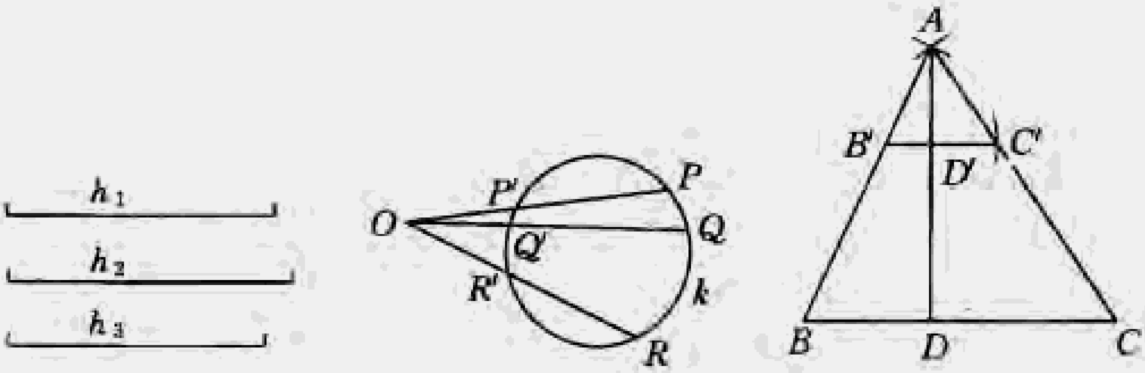


图 4－134

作一适当大的圆 k（其直径 $d\geqslant|h_i-h_j|$），并选择一适当的点 O，自 O 到圆 k 引三条线段 OP、OQ、OR，使 $OP=h_1$、$OQ=h_2$、$OR=h_3$. 设 OP、OQ、OR 分别交圆 k 于 P'、Q'、R'. 作$\triangle AB'C'$，使 $B'C'=OP'$，$AC'=OQ'$，$AB'=OR'$. 作 $AD'\perp B'C'$ 于 D'，延长 AD' 到 D，使 $AD=h_1$. 过 D 作 $B'C'$ 的平行线，交 AB'、AC' 或其延长线于 B、C，得$\triangle ABC$.

下面证明$\triangle ABC$ 的确是符合要求的.

作 $BE\perp AC$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F，$B'E'\perp AC'$于 E'，$C'F'\perp AB'$于 F'. 则 $BC\cdot AD=CA\cdot BE=AB\cdot CF$.

$\because \triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$，$\therefore \dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A}{CA}=\dfrac{B'A}{BA}$.

由于 $B'C'=OP'$，$C'A=OQ'$，$B'A=OR'$，

$\therefore \frac{OP'}{BC}=\frac{OQ'}{CA}=\frac{OR'}{AB}$.

$\therefore OP'\cdot AD=OQ'\cdot BE=OR'\cdot CF$.

由圆幂定理，$OP'\cdot h_1=OQ'\cdot h_2=OR'\cdot h_3$.

因 $AD=h_1$，故 $BE=h_2$，$CF=h_3$，$\triangle ABC$ 的三条高为 h_1、h_2、h_3，合乎题意.

参考文献 [38,p.336].

（张文华）

已知三角形的两边中点及垂心的位置，求作三角形（Construct a triangle, being given ortho-center and middle points of two sides）

此题出自《美国数学月刊》Vol. 42(1935).

设 M_2、M_3、H 是给定的三点，现在要作一个三角形 ABC，使 M_2、M_3 分别是 AC、AB 边的中点，H 是$\triangle ABC$ 的垂心.

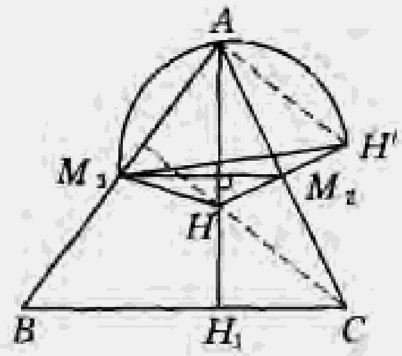


图 4-135

延长 HM_2 到 H'，使 $M_2H'=HM_2$，以 M_3H' 为直径作半圆. 过 H 作 M_2M_3 的垂线交半圆于 A 点. 连结 AM_2 并延长到 C，使 $M_2C=AM_2$；连结 AM_3 并延长到 B，使 $M_3B=AM_3$，则$\triangle ABC$ 即合要求.

显然，M_2、M_3 分别是 AC、AB 的中点，且 $AH\perp BC$. 又因为 $AM_2=M_2C$，$HM_2=M_2H'$，所以 $AH'\parallel HC$. 而 $AH'\perp AB$，所以 $CH\perp AB$. 既然 $AH\perp BC$，$CH\perp AB$，则 H 确是$\triangle ABC$ 的垂心.

参考文献 [40,p.219].

（张文华）

已知一边上的高和中线及其余两边的差，求作三角形（Triangle from m_a, h_a, $b-c$）

本题出自《美国数学月刊》Vol. 44(1937)问题 E257.

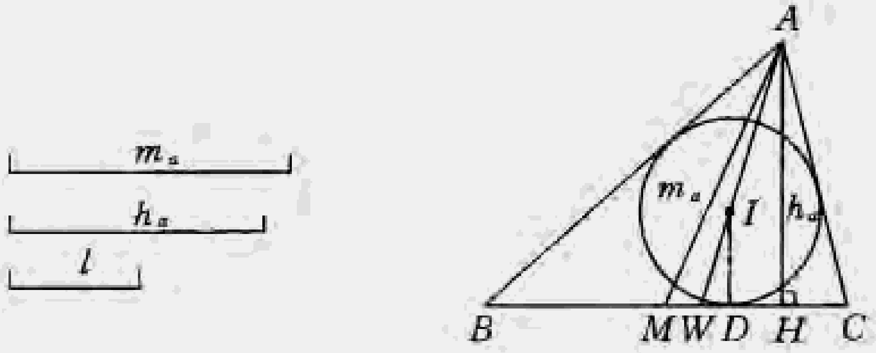


图 4-136

设△ABC已作出，中线 $AM=m_a$，高 $AH=h_a$，$AC-AB$ 的长度为 l(已知). 作内切圆 I 切 BC 于 D，AI 交 BC 于 W. 显然 Rt△AMH 可以先行作出. 又 $MD=MC-DC=\frac{1}{2}a-(s-c)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(c-b)=\frac{1}{2}l$，故 D 点可确定.

又由 $BW:WC=c:b$，及 $BW+WC=a$，可知 $BW=\frac{ac}{b+c}$，

$\therefore MW=\frac{ac}{b+c}-\frac{1}{2}a=\frac{a(c-b)}{2(b+c)}$.

又 $c^2-b^2=BH^2-HC^2=(BH+HC)(BH-CH)=2a\cdot MH$.

$\therefore MH=\frac{c^2-b^2}{2a}$. $\therefore MW\cdot MH=\frac{(c-b)^2}{4}=MD^2$，$MW=\frac{MD^2}{MH}$，$W$ 可定.

于是可得如下作法：

(1) 作 Rt△AMH，使 $AM=m_a$，$AH=h_a$，$\angle AHM=90°$；

(2) 在 MH 上取一点 D，使 $MD=\frac{1}{2}l$；

(3) 作线段 MW，使 $MW=\frac{MD^2}{MH}$，连结 AW，自 D 作 BC 的垂

线交 AW 于 I；

(4) 以 I 为圆心，ID 为半径作圆 I，自 A 作圆 I 的切线 AB、AC，交 MH 的延长线于 B、C，则 $\triangle ABC$ 即为所求.

参考文献 [40,p.216].

(张文华)

求作等腰三角形，使它的底边和底角平分线有给定长度（Isosceles triangle，from its base and bisector of a basic angle）

本题选自《美国数学月刊》Vol.70(1963).

$\triangle ABC$ 中，若 $AB=AC$，$BC=a$，BD 是底角平分线，且 $BD=l$. 试作出 $\triangle ABC$.

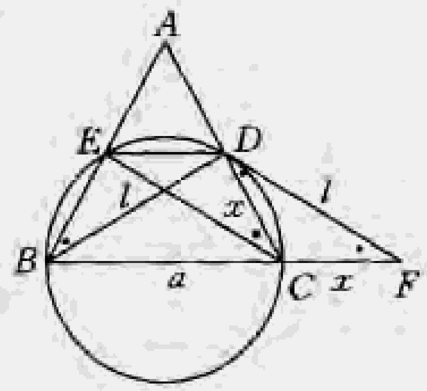


图 4-137

设 CE 是 $\angle ACB$ 的平分线，作 $DF \parallel EC$，则 $DF=CE=l$. 若作出 $\triangle BCD$ 的外接圆，由于 $\angle CDF=\angle DFC=\angle DBC$，$DF$ 必是 $\odot DBC$ 的切线，设 $CD=CF=x$，则应有 $l^2=x(x+a)$. x 应是方程 $x^2+ax-l^2=0$ 的根，$x=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+4l^2})$ 可作. 故可得如下作法：

(1) 作出线段 x，使 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4l^2}-a)$；

(2) 作 $\triangle BDF$，使 $BD=DF=l$，$BF=a+x$；

(3) 在 BF 上取 $BC=a$，作 $\triangle BDC$ 的外接圆，作 $DE \parallel BC$，设 DE 交圆于 E；

(4) 延长 BE、CD 交于 A，则 $\triangle ABC$ 即为所求.

参考文献 [40,p.228].

(张文华)

Regiomontanus 作图问题（Regiomontanus construction

problem） 已知四边之长，求作有外接圆的凸四边形.

1464年，Regiomontanus（1436～1476，又名J. Müller）首先提出了这个问题，韦达提出了该问题的尺规作图法. 斯图姆等也研究过这个问题.

假定所求的四边形 $ABCD$ 已经作成，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，且该四边形有外接圆. 连结 AC. 若作 $\angle DCE=\angle BCA$，CE 交 AD 的延长线于 E，则由于 $\angle CDE=\angle ABC$，$\triangle CDE \backsim \triangle CBA$. 于是 $DE:AB=CD:BC$，$DE=\dfrac{AB\cdot CD}{BC}=\dfrac{ac}{b}$. 故作出线段 $AD=d$ 后，E 点可以先确定. 又由于 $AC:CE=BC:CD=b:c$，即 C 点到 A，E 两点的距离之比等于定值 $\dfrac{b}{c}$，故 C 点的轨迹是一个阿氏圆. 又由于 C 点到 D 点的距离等于定长 c，C 点应在 $\odot D(c)$ 上. 故 C 点应是上述两圆的交点. 确定了 A、D、C 三点后，B 点就很容易确定了. 因此可按如下步骤作图：(1) 作一线段 $AD=d$，在 AD 的延长线上求一点 E，使 $DE=\dfrac{ac}{b}$；(2) 内分、外分线段 AE 于 M、N，使 $MA:ME=NA:NE=b:c$，以 MN 为直径画圆；(3) 以 D 为圆心，c 为半径作圆交以 MN 为直径的圆于 C 点；(4) 以 A 为圆心、a 为半径画弧，以 C 为圆心、b 为半径画弧，设两弧相交于 B（B、D 应分居于 CA 的两侧），连结 AB、BC，则四边形 $ABCD$ 即合所求.

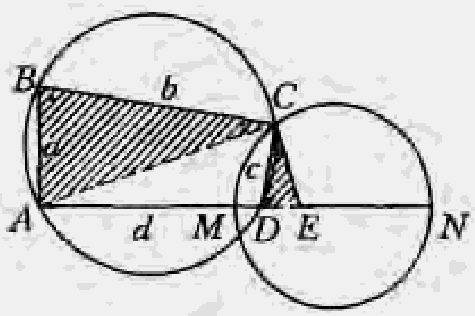


图 4-138

参考文献 [38, p. 342].

（张文华）

Prouhet 问题（Prouhet problem） 作一五边形，使其各边的中

点在指定位置.

本题由 Prouhet 首先提出. 1844 年,Prouhet 对奇数边多边形提出并解决了同样的问题.

设 K、L、M、N、P 是给定的五点,现在要作一个五边形 $ABCDE$,使 K、L、M、N、P 依次是 AB、BC、CD、DE、EA 的中点.

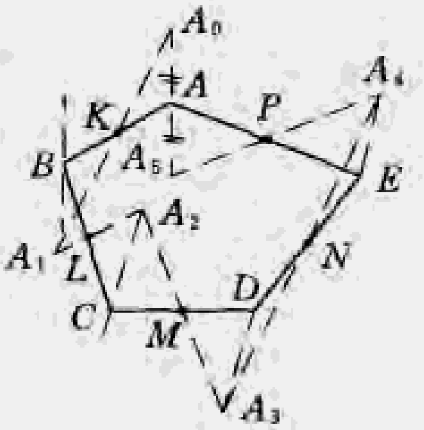


图 4-139

任取一点 A_0,作折线 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$,使 K、L、M、N、P 依次是 A_0A_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5 的中点. 连结 A_0A_5,取其中点 A,作折线 $ABCDE$,使 K、L、M、N 顺次是 AB、BC、CD、DE 的中点. 连结 EA,则五边形 $ABCDE$ 便合所求.

由上面的作法可知,K、L、M、N 依次是 AB、BC、CD、DE 的中点. 现在再证明 P 是 EA 的中点. 依作法,$A_0A \underline{\parallel} BA_1$,$BA_1 \underline{\parallel} A_2C$,$A_2C \underline{\parallel} DA_3$,$DA_3 \underline{\parallel} A_4E$,所以 $A_0A \underline{\parallel} A_4E$. 因为 A 是 A_0A_5 的中点,所以 $AA_5 \underline{\parallel} A_4E$,$P$ 点也是 AE 的中点.

本题作法可用来解一般 $(2n+1)$ 边形问题.

参考文献 [38,p. 347].

(张文华)

作圆内接正五边形、正十边形、正十五边形(Construct regular pentagon, regular decagon, regular pentadecagon)

求作圆内接和外切正五边形与正十五边形,见于欧几里得《几何原本》第四卷. 对于正五边形的作图,毕达哥拉斯学派可能已经知道. 与 Hippocrates(约公元前 430 年)同时代的人,已会用尺规作圆内接三角形、正方形和正五边形. 托勒密则证明了如下命题:设 AB 是$\odot O$ 的直径,$CO \perp AB$,D 是 OB 的中点,在 OA 上取一点 F,使 $DF = DC$,则 CF 和 OF 分别是该圆的内接正五边形和内接

正十边形的一边.

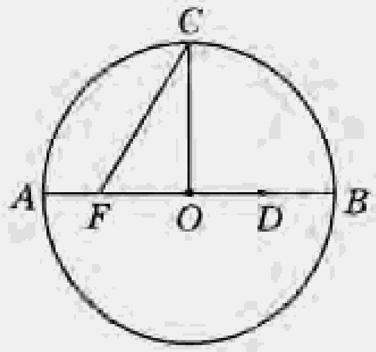


图 4-140

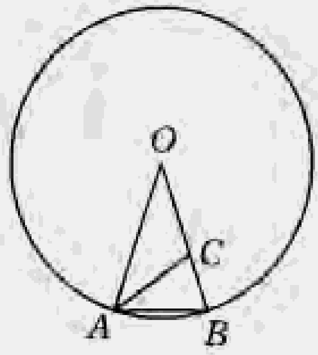


图 4-141

(1) 圆内接正十边形.

设 AB 是$\odot O(R)$的内接正十边形的一边，则 $\angle AOB = 36°$. 作$\angle OAB$ 的平分线 AC，则 $\angle OAC = \angle CAB = 36°$，$\angle ACB = 72° = \angle ABC$. $\therefore AB = AC = OC$，且 $\triangle OAB \backsim \triangle ACB$.

$\therefore OA : AC = AB : BC$. 若设 $OC = x$，则有

$R : x = x : (R - x)$，$x^2 + Rx - R^2 = 0$.

$\therefore x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)R$.

据此，有如下作法：

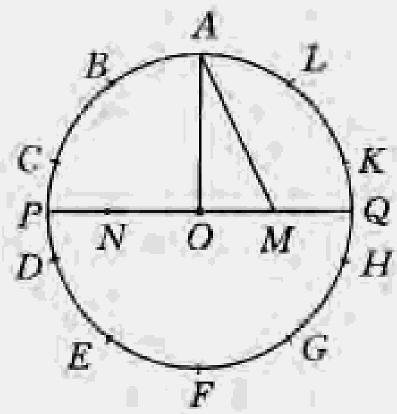


图 4-142

作直径 PQ，作半径 OA，使 $OA \perp PQ$，取 OQ 的中点 M，以 M 为圆心，MA 为半径画弧交 OP 于 N，则 ON 的长就等于内接正十边形的边长. 然后利用线段 ON，从 A 点开始，在圆周上顺次截取$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DE}$、$\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FG}$、$\overset{\frown}{GH}$、$\overset{\frown}{HK}$、$\overset{\frown}{KL}$，使 $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HK = KL = ON$，最后顺次连结各分点，即得正十边形.

(2) 圆内接正五边形.

作出圆内接正十边形后，取这个正十边形的两两不相邻的五

个顶点，连结起来，即得到圆内接正五边形.

(3) 圆内接正十五边形.

由于圆内接正十五边形的中心角 $\theta = 24° = 60° - 36°$，而内接正六边形的中心角是 60°，正十边形的中心角是 36°，因此正十五边形可以在作正六边形、正十边形的基础上完成.

参考文献 [33,p.77,p.137],[36,pp.49～52].

（张文华）

正十七边形作图（Regular 17-gon construction） 用圆规和直尺作正十七边形.

这个问题自欧几里得以来悬而未决 2 000 多年，直到 1796 年，当时还只有 19 岁的高斯首先发现了这个问题的解法，这个发现使高斯坚定了献身数学研究的信念. 值得一提的是，高斯临终时还留下遗言：请把正十七边形刻在他的墓碑上. 后来，哥廷根大学为他建立了一个以正十七边形棱柱为底座的纪念像.

在解决了正十七边形作图问题后，高斯进一步研究尺规作图问题，5 年后，他彻底解决了正多边形的尺规作图问题，并证明了下述定理：一个正多边形，当且仅当其边数具有形式 $2^m p_1 p_2 \cdots p_k$（$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是形如 $2^n + 1$ 的不同素数）时，才能用圆规和直尺作出其图形.

对于正十七边形的作法，在林鹤一著的《初等几何学作图不能问题》一书中以附录形式作了专门介绍，指出：除了高斯的方法外，还有 Serret 与 Bochmann 方法、Von. Standt 方法、Schubert 方法等.

设正十七边形在单位圆周上的顶点的复数表示为

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17} (k = 0, 1, 2, \cdots, 16).$$

若记 $\rho = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$，则除 1 以外的其余 16 个顶点是

$$\rho,\rho^2,\rho^3,\rho^4,\rho^5,\cdots,\rho^8;\rho^{-1},\rho^{-2},\cdots,\rho^{-8}.$$

若设 $p=\rho+\rho^2+\rho^4+\rho^8+\rho^{-1}+\rho^{-2}+\rho^{-4}+\rho^{-8}$,

$q=\rho^3+\rho^5+\rho^6+\rho^7+\rho^{-3}+\rho^{-5}+\rho^{-6}+\rho^{-7}$,

则
$$\begin{aligned}p+q&=\rho+\rho^2+\cdots+\rho^8+\rho^{-1}+\rho^{-2}+\cdots+\rho^{-8}\\&=(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^8+\rho^{-1}+\rho^{-2}+\cdots+\rho^{-8})\\&\quad-1\\&=-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\cdot q&=(\rho+\rho^2+\rho^4+\rho^8+\rho^{-1}+\rho^{-2}+\rho^{-4}+\rho^{-8})\cdot\\&\quad(\rho^3+\rho^5+\rho^6+\rho^7+\rho^{-3}+\rho^{-5}+\rho^{-6}+\rho^{-7})\\&=4(p+q)\\&=-4.\end{aligned}$$

$\therefore$ p、q 是方程 $x^2+x-4=0$ 的根，$p=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17})$，$q=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{17})$. 显然 p、q 可以用尺规作出.

再设 $u_1=\rho+\rho^4+\rho^{-1}+\rho^{-4}$,

$u_2=\rho^2+\rho^8+\rho^{-2}+\rho^{-8}$,

$u_3=\rho^3+\rho^5+\rho^{-3}+\rho^{-5}$,

$u_4=\rho^6+\rho^7+\rho^{-6}+\rho^{-7}$,

则易知 $u_1+u_2=p,u_1\cdot u_2=-1$,

$u_3+u_4=q,u_3\cdot u_4=-1$.

故
$$u_1=\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2+4}\right),u_3=\frac{1}{2}\left(q+\sqrt{q^2+4}\right),$$
$$u_2=\frac{1}{2}\left(p-\sqrt{p^2+4}\right),u_4=\frac{1}{2}\left(q-\sqrt{q^2+4}\right).$$

由于 p、q 可以由尺规作出，故 u_1、u_2、u_3、u_4 也都可以由尺规作出.

最后设 $v_1=\rho+\rho^{-1},v_2=\rho^4+\rho^{-4}$，则

$$v_1+v_2=u_1,v_1v_2=u_3,$$

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \sqrt{u_1^2 - 4u_3}\right),$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 4u_3}\right).$$

由于 u_1、u_3 可以由尺规作出，故 v_1、v_2 亦可用尺规作出. 但是

$$v_1 = \rho + \rho^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

可见 $\cos\frac{2\pi}{17}$可以由尺规作出.

因此正十七边形的作法包括以下五个步骤：

(1) 作出线段 p、q；

(2) 作出线段 u_1、u_3；

(3) 作出线段 v_1；

(4) 作出单位圆，并在实轴上取一点 V，使 $OV = \frac{1}{2}v_1$，过 V 作虚轴的平行线交单位圆于点 Z_1，则 Z_0Z_1 ($Z_0 = 1$) 即为十七边形的一边；

(5) 作出其余所有顶点，完成正十七边形.

参考文献 [9, p. 484], [23, pp. 124～133], [31, pp. 200～207], [40, pp. 255～256].

（张文华）

等分圆周问题(Problem of circumference in equal parts) 对于哪些自然数 n，可以用圆规和直尺把一个圆周 n 等分？

等分圆周问题(也是正多边形作图问题)，自古以来一直吸引着人们. 早在古希腊时代，人们就会利用尺规作出 3、4、5、6、10、15 等边数的正多边形，但是作正七边形或正九边形的企图却归于失败. 后来人们产生这样一个观念：并非任何一个正多边形都是能用尺规来作图的. 然而，怎样判断一个正多边形能不能用尺规作图呢？这个问题直到 1801 年才由高斯给出定论. 当时高斯证明了如

下命题：

当且仅当 n 是具有如下形式的整数时，可以仅用尺规把圆周 n 等分：

1° $n = 2^m$；

2° $n = p = 2^{2^t} + 1$，且 p 是素数；

3° $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k$，其中 p_i 是 $2^{2^t} + 1$ 型的素数，且各不相同.

这就圆满地解决了仅用尺规等分圆周的可能性问题. 当然，还存在一些技术性问题，例如，如何判断 $2^{2^t} + 1$ 型的数是素数？如何实施具体作图？这些都是很艰难的问题.

边数不超过 100 的正多边形，其中能仅用尺规作图的有：

n 的形式	用尺规能作的正多边形边数
2^m	4,8,16,32,64
$2^{2^t}+1$	3,5,17
$2^m p_1 p_2 \cdots p_k$	6,12,24,48,96 10,20,40,80 34,68 15,30,60 51 85

能作的总计不过 24 个，其余 74 个均不能尺规作图.

比较有趣的是 $n = p = 2^{2^t} + 1$ 的情况. 当 $t = 0,1$ 时，$n = 3$，5，而正三角形和正五边形正是古代早已会作的图形. 当 $t = 2$ 时，$n = 17$. 正十七边形的作法是高斯发现的. 当 $t = 3,4$ 时，$n = 257$，65 537，这两个数都是素数. 正 257 边形的作图于 1832 年由 Richelot 完成，正 65 537 边形的作图经 Hermes 费了 10 年功夫才

完成．据说，他的手稿可以装满一个手提箱．

参考文献 [14,pp. 440～442],[23,p. 79],[40,p. 515].

（张文华）

阿波罗尼奥斯切圆问题(Apollonius problem of contact circle) 画一个圆，使它与三个已知圆相切．

这个著名问题是由希腊数学家阿波罗尼奥斯在《论切触》(*On contacts*)一书中提出并予以解决的，可惜原书已经失散，其内容是由后来的数学家韦达重新整理出来的．由于点和直线可以看做是圆的极限状态，因此切圆问题还有九种特殊情况，阿波罗尼奥斯是分别研究并解决各种特殊情况，然后再过渡到一般情况的．对于切圆问题，历史上许多数学家如韦达、牛顿、Peterson、葛尔刚都曾研究过．下面给出的解法就源于葛尔刚．

葛尔刚是从一般性问题入手的，这个方法要用到如下一些几何知识：

1. 相似轴定理：三个圆中每次取两个，所得的三个相似中心(三个外相似中心，或两个内相似中心、一个外相似中心)在同一直线上．

2. 极点、极线定理：对于某给定圆，若点 P 在点 Q 的极线上，则点 Q 也在点 P 的极线上．

此外还要用到等幂轴、根心等概念．

设 O_1、O_2、O_3 为三个已知圆周，试求作一圆，使它与三已知圆周均相切(为叙述方便起见，我们侧重讨论都外切或都内切的情况，其他情况可类似地处理)．

假定存在满足条件的圆周 Σ，它与圆周 O_1、O_2、O_3 分别切于点 A、B、C．我们来分析它们应满足什么条件．

设点 I 是 O_1、O_2、O_3 三圆的根心，连结 IA、IB、IC 并分别延长交圆 O_1、O_2、O_3 于点 A'、B'、C'，过点 A'、B'、C' 作圆 Σ'，则 Σ' 必与圆 O_1、O_2、O_3 相切．原因是：以 I 为极、以 I 对圆 O_1(O_2、O_3)的幂为

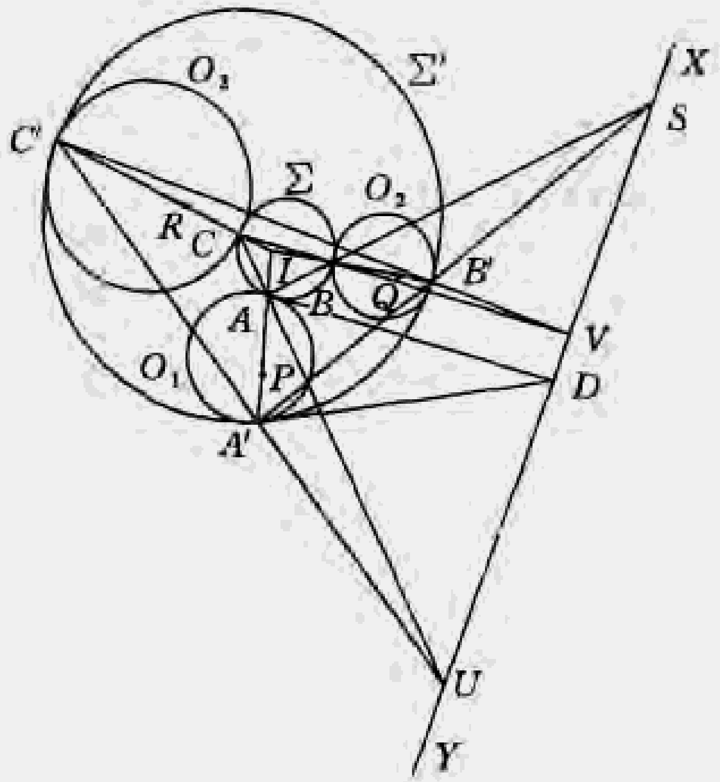


图 4－143

反演幂的反演变换 Φ 必将圆 O_1、O_2、O_3 分别变为自身，将圆 Σ 变为圆 Σ'，而反演变换是不会改变相切关系的.

对于圆 O_1、O_2 来说，由于圆 Σ 与它们相切于点 A、B，故 A、B 是一对逆对应点. 同样道理，A'、B' 也是一对逆对应点，因此直线 AB 与 $A'B'$ 的交点 S 必是圆 O_1、O_2 的相似中心，$SA \cdot SB = SA' \cdot SB'$. 对圆 O_1 和 O_3，圆 O_2 和 O_3 作同样的讨论，可知 AC 与 $A'C'$ 的交点 U 是圆 O_1 和 O_3 的相似中心，BC 与 $B'C'$ 的交点 V 是圆 O_2 和 O_3 的相似中心，且 S、U、V 三点必在同一直线（记为 XY）上，该直线是圆 O_1、O_2、O_3 的外相似轴.

另一方面，对于圆 Σ 和 Σ' 来说，由于 $SA \cdot SB = SA' \cdot SB'$，$S$ 点对圆 Σ 和 Σ' 有相等的幂. 同理点 U 对圆 Σ 和 Σ' 亦有相等的幂，故 XY 也是圆 Σ 和 Σ' 的等幂轴（根轴）.

今在点 A 和 A' 处作圆的公切线，设它们相交于点 D，由于 AD 和 $A'D$ 是点 D 到圆 O_1 的切线长，$AD = AD'$，而 AD 和 AD'

又是圆 Σ 和 Σ' 的切线，可见点 D 对圆 Σ 和 Σ' 有相等的幂，它必在 Σ 和 Σ' 的等幂轴 XY 上.

但是，对于圆 O_1 而言，点 D 是弦 AA' 的极点，既然点 D 在 XY 上，则 XY 的极点 P 必在 AA' 上. 同理，对于圆 O_2 而言，XY 的极点 Q 必在 BB' 上；对于圆 O_3 而言，XY 的极点 R 必在 CC' 上.

所以我们得到下面的作法：

求三个已知圆 O_1、O_2、O_3 的根心 I 及外相似轴 XY，分别求 XY 对于圆 O_1、O_2、O_3 的极点 P、Q、R 连结 IP、IQ、IR 并延长，与已知圆 O_1、O_2、O_3 分别交于 A、A'，B、B'，C、C'. 过点 A、B、C 作圆 Σ，过点 A'、B'、C' 作圆 Σ'，则圆 Σ 和 Σ' 即为所求.

若从代数观点看，解阿波罗尼奥斯切圆问题将显得很简单.

设已知三圆的圆心坐标为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)，相应的半径为 r_1, r_2, r_3. 用 (x, y) 和 r 表示所求圆的圆心和半径，则所求圆与三个已知圆相切这个条件可用如下方程组给出：

$$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(r\pm r_1)^2,\\(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(r\pm r_2)^2,\\(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(r\pm r_3)^2.\end{cases}$$

若从中解得 (x, y) 和 r，则问题获得解决.

阿波罗尼奥斯切圆问题一般有 8 个解. 由于点和直线可看做圆的退化情况，故阿波罗尼奥斯切圆问题有以下 10 种情况：

圆，圆，圆；圆，圆，直线；圆，圆，点；

圆，直线，直线；圆，点，点；圆，直线，点；

直线，直线，直线；直线，直线，点；直线，点，点；点，点，点.

对于各种特殊情况，可采用特殊的方法予以解决.

参考文献 [20, pp. 196～201]，[24, pp. 170～172]，[31, pp. 176～182]，[33, pp. 101～112].

（张文华）

马尔法蒂问题(Malfatti problem) 在一个已知三角形内画三个圆,使每个圆与其他两个圆相切,同时与已知三角形的两边相切.

这个著名问题是意大利数学家马尔法蒂于1803年提出并解答的,他用的是代数一几何解法.1826年,施泰纳提出了该问题的纯几何解法,但没有给出证明.下面的代数一几何解法属于Schellbach的.

设$\triangle ABC$的三边长为a、b、c,周长为$2s$,三个内角为α、β、γ.又设P、Q、R为所要求的马尔法蒂圆的圆心,p、q、r为三圆的半径,三圆分别切$\triangle ABC$的三边于D、D_1,E、E_1,F、F_1,$AD=AD_1=u$,$BE=BE_1=v$,$CF=CF_1=w$.显然,若能求出u、v、w的值,则问题就能得解.

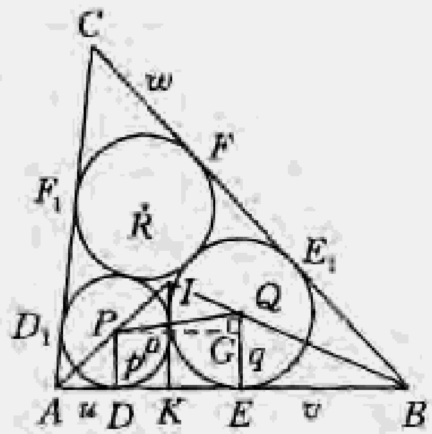


图 4-144

为了寻找u,v,w应满足的条件,我们要借助于$\triangle ABC$的内切圆.设内切圆的圆心是I,且切AB于K.易知:

半径 $\rho=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

$AK=\dfrac{1}{2}(b+c-a)=s-a$,

$BK=\dfrac{1}{2}(a+c-b)=s-b$.

在$\triangle AIK$中,$PD/\!/IK$,$p:\rho=AD:AK=u:(s-a)$,

$\therefore p=\dfrac{\rho u}{s-a}$.

在$\triangle BIK$中,$QE/\!/IK$,$q:\rho=BE:BK=v:(s-b)$,

$\therefore q=\dfrac{\rho v}{s-b}$.

若作$PG\perp QE$,垂足为G,则$\triangle PQG$为直角三角形,且$PQ=p+q$,$QG=q-p$.$\therefore PG=\sqrt{(p+q)^2-(q-p)^2}=2\sqrt{pq}$.

$$\therefore DE = PG = 2\sqrt{\frac{\rho u}{s-a}\cdot\frac{\rho v}{s-b}} = 2\sqrt{\frac{\rho^2 uv}{(s-a)(s-b)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{s-c}{s}}\cdot\sqrt{uv}.$$

由于 $AD + DE + EB = AB$,

$$\therefore u + v + 2\sqrt{\frac{s-c}{s}}\cdot\sqrt{uv} = c.$$

用同样的方法可以在 BC、CA 边上得到相应的关系式

$$v + w + 2\sqrt{\frac{s-a}{s}}\cdot\sqrt{vw} = a,$$

$$w + u + 2\sqrt{\frac{s-b}{s}}\cdot\sqrt{wu} = b.$$

如果取半周长 $s = 1$,则有如下关于 u、v、w 的方程组

$$\begin{cases} v + w + 2\sqrt{1-a}\,\sqrt{vw} = a, \\ w + u + 2\sqrt{1-b}\,\sqrt{wu} = b, \\ u + v + 2\sqrt{1-c}\,\sqrt{uv} = c. \end{cases} \quad ①$$

令 $a = \sin^2\lambda, b = \sin^2\mu, c = \sin^2\nu. u = \sin^2\psi, v = \sin^2\varphi, w = \sin^2\chi$. 其中 λ、μ、ν、ψ、φ、χ 均为锐角,则

$$\sqrt{1-a} = \cos\lambda,\ \sqrt{1-b} = \cos\mu,\ \sqrt{1-c} = \cos\nu.$$

方程组①可转化为方程组②:

$$\begin{cases} \sin^2\varphi + \sin^2\chi + 2\sin\varphi\sin\chi\cos\lambda = \sin^2\lambda, \\ \sin^2\chi + \sin^2\psi + 2\sin\chi\sin\psi\cos\mu = \sin^2\mu, \\ \sin^2\psi + \sin^2\varphi + 2\sin\psi\sin\varphi\cos\nu = \sin^2\nu. \end{cases} \quad ②$$

由②中第一式,得

$$\sin^2\varphi + \sin^2\chi + 2\sin\varphi\sin\chi\cos\lambda = 1 - \cos^2\lambda,$$

$$\cos^2\lambda + (2\sin\varphi\sin\chi)\cos\lambda + (\sin^2\varphi + \sin^2\chi - 1) = 0.$$

$$\cos\lambda = -\sin\varphi\sin\chi + \sqrt{\sin^2\varphi\sin^2\chi + 1 - \sin^2\varphi - \sin^2\chi}$$
$$= -\sin\varphi\sin\chi + \sqrt{(1-\sin^2\varphi)(1-\sin^2\chi)}$$
$$= \cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\chi = \cos(\varphi+\chi).$$

$\therefore \lambda = \varphi + \chi.$

同理，$\mu = \chi + \psi, \nu = \psi + \varphi.$

记 $\sigma = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu)$，则

$$\psi = \sigma - \lambda, \varphi = \sigma - \mu, \chi = \sigma - \nu.$$

于是得到如下作图方法：

(1) 作三个角 λ、μ、ν，使 $\sin^2\lambda = a, \sin^2\mu = b, \sin^2\nu = c$，其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 1$；

(2) 作三个新角 ψ、φ、χ，使 $\psi = \sigma - \lambda, \varphi = \sigma - \mu, \chi = \sigma - \nu$；

(3) 画出三个角 ψ、φ、χ 的正弦平方：$u = \sin^2\psi, v = \sin^2\nu, w = \sin^2\chi$，从而可以确定马尔法蒂圆在各边上的切点的位置.

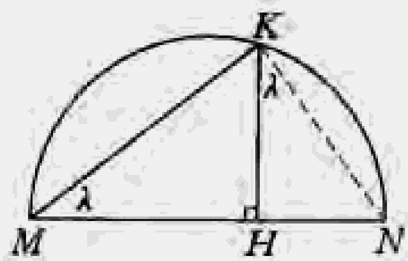


图 4-145

注：当 $a < 1$ 时，作角 λ，使 $\sin^2\lambda = a$ 的方法如下：作 $MN = 1$，以 MN 为直径作一半圆，在 MN 上取一点 H，使 $HN = a$，作 $KH \perp MN$，交半圆于 K，则 $\angle KMN = \lambda$. 因 $KN = MN \cdot \sin\lambda$，$HN = KN\sin\lambda$. 故 $HN = MN\sin^2\lambda = \sin^2\lambda$.

参考文献 [31, pp. 169～172], [38, pp. 355～358].

（张文华）

蒙日问题（Monge's problem） 求作一个圆，使它与三个已知圆都正交.

该题由法国数学家蒙日提出并解决. 其作法基于如下定理：对于给定的三个圆，其中每两个就有一条等幂轴（根轴），共三条.

如果这些等幂轴不平行的话，它们必通过同一点，此点称为等幂中心或根心.

设⊙A、⊙B、⊙C 是三个已知圆，现在要求作一个⊙O，它与⊙A、⊙B、⊙C 均正交. 其作法如下：

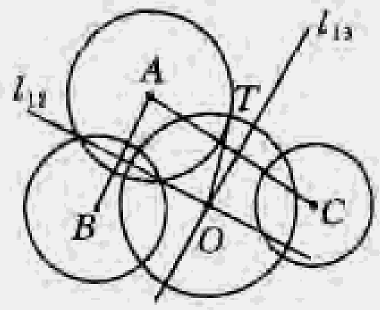


图 4－146

(1) 作⊙A 和⊙B 的等幂轴 l_{12}（见**根轴**）；

(2) 作⊙A 和⊙C 的等幂轴 l_{13}，l_{13} 与 l_{12} 交于点 O；

(3) 以 O 为圆心、以 O 到⊙A 的切线长 OT 为半径作⊙O.

下面证明⊙O 与⊙A、⊙B、⊙C 都正交. 由于 O 是等幂轴 l_{12} 与 l_{13} 的交点，故 O 点对于⊙A、⊙B、⊙C 有相等的幂 OT^2，从而⊙$O(OT)$ 必与⊙A、⊙B、⊙C 均正交，即在交点处两圆的半径互相垂直.

若三个圆的等幂中心存在，且它在三个已知圆的外部，则本题有一解. 否则，无解.

参考文献 [31，pp. 173～175].

（张文华）

Thébault 问题（Thébault problem） 在给定三角形内求作交于一点的三个圆，使它们分别与三角形的两边相切，且六个切点共圆.

这个问题是由 V. Thébault 提出的，原载于《美国数学月刊》第48 卷.

如图 4－147，假定求作的三圆已作出，⊙O_1 切 AB、AC 于 L、L_1，⊙O_2 切 BA、BC 于 M、M_1，⊙O_3 切 CB、CA 于 N、N_1，且三圆过同一点 G，切点 L、L_1，M、M_1，N、N_1 在同一圆上. 记这个圆的圆心为 I，则 $IL=IL_1=IM=IM_1=IN=IN_1$，因此 I 必在线

段 LL_1 的垂直平分线上，亦在 MM_1 的垂直平分线上. 由于 $AL = AL_1$、LL_1 的垂直平分线必与 $\angle BAC$ 的平分线重合，即 I 在 $\angle BAC$ 的平分线上. 同理，I 应在 $\angle ABC$ 的平分线上，可见这个圆心 I 必是 $\triangle ABC$ 的内心. 作 $\triangle ABC$ 的内切圆 I，设该圆分别切 BC、CA、AB 于点 D、E、F，则必有 $DM_1 = DN = EN_1 = EL_1 = FL = FM$. 因此 $AM = AN_1$. 可见 A 点对$\odot O_2$、$\odot O_3$ 有等幂. 又因为 $DM_1 = DN$，D 点对$\odot O_2$、$\odot O_3$ 也有等幂. 又$\odot O_2$、$\odot O_3$ 都过 G，G 点对$\odot O_2$、$\odot O_3$ 也有等幂，故 A、G、D 同在$\odot O_2$、$\odot O_3$ 的等幂轴上. 可见 A、G、D 共线. 同理，B、G、E 应共线，C、G、F 应共线. 所以 G 点应是 AD、BE、CF 的公共点，该点就是$\triangle ABC$ 的 Gergonne 点. 于是可得如下作法：作$\triangle ABC$ 的内切圆 I，设$\odot I$ 分别切 BC、CA、AB 于 D、E、F；连结 AD、BE，设它们交于 G 点，过 G 作$\odot O_1$，切 AB、AC 于 L、L_1；过 G 作$\odot O_2$，切 BA、BC 于 M、M_1；过 G 作$\odot O_3$，切 CB、CA 于 N、N_1，则$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 即为所求作.

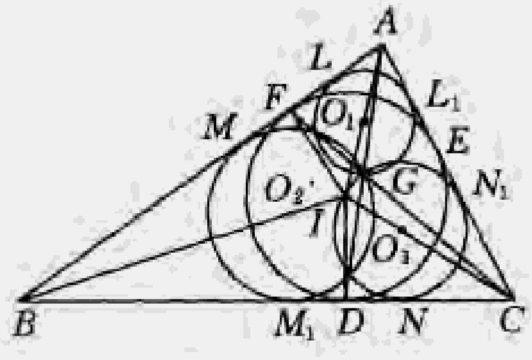


图 4－147

参考文献 [40, p. 264].

（张文华）

黄金分割(Golden section) 分割一已知线段，使得整条线段和它的一段所构成的长方形，与由另一线段构成的正方形等积.

这个问题在欧几里得的《几何原本》中就有记载，是该书第二卷中的第 11 个命题. 但据说此前的毕达哥拉斯及柏拉图学派的 Eudoxus(约前 408～前 355)都曾深入研究过. 中世纪时，意大利人 Pacioli 曾出版过《神圣比例》一书(1509 年)专门论述这一问题. 以后，开普勒、达·芬奇(Vinci, Leonardo da, 1452～1519)

对此问题均产生过浓厚兴趣.开普勒称之为“神圣分割”,达·芬奇称之为“黄金分割”.达·芬奇曾指出,人的身上有很多黄金分割,例如人的身高在肚脐处被黄金分割,它体现了一种和谐美.因此,黄金分割在艺术和建筑方面很有价值.

黄金分割亦称中外比(或中末比)分割:把已知线段分成不相等的两段,使较长段是全段与较短段的比例中项.经过计算可知,若全线段长为 a,则较长段为 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$. 0.618 这个数,在 20 世纪 60 年代华罗庚教授倡导的优选法中是很有名的,有一种优选法的名字就叫做 0.618 法.

欧几里得解决这个问题的方法如下:

设 AB 是已知线段,以 AB 为一边作正方形 $ABDC$,取 AC 的中点 E,连结 BE.延长 CA 到 J,使 $EJ=EB$.以 AJ 为一边作正方形 $AGHJ$,延长 HG 交 CD 于 K,则 AB 被点 G 分成 AG 和 GB,且 $AG^2=AB\cdot GB$.

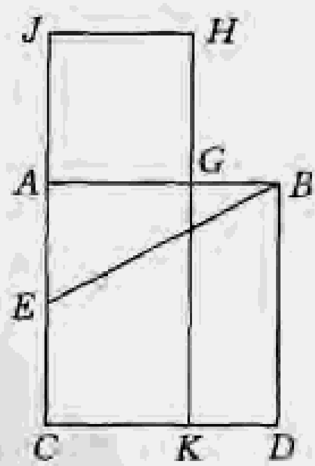


图 4-148

设 $AB=a$,$AG=x$,则 $AE=\frac{a}{2}$,$BE=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$. $AG=AJ=BE-AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$,$GB=a-\frac{\sqrt{5}-1}{2}a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$.

$$\therefore AG^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)^2$$

$$=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}a\right)a=AB\cdot GB.$$

参考文献 [9,p.108],[32,p.57],[33,pp.75~76],[35,

p. 92],[38,pp. 75～76].

（张文华）

阿波罗尼奥斯比例截线问题(Apollonius problem of the proportional section) 设 A、B 是定直线 a、b 上的两个定点，试过另一定点 C 作一直线，交 a、b 于点 P、Q，使 $AP:BQ=m:n$（定比）.

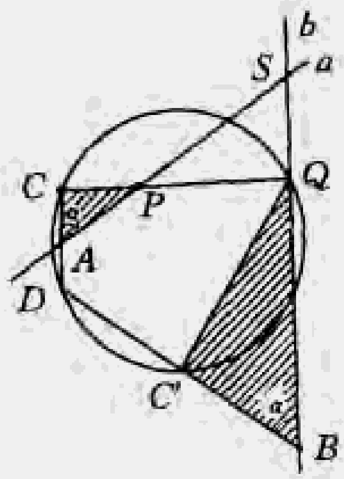


图 4－149

该问题是阿波罗尼奥斯首先提出的，他在其两卷本著作《比例分割》(该书于 1706 年由 Hally 译成拉丁语出版)一书中详细地研究了该问题.

如图 4－149，作射线 BD，使 BD 与 b 所夹的角等于 AC 与 a 所夹的角 α，设 BD 与 CA 的延长线交于 D. 在 BD 上取一点 C'，使 $AC:BC'=m:n$. 作 $\triangle CDC'$ 的外接圆交直线 b 于 Q 点，连结 CQ，交直线 a 于 P，则直线 CPQ 即为所求.

显然，$\triangle PCA\backsim\triangle QC'B$，$\therefore AP:BQ=AC:BC'=m:n$.

参考文献 [35,p. 167],[38,p. 142].

（张文华）

帕波斯作图问题(Pappus construction problem) 过角平分线上一点作直线，使夹于这角两边之间的线段等于定长.

本题是帕波斯在《数学汇编》一书中提出的.

如图 4－150，给出定角 $\angle MAN$ 及其平分线 AT，D 是 AT 上一定点，要求过点 D 作直线 l，使 l 夹在 AM、AN 之间的线段 $BC=a$（定长）.

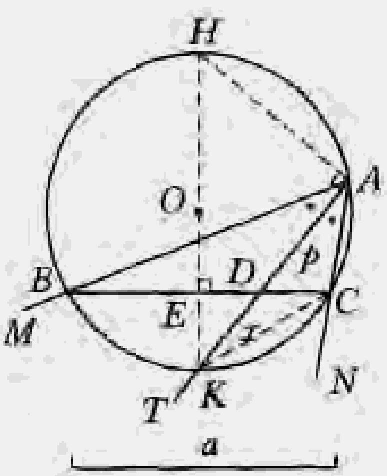


图 4－150

假定 BC 已经作出. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O，交角平分线 AT 于 K，K 应是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，作直径 HK，则 $HK\perp BC$，设垂足是 E，连结 CK. 由于 $\angle HAK=90^\circ$，所以 A、H、E、D 四点共圆，从而 $KD\cdot KA=KE\cdot KH=CK^2$. 记 $KD=x$，$AD=p$（已知），$CK=q$，则有

$$x(x+p)=q^2,\text{即}\quad x^2+px-q^2=0.$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4q^2}-p).$$

由于 $BC=a$ 的长度一定，BC 所对角 $\angle MAN$ 的大小一定，故 $\triangle ABC$ 的外接圆的大小可以确定，$CK=q$ 也可先确定. 又 $AD=p$ 已知，故线段 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4q^2}-p)$ 可以先行作出，从而 D 点可定. 而 A 可由 KD 的延长线与圆的交点确定.

根据上述分析，可以按如下步骤作图. 作线段 $B_1C_1=a$，以 B_1C_1 为弦作一个圆 O_1，使对 BC 所张的圆周角等于 $\angle MAN$. 作 $O_1E_1\perp B_1C_1$ 于 E_1，交圆 O_1 于 K_1，记 $C_1K_1=q$，$AD=p$，作线段 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{p^2+4q^2}-p)$. 以 K_1 为圆心，x 长为半径画弧交 B_1C_1 于 D_1，连结 K_1D_1 并延长交 $\odot O_1$ 于 A_1，连结 A_1B_1、A_1C_1. 在原来的 $\angle MAN$ 上截取 $AB=A_1B_1$，$AC=A_1C_1$，则线段 BC 即为所求.

参考文献　[32，pp. 90～91].

（张文华）

Catalan 问题（Catalan's problem）　过圆外一点作割线，使割线被该圆周平分.

本题选自比利时数学家 E. C. Catalan 所著的《初等数学的定理和习题》一书.

设点 M 是确定的 $\odot O(R)$ 外一定点，求作割线 MBA，使割线

的圆外部分(MB)和圆内部分(BA)相等.

作法如下：以 M 为圆心、$2R$ 为半径画弧交$\odot O$ 于点 C，作直径 AOC. 连结 MA 交$\odot O$ 于 B. 割线 MBA 即为所求.

显然，由于 $OA=OB=R$，$CM=CA=2R$，所以

$\angle ABO=\angle A=\angle AMC$，$OB\parallel CM$.

又$\because AO=OC$，$\therefore AB=BM$.

本题最多有两解.

参考文献 [32，pp. 223～224].

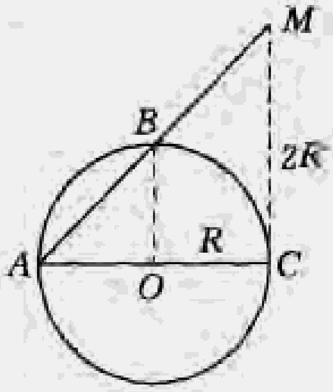


图 4-151

（张文华）

三角形内二等圆问题(Two equal circles in the triangle) 在$\triangle ABC$ 的 BC 边上求一点 D，使$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 有相等的内切圆.

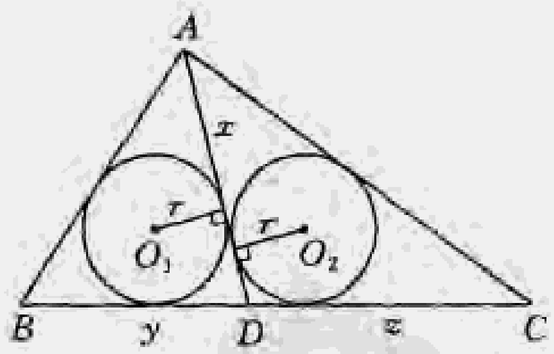


图 4-152

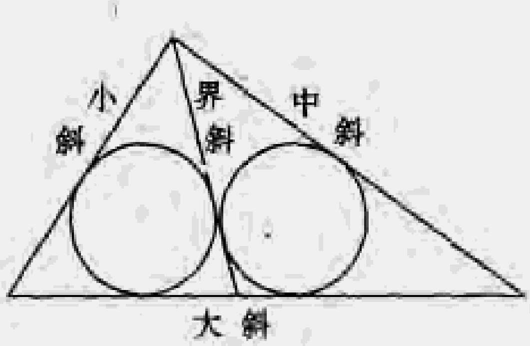


图 4-153

日本嘉永三年，岐阜县郡上郡八幡町的八幡神社有如下问题：今有如图 4-153 之内隔界斜，容二等圆，知中斜 257 寸，小斜 68 寸，界斜 40 寸，问大斜几何？答曰：大斜 315 寸. 其解法是：

$$\text{大斜}=\sqrt{(\text{中斜}+\text{小斜})^2-4\,\text{界斜}^2}.$$

在《美国数学月刊》Vol. 43(1936)上，A. G. Paterson 亦提出了与此题完全一致的题目，但他是用三角函数解的.

设O是$\triangle ABC$的内心，O_1、O_2分别是$\triangle ABD$、$\triangle ADC$的内心. 显然，$\angle O_1AO_2=\frac{1}{2}\angle BAC$. 过$B$作$BA'/\!/O_1A$，过$C$作$CA'/\!/O_2A$，$BA'$、$CA'$相交于$A'$，且$\angle BA'C=\angle O_1AO_2=\frac{1}{2}\angle BAC$. 因此$A'$点应在以$BC$为弦、所含弓形角等于$\frac{1}{2}\angle BAC$的弓形弧上. 另一方面，由于

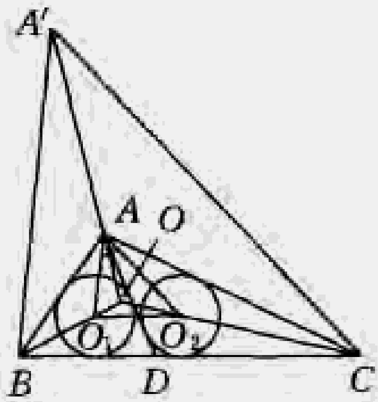


图 4-154

$O_1O_2/\!/BC$，$\triangle A'BC$与$\triangle AO_1O_2$位似，其位似中心就是$\triangle ABC$的内切圆圆心，A'应在OA的延长线上，故A'应是OA的延长线与上述弓形弧的交点，从而$\triangle A'BC$可定. 作出$\triangle A'BC$后，可利用以$\triangle ABC$的内心为中心，以$\frac{OA}{OA'}$为相似比的位似变换，作出$\triangle O_1AO_2$. 由于AD和AB关于AO_1对称，故AD也可作出.

当然也可用代数解法. 设$AD=x, BD=y, DC=z$. $\odot O_1$、$\odot O_2$是$\triangle ABD$和$\triangle ADC$的内切圆，其半径均为r. 则$y+z=a$，

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}(c+x+y)r}{\frac{1}{2}(b+x+z)r}=\frac{c+x+y}{b+x+z}.$$

但 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD}{DC}=\frac{y}{z}$，

$\therefore \frac{y}{z}=\frac{c+x+y}{b+x+z}=\frac{c+x}{b+x}$.

记 $c+x=p, b+x=q$，则$yq=zp$.

由$\begin{cases}y+z=a,\\ qy-pz=0\end{cases}$得 $y=\frac{pa}{p+q}, z=\frac{qa}{p+q}$.

又由 Stewart 定理，有

$$zc^2 + yb^2 = a(x^2 + yz).$$

代入得 $$\frac{qa}{p+q}\cdot c^2 + \frac{pa}{p+q}\cdot b^2 = a\left[x^2 + \frac{pqa^2}{(p+q)^2}\right],$$

$$qc^2 + pb^2 - (p+q)x^2 = \frac{pqa}{p+q},$$

$$p(b^2 - x^2) + q(c^2 - x^2) = \frac{pqa}{p+q},$$

即 $$(c+x)(b^2-x^2) + (b+x)(c^2-x^2)$$

$$= \frac{a(c+x)(b+x)}{b+c+2x}.$$

化简得 $$(b-x) + (c-x) = \frac{a}{b+c+2x}.$$

$\therefore (b+c)^2 - 4x^2 = a^2,$

$4x^2 = (b+c)^2 - a^2 = 4s(s-a),$

$\therefore x^2 = s(s-a)$，其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c).$

由此可得如下作法：

(1) 作线段 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 及 $s-a$；

(2) 作 s 和 $s-a$ 的比例中项 x，$x = \sqrt{s(s-a)}$；

(3) 以 A 为圆心，以 $x = \sqrt{s(s-a)}$ 为半径作弧交 BC 于点 D，则 D 点即为所求（当 $b > c$ 时，$\angle ADB$ 应为锐角）.

参考文献 [40，p. 132].

（张文华）

三等分三角形的面积（Trisection of the area of a triangle） 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一定点，Q 是 AB 边上一定点，试在 BC、CA 上各求一点 R、S，使线段 PQ、PR、PS 把 $\triangle ABC$ 的面积三等分.

本题选自《美国数学月刊》Vol. 43(1936). 在 Leonardo Pica

著的 *Practia Geometria*(1220)上也曾提过这问题.

如图 4-155,作 $CD /\!/ PA$ 交 BA 延长线于 D,作 $CE /\!/ PB$ 交 AB 延长线于 E,在 AB 延长线上取一点 F,使 $QF = DE$,则

$$S_{\triangle BPC} = S_{\triangle PBE}, S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PAD}, S_{\triangle PDE} = S_{\triangle ABC},$$
$$S_{\triangle PQF} = S_{\triangle PDE} = S_{\triangle ABC}.$$

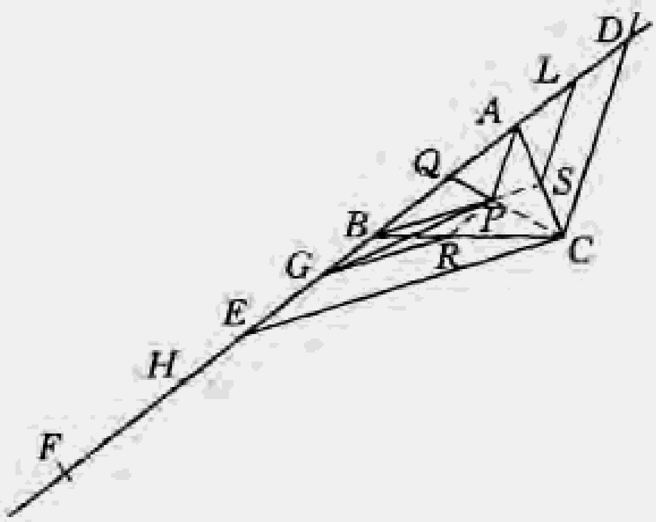


图 4-155

取 $QG = \frac{1}{3}QF$,则 $S_{\triangle PQG} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

过 G 作 $GR /\!/ BP$ 交 BC 于 R,则 $S_{\triangle PBR} = S_{\triangle PBG}$,从而

$$S_{PQBR} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}.$$

取 $QL = \frac{1}{3}DE$,过 L 作 $LS /\!/ PA$ 交 AC 于 S,则

$S_{PQAS} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

于是可得到问题的解答(具体作法从略).

注:如果要求使 $S_{AQPS} : S_{BRPQ} : S_{CSPR} = l : m : n$,可类似地予以解决.

参考文献 [40,p.137].

(张文华)

在$\triangle ABC$所在平面上求一点O,使$\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$的周长相等(On the plane of given $\triangle ABC$, find a point O, that $\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$ has equal perimeter)

本题选自《美国数学月刊》第45卷问题E307.

(1) 先作出$\triangle ABC$的内切圆,设在三边上的切点为D_1、D_2、D_3($AD_2 = AD_3, BD_3 = BD_1, CD_1 = CD_2$);再作$\odot A(AD_3)$、$\odot B(BD_1)$、$\odot C(CD_2)$,该三圆两两相切;最后作$\odot O_1$,使它与$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$均内切.则点$O_1$即合要求.

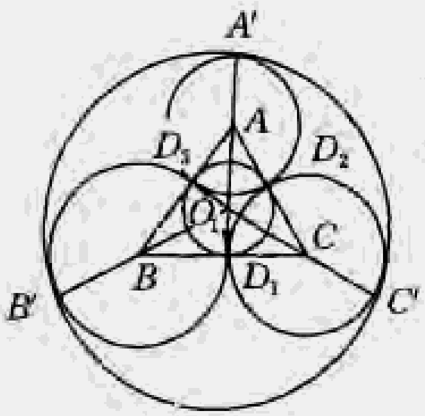


图 4-156

设$\odot O_1$的半径为r,由于与$\odot B$、$\odot C$均内切,延长O_1B必过切点B',延长OC必过切点C',则

$$
\begin{aligned}
& O_1B + O_1C + BC \\
=& (O_1B + BD_1) + (O_1C + CD_1) \\
=& (O_1B + BB') + (O_1C + CC') \\
=& 2r.
\end{aligned}
$$

同理可证,$\triangle O_1CA$、$\triangle O_1AB$的周长均为$2r$.

(2) 分别以顶点A、B、C为圆心、以对边长a、b、c为半径作三个圆:$\odot A(a)$、$\odot B(b)$、$\odot C(c)$,再作与这三个圆都内切、且位于这三个圆内部的$\odot O_2$,其切点分别是A'、B'、C',此时AA'、BB'、CC'都通过点O_2.若设$\odot O_2$的半径为r',则$O_2A = AA' - O_2A' = a - r'$,$O_2B = BB' - O_2B' = b - r'$,$O_2C = CC' - O_2C' = c - r'$.于是

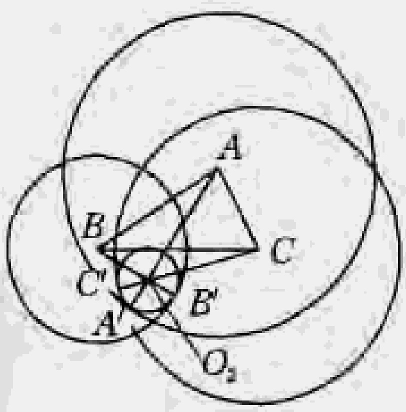


图 4-157

$$
\begin{aligned}
\triangle O_2AB \text{的周长} &= (a - r') + (b - r') + c \\
&= (a + b + c) - 2r',
\end{aligned}
$$

$$\triangle O_2AC \text{ 的周长} = (a - r') + (c - r') + b$$
$$= (a + b + c) - 2r',$$
$$\triangle O_2BC \text{ 的周长} = (b - r') + (c - r') + a$$
$$= (a + b + c) - 2r'.$$

可见，$\triangle O_2AB$、$\triangle O_2BC$、$\triangle O_2CA$ 的周长相等.

参考文献 [40，p. 130].

（张文华）

同时平分四边形的周长和面积（Bisecting circumference and area of the quadrilateral both） 求作一条直线，使之同时平分给定四边形的周长和面积.

本题选自《美国数学月刊》第 59 卷，在第 60 卷上亦有有关介绍.

所求直线可能与四边形的一组邻边相交，亦可能与一组对边相交.

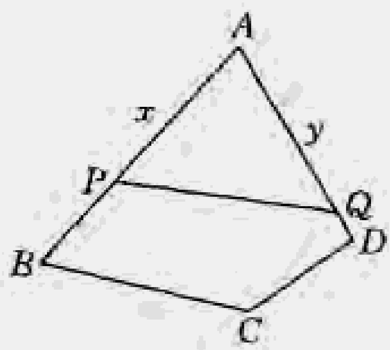


图 4－158

(1) 若平分直线与给定四边形 $ABCD$ 的一组邻边 AB、AD 相交于 P、Q，设 $AP = x$，$AQ = y$，若能确定 x、y，则直线 PQ 自然就能作出.

设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，四边之长为 a、b、c、d，则应有 $x + y = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$，$xy\sin A = S$，故 x、y 应是方程 $z^2 - \frac{1}{2}(a + b + c + d)z + \frac{S}{\sin A} = 0$ 的两个根. 先作出 m、n，使 $m^2 = \frac{S}{\sin A}$，$n = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$，再作出 $z^2 - nz + m^2 = 0$ 的两根即可求出 x 和 y.

(2) 若平分直线与给定四边形 $ABCD$ 之对边 AD、BC 交于 P、Q. 延长 CB、DA 交于 O，设 $OP = x$，$OQ = y$，$OA = e$，$OB = f$，则有

$$(x-e)+(y-f)+a$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c+d),$$
$$S_{\triangle OPQ}-S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}-S_{\triangle OPQ},$$

即 $2S_{\triangle OPQ}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OCD}$,

$xy\sin\alpha=\frac{1}{2}ef\sin\alpha+\frac{1}{2}(e+d)(f+b)\sin\alpha$.

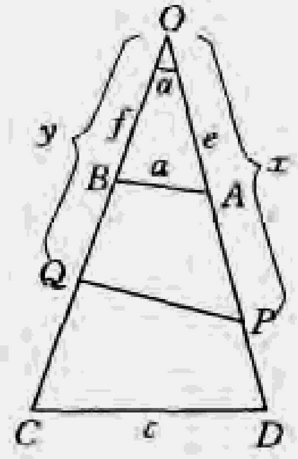


图 4-159

故 x、y 应满足条件

$$x+y=e+f+\frac{1}{2}(b+c+d-a),$$
$$xy=\frac{1}{2}[ef+(e+d)(f+b)].$$

若记

$$n=e+f+\frac{1}{2}(b+c+d-a),$$
$$m^2=\frac{1}{2}[ef+(e+d)(f+b)],$$

则 x、y 是方程 $z^2-nz+m^2=0$ 的两根，它们可以用尺规作出.

参考文献 [40,p.162].

（张文华）

Garfunkel 作图问题（Garfunkel construetion problem） P 是已知$\triangle ABC$ 的 BC 边上一定点 P，试在 CA 和 AB 上各求一点 Q 和 R，使分别以 BP、CQ、AR 为一边向$\triangle ABC$ 形外所作的正三角形 BPX、CQY、ARZ 的第三个顶点 X、Y、Z 构成一个正三角形.

此题出自《美国数学月刊》第 77 卷的问题 E2181，由 J. Garfunkel提出.

如图 4－160.

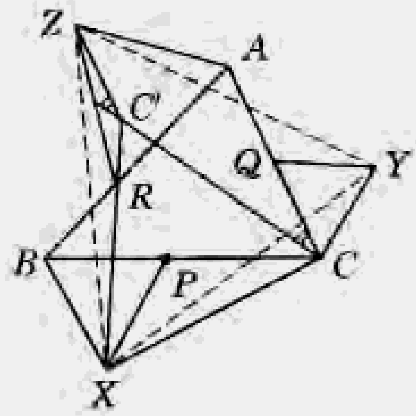


图 4－160

(1) 以 BP 为边作正三角形 BPX，以 CX 为一边作正三角形 CXC'；

(2) 过 C' 作 $C'Z // CA$，自 A 作射线 AZ，使 $\angle BAZ = 60°$，AZ、$C'Z$ 交于 Z；

(3) 在 CA 上取 $CQ = C'Z$，作正三角形 CQY；在 AB 上取一点 R，使 $AR = AZ$；

(4) 连结 XY、YZ、ZX，则 $\triangle XYZ$ 即为所求.

下面来证明 $\triangle XYZ$ 的确是正三角形.

$\because XC' = XC, C'Z = CY, \angle XC'Z = \angle XCY$，

$\therefore \triangle XC'Z \cong \triangle XCY$.

$\therefore XZ = XY, \angle C'XZ = \angle CXY$.

$\because \angle CXC' = 60°$，$\therefore \angle ZXY = 60°$，

$\therefore \triangle XYZ$ 是正三角形.

参考文献 [40，pp. 137～138].

（张文华）

拿破仑问题（Napoleon problem） 单用圆规将给定的圆周四等分.

在 Cajori 的 *A History of Mathematics* 一书中（p. 268），载有拿破仑向法国数学家提出的上述问题，它由 L. Mascheroni 作了解答.

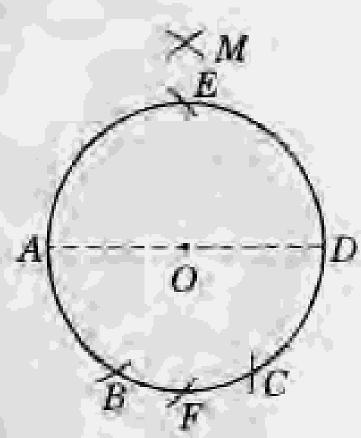


图 4－161

设定圆圆心为 O，半径为 r. 在圆周上任取一点 A，利用圆规在圆周上截取 B、C、D 三点，使 $AB = BC = CD = r$. 分别以 A 和 D 为圆心，以 AC 长为半径画弧，设两弧相交于 M. 再以 A 为中心，以 OM 为半径画弧交圆周于

E、F，则 A、F、D、E 将圆周四等分. 其理由如下：

由作法，$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{3}\,r$，$OM=\sqrt{AM^2-AO^2}$ $=\sqrt{AC^2-AO^2}=\sqrt{3r^2-r^2}=\sqrt{2}\,r$. $\therefore$ $\angle AOE=90°$.

同理，$\angle AOF=90°$.

参考文献　[32，p. 204]，[35，p. 522].

（张文华）

Mascheroni 圆规问题（Mascheroni construction problem with compasses only）　任何可用圆规和直尺作出的图形均可只用圆规作出.

这个命题是意大利的 L. Mascheroni 提出的，在 1797 年于帕维阿出版的《圆规几何学》（*La geometria del compasso*）一书中，他用巧妙的方法解决了这个问题.

1928 年，丹麦数学家 J. Hjelmslev 在哥本哈根一家书店里发现一本名为《欧几里得 · 丹麦本》（*Euclides Danicus*）的书，是一个不出名的作者 G. Mohr 在 1672 年出版的. 从书名看，它不过是欧几里得《几何原本》的译本或译注，但是 Hjelmslev 发现，这本书实质上包含了 Mascheroni 问题，而且早在 Mascheroni 之前已经完全解决了这个问题.

用圆规和直尺作图，不外乎是如下一些基本作图的组合：(1) 通过两点作直线；(2) 给定圆心和半径画圆；(3) 找出两条直线的交点；(4) 找出一条直线和一个圆的交点；(5) 找出两个圆的交点.

由于不用直尺不能画出连结两点的直线，所以在 Mascheroni 的理论中，必须把一条直线想象成是由它上面任意两点所决定的，而该直线上的其他点则可利用圆规来确定（见下述辅助命题 1）. 由于基本作图(2)、(5)可以单用圆规完成，因此只需证明单用圆规就可以完成基本作图(3)和(4)就行了.

为了叙述方便，先解决两个辅助命题.

辅助命题 1 将一已知线段 $PQ(=a)$ 延长到(或缩短到)X，使 $QX=b$.

① 如图 4-162，以 Q 为中心，b 为半径画弧，同时以 P 为中心，适当长为半径画弧，设两弧相交于 H 和 H' 点(显然，H 和 H' 关于直线 PQ 对称).

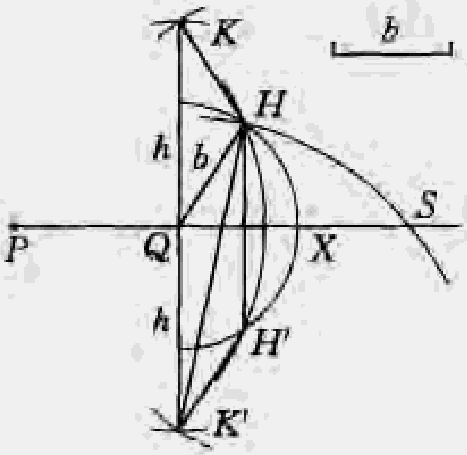


图 4-162

② 设 $HH'=h$，以 Q 为中心，以 h 为半径画弧，再分别以 H 和 H' 为中心，以 b 为半径画两弧，它们与先作之弧(即 $\odot Q(h)$)交于 K 和 K' 点(显然四边形 $KK'H'H$ 构成一等腰梯形，$HH' \parallel KK'$，$KK'=2h$，$HH'=h$，$HK=H'K'=b$. 若记 $K'H=d$，由托勒密定理，$d^2=b^2+2h^2$).

③ 分别以 K 和 K' 为中心、d 为半径画弧，设两弧相交于 S. 由对称性，点 S 一定在 PQ 的延长线上，且 $QS^2=K'S^2-K'Q^2=d^2-h^2=b^2+h^2$.

④ 分别以 K 和 K' 为中心，以 QS 长为半径画弧，两弧相交于点 X. 则点 X 在 PQ 的延长线上，且 $QX=b$($\because QX^2=K'X^2-QK'^2=QS^2-QK'^2=b^2+h^2-h^2=b^2$).

辅助命题 2 只用圆规作三条已知线段 m、n、s 的第四比例项，即作线段 $x=\dfrac{n}{m}\cdot s$.

如图 4-163，以 m、n 为半径画两个同心圆，在 $\odot O(m)$ 上画弦 $AB=s$. 分别以 A、B 为圆心，以同样的半径画弧分别交 $\odot O(n)$ 于 H 和 K($AH=BK$). 则 $HK=x=\dfrac{n}{m}s$($\because \triangle OAB \backsim \triangle OHK$).

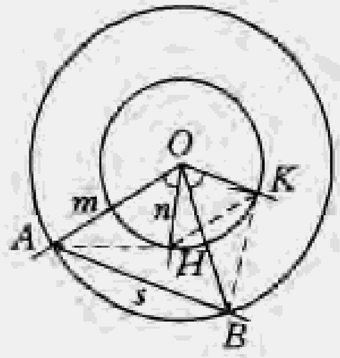


图 4－163

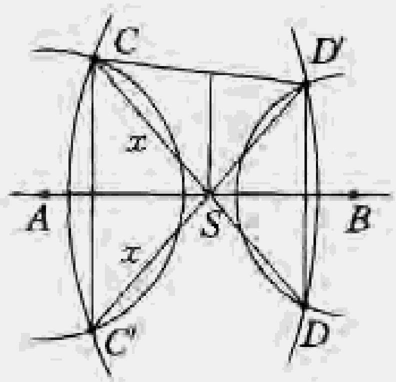


图 4－164

下面来解决基本作图(3)和(4).

基本作图(3). 只用圆规,作直线 AB 和 CD 的交点.

如图 4－164,作出 C、D 关于直线 AB 的对称点 C'、D'.记 $CD=e,CC'=c,DD'=d$,作线段 x,使 $x=\dfrac{c}{c+d}\cdot e$(根据辅助命题 1、2,可以仅用圆规完成).分别以 C 和 C' 为中心,以 x 为半径画弧,其交点 S 即为直线 AB 与 CD 之交点.显然,S 在直线 AB 上.又,根据 $x=\dfrac{c}{c+d}\cdot e$ 易证,S 也在直线 CD 上.

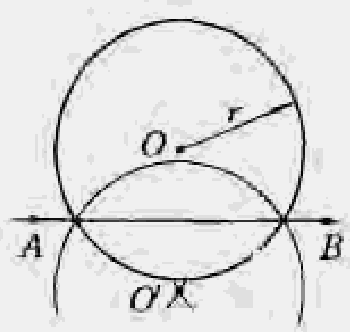


图 4－165

基本作图(4). 只用圆规,确定一个已知圆 $O(r)$ 与已知直线 AB 的交点.

如图 4－165,作 O 点关于直线 AB 的对称点 O',作⊙$O'(r)$,⊙$O'(r)$与⊙$O(r)$的交点即为 AB 与⊙$O(r)$的交点.

如果 AB 刚好通过圆心 O,则可利用辅助命题 1 的方法把 AB 延长或缩短 r,问题即可解决.

这样,五个尺规基本作图就都可以只用圆规来完成,从而所有能用尺规完成的作图题都可以只用圆规来完成.

参考文献 [24,p. 204],[28,pp. 134～142],[31,pp. 183～

186],[40,pp.480～483].

(张文华)

施泰纳问题(Steiner problem) 只用直尺,不用圆规,试过已知圆外一点作已知直径的垂线.

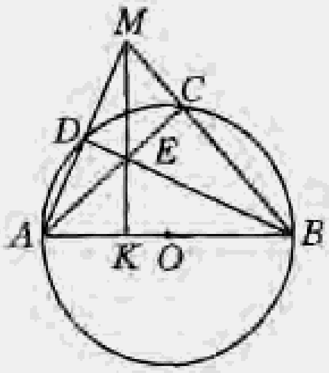


图 4-166

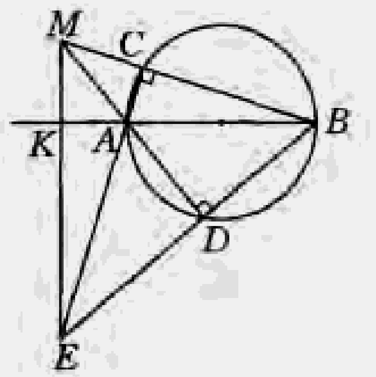


图 4-167

设 AB 是已知圆 O 的直径,M 是圆外一点.连结 MA 交圆于 D,连结 MB 交圆于 C.再连结 AC、BD,设它们交于 E.最后再连结 ME 并延长交 AB 于 K.则 $AK\perp AB$.

事实上,由于 $AC\perp MB$,$BD\perp MA$,E 是$\triangle ABM$ 的垂心,所以 $ME\perp AB$.

参考文献 [32,p.220].

(张文华)

只用直尺作图问题(Construction problem with a ruler only) 只要在平面上给出一个定圆及其圆心,任何一个可以用圆规直尺作出的图形都可以只用直尺把它作出来.

早在 1759 年,兰伯特就在其著作中提出并解决了一整套只用直尺作图问题.继之,庞斯莱于 1822 年在他的论著中证明了能用直尺和圆规完成的所有作图题(除了作圆弧以外)都能单用直尺做到,这需要事先给出一个固定的圆及其圆心.但是从整体上完全解决这个问题者归于施泰纳.1833 年,施泰纳在柏林发表了他的名著《用直尺和一定圆进行的几何作图》,非常优美地从理论上解决

了这个问题.故世人常把此问题称为施泰纳直尺问题.

要解决单用直尺作图这一课题,只需解决如下两个基本命题:

Ⅰ. 单用直尺,作出已知直线和已知圆的交点;

Ⅱ. 单用直尺,作出两个已知圆的交点.

为叙述方便起见,先解决几个预备问题.

预备题 1 单用直尺作一直线,使通过已知点,且平行于已知直线.

(1) 如图 4-168,若已知直线 a 上 A、B 两点及线段 AB 的中点 M,欲过直线 a 外一点 P 作平行于 a 的直线,可如下作图:在 AP 的延长线上任取一点 S,连结 SM、BP,设它们相交于点 N.连结 SB、AN,设它们相交于点 Q,则 $PQ /\!/ a$.

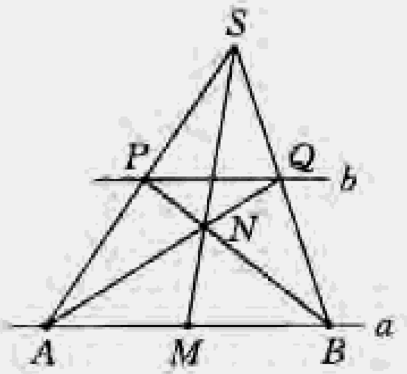


图 4-168

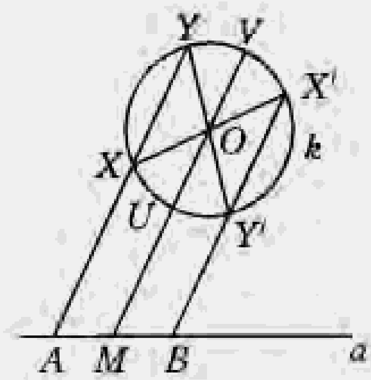


图 4-169

(2) 一般情况需利用给定的圆 k 及其中心 O.如图 4-169,在已知直线上任取一点 M,作直线 MO 交圆 k 于 U、V 两点,此时点 O 是线段 UV 的中点,运用上述(1)中的方法,可以单用直尺作出一条与 UV 平行的直线.设该直线交直线 a 于点 A,交圆 k 于点 X、Y.作圆 k 的直径 XOX'、YOY' 及直线 $X'Y'$,$X'Y'$ 交直线 a 于点 B,则点 M 必是线段 AB 的中点.再接下去就可以利用(1)中所述的方法作平行线了.

利用作平行线,我们可以平移一个已知线段,使其一端位于指定点.

预备题 2 单用直尺，过一已知点 P 作一已知直线 a 的垂线.

如图 4－170，作直线 a 的平行线交圆 O 于 U、V. 作直径 UOU'，连结 $U'V$. 过 P 作直线 $U'V$ 的平行线 b，则 b 必垂直于 a.

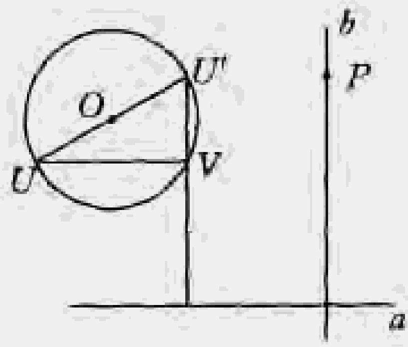


图 4－170

预备题 3 单用直尺，从一个已知点(M)向指定方向(MT)作出已知距离(PQ).

如图 4－171，根据预备题 2，把线段 PQ 平移到 MK 位置，过 O 作半径 $OU \parallel MT$，$OV \parallel MK$，再过 K 作 $KN \parallel UV$，交 MT 于 N，则 $MN = PQ$.

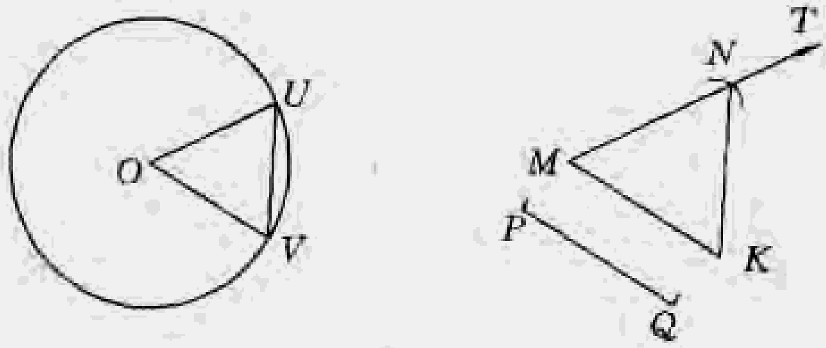


图 4－171

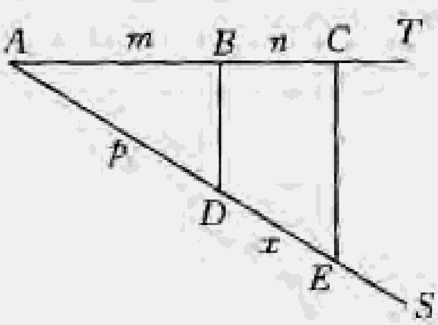


图 4－172

预备题 4 单用直尺，作已知线段 m、n、p 的第四比例项.

如图 4－172，在射线 AT 上取 $AB = m$，$BC = n$，在射线 AS 上取 $AD = p$（据预备题 3，这些都可以单用直尺完成），再作 $CE \parallel BD$，设 CE 交 AS 于 E，则 $DE = \frac{n}{m} \cdot p$，即 DE 是 m、n、p 的第四比例项.

预备题 5 单用直尺，作两已知线段 a，b 的比例中项.

如图 4－173，设定圆 k 的直径 $UV = d$，依次作线段 $c = a + b$，$p = \frac{d}{c} \cdot a$，$q = \frac{d}{c} \cdot b$. 再在直径 UV 上取一点 M，使 $UM = p$，过 M 作 $MN \perp UV$ 交圆 k 于 N（根据预备命题 2，可以单用直尺完成），则 $s = MN = \sqrt{pq}$. 最后作出线段 x，使 $x = \frac{c}{d} \cdot s$，则

$$x = \frac{(a+b)}{d}\sqrt{pq} = \frac{(a+b)}{d}\sqrt{\frac{d^2ab}{c^2}} = \sqrt{ab}.$$

有了这些预备题，解决两个基本作图问题就比较简单了.

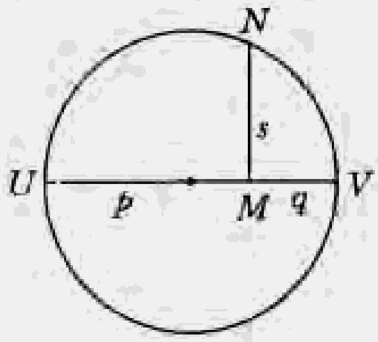


图 4－173

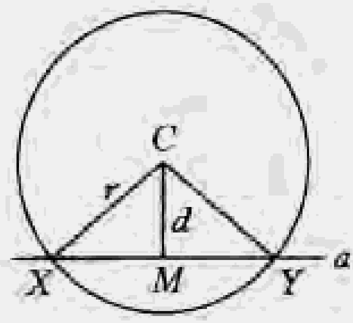


图 4－174

基本命题 1 的解决

在单用直尺作图时，当一个圆的圆心和半径已知时，就认为这个圆已被确定了. 设已知圆的圆心为 C、半径为 r. 已知直线为 a，要找直线和圆的交点 X、Y. 假定 X、Y 已经找到（如图 4－174），M 是线段 XY 的中点，弦心距 $CM = d$，则

$$MX = MY = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{(r+d)(r-d)}.$$

由预备题 2，垂线 CM 可以先行作出，M 点和线段 d 可以求得. 根据预备题 3，$r + d$ 和 $r - d$ 可以作出. 由预备题 5，$(r + d)$ 和 $(r - d)$ 的比例中项可以作出，即 MX 和 MY 可以作出. 可见交点 X、Y 可以单用直尺确定.

基本命题Ⅱ的解决

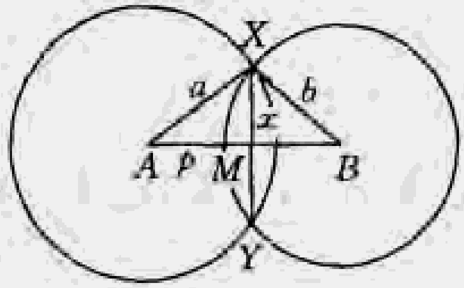


图 4-175

如图 4-175，设已知两圆的圆心为 A、B，半径分别为 a、b，连心线长 $AB=c$，要求的交点为 X、Y. 公共弦 XY 交 AB 于 M. 记 $AM=p$，$MX=x$. 易得，$b^2=a^2+c^2-2cp$.

$$\therefore p=\frac{1}{2c}(a^2+c^2-b^2)$$
$$=\frac{1}{2c}(\sqrt{a^2+c^2}+b)(\sqrt{a^2+c^2}-b).$$

根据预备题 2、3、4，这样的线段 p 是可以单用直尺作出的.

又，$MX=x=\sqrt{a^2-p^2}=\sqrt{(a+p)(a-p)}$ 也可以单用直尺作出(预备题 5).

既然 AM 和 MX 都能单用直尺作出，点 X、Y 自然就能作出了.

这样就完全解决了施泰纳的单用直尺作图问题了.

施泰纳的单用直尺作图中，要预先有某个固定的圆并知道它的圆心，否则将无法完成. 可以证明，若只给出某个圆，但没有给出其圆心，那只用直尺来完成所有尺规作图是不可能的. 即使预先给出两个不相交的圆，但未给出它们的圆心，也不能仅用直尺作图. 但是，两个相交的圆，或三个未给出圆心的不相交的圆，却完全可以代替施泰纳直尺问题中的给出圆心的圆了.

参考文献 [26，pp. 207～219]，[31，pp. 186～190]，[34，pp. 249～250].

(张文华)

三等分任意角(Trisection of an arbitrary angle) 用尺规把一个角分成相等的三个角.

三等分任意角、立方倍积、化圆为方这三个问题，一向被称为“几何作图三大问题”. 早在 2400 年前，这些问题就广泛流传于古

希腊地区，许多著名的古希腊学者都曾致力于这些问题的研究. 虽然借助于尺规以外的工具或借助于某些特殊的曲线可以解决这些问题，但在尺规作图范围内(限制只能用圆规和直尺，且限制它们的功能)却始终未能获得解决. 从表面上看，这三个问题都很简单，似乎应该能用尺规把它们作出来，正因为如此，历史上对这些问题倾注了大量精力、绞尽了脑汁最终仍不得其解的大有人在. 长期的失败使人们不得不考虑改变攻坚的方向：既然正面解决无望，何不试试从反面入手，能否证明这些问题根本就不能用尺规作出?直到 1837 年，法国数学家 Wantzel 首先证明了："三等分任意角"和"立方倍积"问题都是尺规作图不能问题. 1882 年，林德曼证明了数 π 的超越性(即 π 不是代数数)，从而断言："化圆为方"也是尺规作图不能问题.

为什么"三等分任意角"是一个尺规作图不能问题?

如图 4-176，设 $\angle XOY$ 是一已知角，OP、OQ 是它的三等分线，$\angle XOP=\angle POQ=\angle QOY$. 令 $\angle XOY=\theta$，则 $\angle XOP=\frac{\theta}{3}$. 根据三角恒等式，有 $\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$. 以 O 为圆心，单位长为半径画弧分别交 OX、

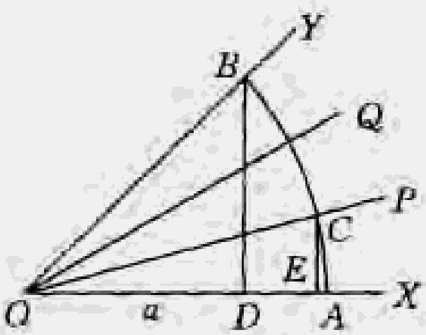


图 4-176

OP、OY 于 A、C、B，再引 $CE\perp OX$ 于 E，$BD\perp OX$ 于 D. 令 $OD=a$，$OE=x$，则 $OD=\cos\theta$，$OE=\cos\frac{\theta}{3}$. 代入三角恒等式，可得 $4x^3-3x-a=0$. 今选一特例考察之，当 $\theta=60^\circ$ 时，$a=\frac{1}{2}$. 此时上述方程变为 $8x^3-6x-1=0$，即 $(2x)^3-3\cdot(2x)-1=0$. 容易看出，此方程没有有理根. 但是有关尺规作图准则的讨论告诉我们："有理系数的三次方程如果没有有理根的话，其长度等于它的实根的线段均不能仅用尺规来作图."既然连60°的角都不能仅用

尺规来三等分，对于任意角就更不能仅用尺规来三等分了.

如果去掉“尺规作图”这个限制，那么三等分角还是可以的，而且方法很多.

1. 阿基米德的纸条作图法

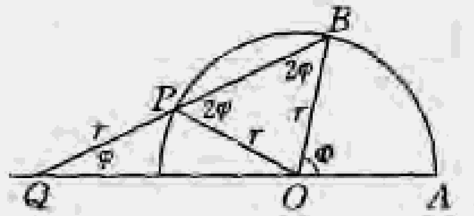


图 4-177

以要被三等分的角 Φ 的顶点 O 为圆心、r 为半径画一个圆，设该圆与角 Φ 的两边相交于 A 和 B 点，取一纸条(或直尺)，在其边缘上标出长度为 r 的线段 QP，然后把纸条边缘放在图上移动，使其通过 B 点，并且使所画线段的一个端点 Q 在 AO 的延长线上，使另一端点 P 在所画圆周上. 这时 $\angle PQA=\frac{1}{3}\Phi$. 道理很简单，由于 $PQ=PO=OB$，若设 $\angle PQO=\varphi$，则 $\angle OBP=\angle OPB=2\angle PQO=2\varphi$. 又 $\angle AOB=\angle OBP+\angle PQO$，故 $\Phi=2\varphi+\varphi=3\varphi$.

2. 帕波斯的双曲线法

给出钝角 Φ，要求将其三等分.

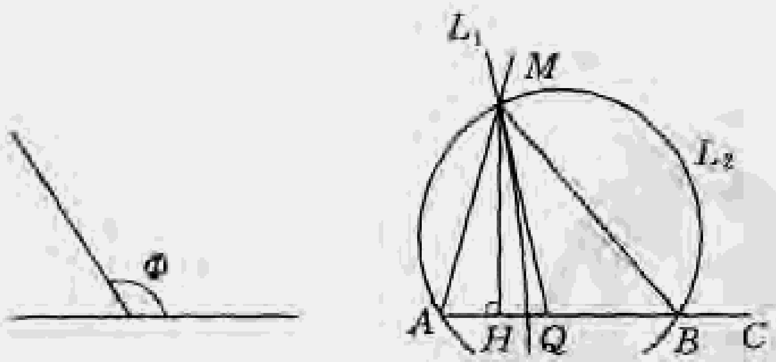


图 4-178

取线段 $AC=4a$，作一以 A、C 为焦点的双曲线 L_1，使 L_1 上的动点 P 满足 $PC-PA=2a$. 在 AC 上取 $AB=3a$，以 AB 为弦作一弓形弧 L_2，使其所含之圆周角等于 $180°-\Phi$. 设 M 是 L_1 和 L_2 的交点，则 $\angle ABM=\frac{1}{3}\Phi$. 其理由如下：

作 $MH \perp AB$ 于 H，设 $AH = x$. 由于 $MC - MA = 2a$，$MC^2 - MA^2 = CH^2 - AH^2 = (CH + AH)(CH - AH)$，$\therefore (2a + MA)^2 - MA^2 = 4a(4a - 2x)$. 即 $MA = 3a - 2x$. 如果在 HB 上截取 $HQ = AH = x$，则 $BQ = 3a - 2x$. 于是 $MA = MQ = QB$，从而 $\angle MAB = 2\angle MBA$. 又由于 $\angle MAB + \angle MBA = \Phi$，$\therefore \angle MBA = \frac{1}{3}\Phi$.

除了上面介绍的两种非尺规作图外，还有 Hippias 圆积线（亦称割圆线）作图法、Nicomedes 的蚌线作图法等. 对于三等分给定角问题，牛顿、笛卡尔等数学家也都曾研究过.

参考文献 [31，pp. 194～199]，[32，pp. 77～79]，[35，p. 103]，[40，p. 491].

（张文华）

立方倍积问题（Problem of the duplication of a cube） 作一个立方体，使其体积是已知立方体体积的两倍.

这个问题有时也称之为德里安问题、Delos 问题. 据数学家、历史学家 Eutocius（6 世纪人）叙述，这个问题可追溯到古代的一个传说. 希腊数学家、天文学家、哲学家 Eratosthenes（约前 284～前 192）曾在一本书中叙述：有一次，Delos 地方瘟疫流行，居民们纷纷祈求神谕. 巫神回答说，要想解除灾难，必须博取上帝的怜恤，为此必须把太阳神庙中的立方体形金祭坛的体积增加一倍. 于是居民们立即赶制了两个同样大小的金祭坛送到庙中，把一个叠在另一个的上面，以为这样就满足了把祭坛体积扩大一倍的要求. 岂料瘟疫继续流行，居民们只得再去祈求神谕，"我们已经把金祭坛增大了一倍，为什么瘟疫还不停止流行？"巫神回答说，"不，你们没有解决所提的问题，你们必须把金祭坛加大一倍，但不能改变立方体的形状."居民们解决不了这个问题，便去请教数学家、哲学家柏拉图，柏拉图搪塞地回答："大概上帝不满意你们很少研究几何学

吧!"但柏拉图自己也未能解决这个作图问题. 这实际是个尺规作图不能问题.

设已知立方体的边长为 a,求作立方体的边长为 x,则 $x^3=2a^3$,$x=\sqrt[3]{2}a$. 若取 $a=1$,则 $x=\sqrt[3]{2}$. 因此原问题可归结为:"能否用尺规作出长为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段?"

最早公开申明长为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段不能用尺规作出的是法国的笛卡尔. 1637 年,他提出了一个命题:非立方有理数的立方根不能简化为有限次的开平方,从而不能用尺规作出. 用尺规不能解立方倍积问题的严格证明,是法国数学家 Wantzel 在 1837 年给出的.

但是,如果允许使用某种辅助工具的话,立方倍积问题还是可以解决的,在林鹤一的《初等几何学作图不能问题》一书中,介绍了 10 种方法.

希腊数学家 Menaechmus(约前 375~前 325)的方法是利用两条抛物线 $x^2=ay$ 和 $y^2=2ax$,因为其交点的横坐标满足 $x^3=2a^3$.

笛卡尔的方法是利用抛物线 $x^2=ay$ 和圆 $x^2+y^2=ay+2ax$ 的交点.

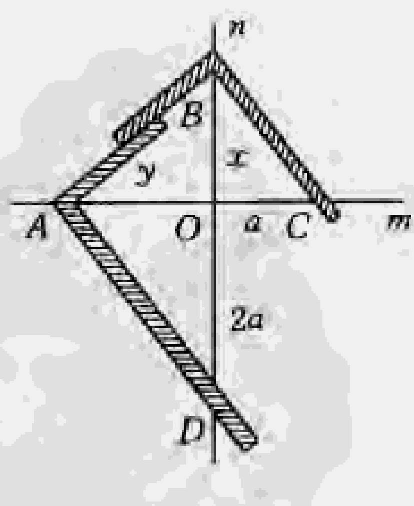


图 4-179

柏拉图的方法是利用两根普通的直角尺. 如图 4-179,取相互垂直的两直线 m 和 n,交点为 O,在直线 m 上取 $OC=a$,在直线 n 上取 $OD=2a$. 将两根木匠用的直角尺按图所示放置,使一根尺的一边(内侧)经过点 C,而直角顶点 B(内侧)在直线 n 上;使另一根直角尺的一边(外侧)经过点 D,而顶点 A(外侧)在直线 m 上. 然后使两根尺子的另两边重合. 这时,$OB=$

$\sqrt[3]{2}a$（若 $OB=x$, $OA=y$，则 $x^2=ay, y^2=2a\cdot x$，从而 $x^4=a^2y^2=a^2\cdot 2ax$，即 $x^3=2a^3$）.

最简单的是如下纸条作图法：

(1) 画一个边长为 a 的正三角形 ABC，延长 CA 到 D，使 $AD=a$，作出 DB 线；

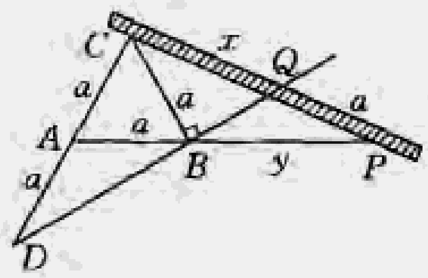


图 4-180

(2) 取一笔直的纸条，在其边缘上标出距离 a；

(3) 按如下方法放置纸条，使纸条的边缘通过点 C，并使所标线段的两个端点（P 点和 Q 点）分别落在 AB 和 DB 的延长线上（见图 4-180），这时 $CQ=\sqrt[3]{2}a$.

其理由如下：直线 DBQ 截 $\triangle ACP$，根据梅内劳斯定理，有 $\dfrac{2a}{a}\cdot\dfrac{a}{y}\cdot\dfrac{a}{x}=1$，即

$$xy=2a^2. \qquad ①$$

由于 $BA=CA=AD$，$\angle CBD=90°$，利用勾股定理，得

$$(x+a)^2=\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2,$$

即
$$x^2+2ax=y^2+ay. \qquad ②$$

由①、②消去 y，得

$$x^4+2ax^3-2a^3x-4a^4=0,$$
$$(x+2a)(x^3-2a^3)=0.$$

$\therefore x^3=2a^3$, $x=\sqrt[3]{2}a$.

参考文献　[31, pp. 191～193], [32, pp. 72～77], [33, p. 44], [23, pp. 142～162].

（张文华）

化圆为方问题(Squaring the circle)　求作一个正方形,使其面积等于已知圆的面积.

这是一个古典难题(参阅**三等分任意角**),古希腊学者在这个问题上花费了很多功夫,但均未成功.鉴于长期在化圆为方问题上的种种努力均归于失败,1755 年,巴黎科学院曾作出决议:此后不再接受化圆为方这个议题.直到 1882 年,德国数学家林德曼证明了 π 是个超越数,从而证实了"化圆为方"是一个尺规作图不能问题,即线段 $a=\sqrt{\pi}r$ 是不能单用圆规和直尺作出的(因为能用尺规作出的线段的长度,只能是由有理数经有限次加、减、乘、除、开平方运算得到的那些代数数,既然 $\sqrt{\pi}$ 不是代数数,当然不能用尺规作出).

但是,如果放松限制,允许使用特殊曲线或工具,作一个和给定圆的面积相等的正方形也还是可能的.下面介绍的是 Hippias 的圆积线方法.

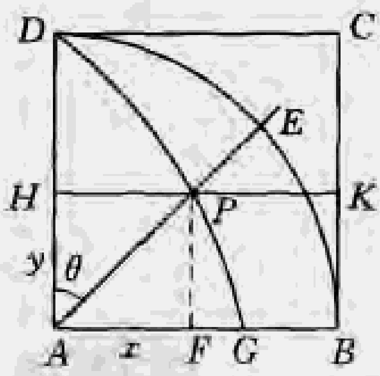


图 4-181

对于正方形 $ABCD$,设想 AD 绕 A 点逐渐旋转到 AB 边,同时 DC 边逐渐平移到 AB 边,并要求它们的速度恒相同,例如,在某一时刻,$AD\to AE$,$DC\to HK$,AE、HK 交于点 P,使 $DH:AD=\angle DAE$ 的弧度数 : $\angle DAB$ 的弧度数.满足上述条件的动点 P 的轨迹(图中之 $\overset{\frown}{DG}$)称之为圆积线(亦称割圆线).对于圆积线上的任一点 P,均有

$$\angle DAP\ \text{的弧度数}=\frac{DH}{AD}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

设 $AD=r$, $PF\perp AB$ 于 F, $PH\perp AD$ 于 H, $AF=x$, $AH=y$, $\angle DAP=\theta$, 则　$\theta=\dfrac{(r-y)}{r}\cdot\dfrac{\pi}{2}$,

$$\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\frac{(r-y)\pi}{2r}=\cot\frac{\pi y}{2r}.$$

故圆积线的方程为

$$x=y\cot\frac{\pi y}{2r}.$$

由于 $\lim\limits_{y\to 0} y\cot\frac{\pi y}{2r}=\lim\limits_{y\to 0}\left[\frac{\frac{\pi y}{2r}}{\sin\frac{\pi y}{2r}}\cdot\cos\frac{\pi y}{2r}\cdot\frac{2r}{\pi}\right]=\frac{2r}{\pi}$,

故 $AG=\frac{2r}{\pi}$.

利用圆积线可以解决化圆为方问题:

设圆的半径为 r,其面积为 $A=\pi r^2=\frac{1}{2}(2\pi r)\cdot r=\frac{1}{2}Cr$,其中 C 为圆周长.

如果能设法作出圆的周长,即可作出与圆等积的长方形,进而作出与之等积的正方形.因为圆周长 $C=2\pi r=\frac{4r^2}{\frac{2r}{\pi}}=\frac{4r^2}{AG}$. 因此利用圆积线可以作出圆周长.

参考文献 [23,pp.87~99,pp.171~172][24,p.191][32,pp.80~81][40,p.494]

(张文华)

作正七边形问题(Construction problem of regular heptagon) 把已知圆周七等分,作出圆内接正七边形.

该题曾被称为古希腊第四大几何难题.阿基米德曾证明:单用直尺圆规不能作出正七边形.

先说明正七边形的确是尺规作图不能问题.作正七边形的关键是作出 $\theta=\frac{2\pi}{7}$ 的角.

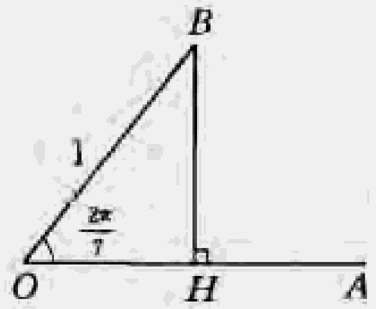


图 4－182

如图 4－182，设 $\angle AOB=\frac{2\pi}{7}$，取 $OB=1$，作 $BH\perp OA$ 于 H，则 $OH=\cos\frac{2\pi}{7}$. 若能把线段 OH 作出，则 $\theta=\frac{2\pi}{7}$ 角也能作出.

设 $\theta=\frac{2\pi}{7}$，则 $3\theta=2\pi-4\theta$.

由于 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，

$$\cos 4\theta=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1.$$

$\therefore 8\cos^4\theta-4\cos^3\theta-8\cos^2\theta+3\cos\theta+1=0.$

令 $\cos\theta=\frac{x}{2}$，则

$x^4-x^3-4x^2+3x+2=0$，

即 $(x-2)(x^3+x^2-2x-1)=0.$

由于 $x=2\cos\frac{2\pi}{7}\neq 2$，$x-2\neq 0$，

$\therefore x^3+x^2-2x-1=0.$ ①

这是一个有理系数的三次方程，由于它没有有理根，因此这个方程的根不能利用直尺和圆规将其作出. 因此 $x=2\cos\frac{2\pi}{7}$ 不能用尺规作出. 这说明正七边形是一个尺规作图不能问题.

但是，如果放宽限制，允许使用直角尺的话，我们还是可以作出正七边形的.

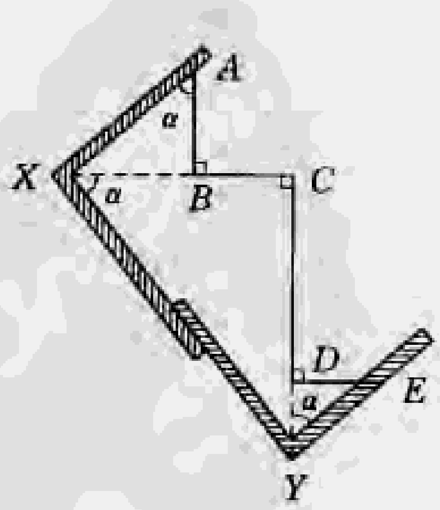


图 4－183

如图 4－183，作折线 $ABCDE$，使 $AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$CD\perp DE$，且 $AB=1$，$BC=1$，$CD=2$，$DE=1$. 再利用两根直角尺，如图所示作出折线

$AXYE$，使 X 点在 CB 延长线上，Y 点在 CD 延长线上，且 $\angle AXY = 90°$，$\angle XYE = 90°$，则 XB 的长度就满足方程①.

设 $\angle XAB = \alpha$，则 $\angle BXY = \angle DYE = \alpha$.

$XB = \operatorname{tg}\alpha, CY = (1 + \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

又 $DY = \cot\alpha$，$CY = 2 + \cot\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

$\therefore (1 + \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha}$，

即 $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$.

可见 $|XB|(=\operatorname{tg}\alpha)$ 满足方程①.

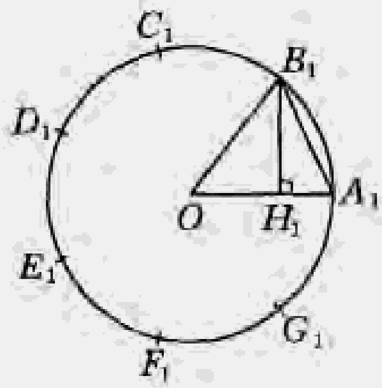


图 4－184

作出 XB 后，就可以作正七边形了. 如图 4－184，作一单位圆及其一半径 OA_1，在 OA_1 上取一点 H_1，使 $OH_1 = \dfrac{1}{2}XB$，过 H_1 作 $B_1H_1 \perp OA_1$ 交单位圆于 B_1，则 $\angle A_1OB_1 = \dfrac{2\pi}{7}$，$A_1B_1$ 就是圆内接正七边形之一边. 以此为基础就不难作出圆内接正七边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$ 了.

参考文献　[17，pp. 90～93]，[24，pp. 189～190]，[32，pp. 68～71]，[40，p. 515].

（张文华）

（六）极　值

Serenus 问题（Serenus problem）　记△ABC 的内角 $\angle A$ 的对边为 a，周长为 s. 若 a 和 $\angle A$ 一定，则当 $AB = AC$ 时 s 最大.

该问题载于 Serenus 所著的 *De sectione coni* 一书中.

固定 $BC = a$，由于 $\angle A = \alpha$ 一定，A 点应在以 BC 为弦、所含弓形角等于 α 的弓形弧上. 延长 BA 至 E，使 $AE = AC$，则 $BE = AB + AC$，$\angle AEC = \dfrac{\alpha}{2}$. 所以 E 点应在以 BC 为弦、所含弓形角

等于$\frac{\alpha}{2}$的弓形弧上. 今欲使 BE 最大, 则 BE 应过弓形弧所在圆的圆心, 即 BE 应位于直径 BD 位置. 而 BD 和$\overset{\frown}{BAC}$的交点 A_0 就是上述圆心. 此时 $A_0C=A_0B$. 故△ABC 是等腰三角形时, 其周长最大.

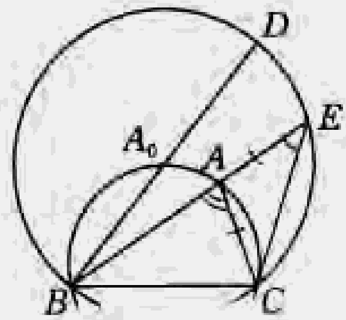


图 4-185

参考文献 [38, p. 373].

(张文华)

Alhazen 弹子问题(Alhazen marble problem) 一张圆形的弹子台上放着两个弹子, 从哪个方向打击其中一个, 使它从台边弹回时必撞击到另一个?

这个问题是由阿拉伯数学家 Al Hassan ibn Al-haitham(约 965～1039)提出的. 由于译者把他的名字译为 Alhazen, 故通常以 Alhazen 知名于世.

该问题也曾这样叙述过: 如何在一个球形凹面镜上找一点, 使由一已知点到这点来的光线被凹球面镜反射到另一个已知点?

在 Alhazen 以后, 许多著名数学家如巴罗(I. Barrow)、黎卡提、洛必达、Quetelet 等都研究过该问题.

该问题用数学表述为: 在定圆 $O(r)$ 内给定了两点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$, 试在圆周上找一点 $A(x, y)$, 使 $\angle PAO=\angle OAQ$.

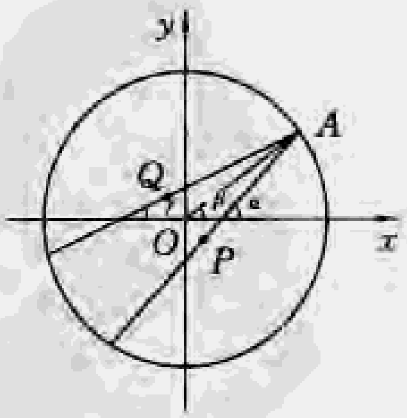


图 4-186

如图 4-186, 设 AP、AO、AQ 所在直线的倾角分别为 α、β、γ, 则应有 $\alpha-\beta=\beta-\gamma$, $\therefore$ $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$.

将 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$，$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{y}{x}$，$\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$ 代入上式，得

$$\frac{\dfrac{y-y_1}{x-x_1}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\dfrac{y}{x}}=\frac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{y-y_2}{x-x_2}}{1+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y-y_2}{x-x_2}}.$$

展开、整理，得 $H(x^2-y^2)-2Kxy+r^2(hy-kx)=0$，

其中，$H=x_1y_2+x_2y_1$，$K=x_1x_2-y_1y_2$，

$h=x_1+x_2$，$k=y_1+y_2$.

解二元二次方程组

$$\begin{cases}H(x^2-y^2)-2Kxy+r^2(hy-kx)=0,\\ x^2+y^2-r^2=0,\end{cases}$$

即可得 A 点的坐标. 在一般情况下，符合条件的 A 点可以有四个.

当 $OP=OQ$ 时，该问题可以用简单的几何作图来解决.

如图 4-187，作△OPQ 的外接圆 O_1，若它与⊙O 交于 A 点，则 A 点即合要求. 道理很简单：在⊙O_1 中，∠PAO、∠OAQ 所对的弧相等，所以它们相等. 从图上还容易看出：A、B、M、N 四点（MN 是垂直平分 PQ 的直径）均合乎要求.

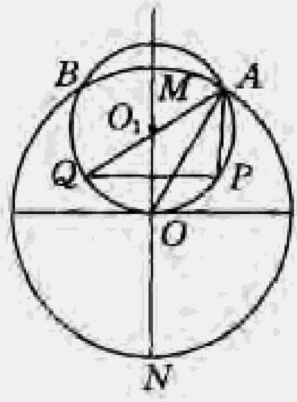


图 4-187

Alhazen 弹子问题也可以表达成如下形式："在圆周上找一点，使其与圆内两个已知点的距离之和为最小（或最大）."这是因为对于⊙O 上的点 A，若要 $PA+QA$ 最小（或最大），PA、QA 与圆周所成的角必须相等. 若以 P、Q 为焦点作一簇椭圆，其中必有与⊙O 相切者，此时切点就是要求的点.

参考文献 [31，pp. 200～224]，[33，p. 221]，[38，p. 363].

（张文华）

费马极值问题（Fermat extremum problem） 在已知△ABC 所

在平面上找一点 P，使点 P 到 A、B、C 三点的距离之和最小.

此问题由法国数学家费马首先提出，故称费马问题. 但也有人把该问题称为施泰纳问题，因为 19 世纪初，柏林大学的施泰纳提出了如下既简单、却很有启示性的问题：如何将三个村庄用总路程为最短的道路连结起来（即三村短路问题）. 1837 年，施泰纳得出了如下结论：如果$\triangle ABC$ 的每个内角均小于 120°，那么使 $PA+PB+PC$ 最小的点 P 正好使在 P 处的三个角（$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$）都等于 120°；如果$\triangle ABC$ 有一个角不小于 120°，那么 P 点就和该角的顶点重合. 其实，这个结果早就被卡瓦列里证明过（载于 1647 年的《六道几何练习题》一文）. 但施泰纳还把这个结果推广到了 n 个点的情况，并提出了多种证明方法. 下述方法就是施泰纳提出的.

（1）当$\triangle ABC$ 的每个内角都小于 120°时，满足条件 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$ 的 P 点必在$\triangle ABC$ 内. 过 A、B、C 分别作 $MN\perp PA$、$NL\perp PB$、$LM\perp PC$，MN、NL、LM 围成一个正三角形 LMN.

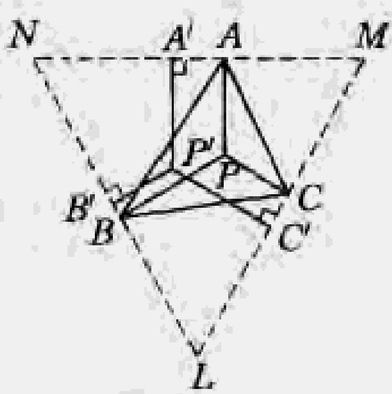


图 4－188

设 P'是形内任意一点，自 P'作 $P'A'$、$P'B'$、$P'C'$分别垂直 MN、NL、LM 于 A'、B'、C'. 由于$\triangle LMN$ 是正三角形，所以 $P'A'+P'B'+P'C'=PA+PB+PC=h$，其中 h 是$\triangle MNL$ 的一条高之长. 但 $P'A\geqslant P'A'$，$P'B\geqslant P'B'$，$P'C\geqslant P'C'$，$\therefore PA+PB+PC\leqslant P'A+P'B+P'C$. 可见 P 是到三顶点的距离和最小的点.

上述 P 点可以这样求得：先以 BC、CA 为一边，在$\triangle ABC$ 外作两个正三角形，再作这两个正三角形的外接圆，两圆之交点（非 C 点）即为所求之 P 点.

（2）当 $\angle A\geqslant 120°$ 时，设 Q 为除 A 以外任意点. 连 QA、QB、

QC，将$\triangle ABQ$绕A点旋转，使AB转至CA的延长线上的AB'，

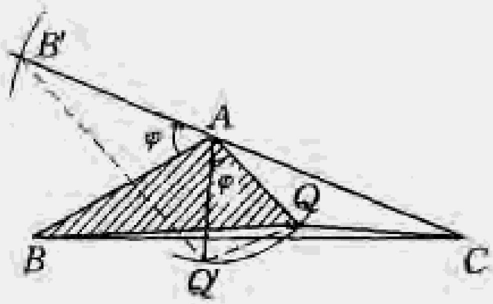


图 4-189

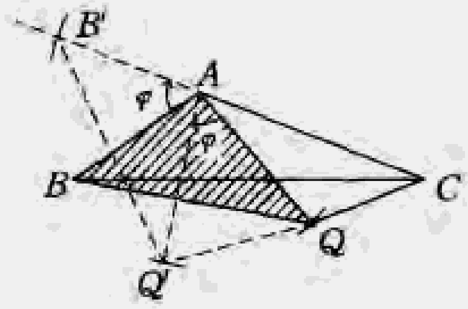


图 4-190

AQ转至AQ'. 由于$\angle A \geqslant 120°$，故旋转角$\varphi \leqslant 60°$. 在$\triangle AQQ'$中，由于$AQ = AQ'$，$\angle QAQ' = \varphi \leqslant 60°$，故$QQ' \leqslant QA$. 又$BQ = B'Q'$，于是

$$\begin{aligned} QA + QB + QC &\geqslant CQ + QQ' + Q'B' \\ &\geqslant CB' = AB + AC, \end{aligned}$$

即$AB + AC \leqslant QA + QB + QC$，故$A$点是到$A$、$B$、$C$三点的距离和最小的点.

三村短路问题可推广为下述道路网络问题：给定n个点A_1，A_2，A_3，…，A_n，试求连结此n个点的直线段连接系统，使任意两点间都可由折线相连结，且所有直线段之总长为最短. 显然，此问题的解与给定点的排列位置有关，图 4-191 给出的是一些较简单的情况. 图中，各结点处的三线段相互间的交角均为 120°.

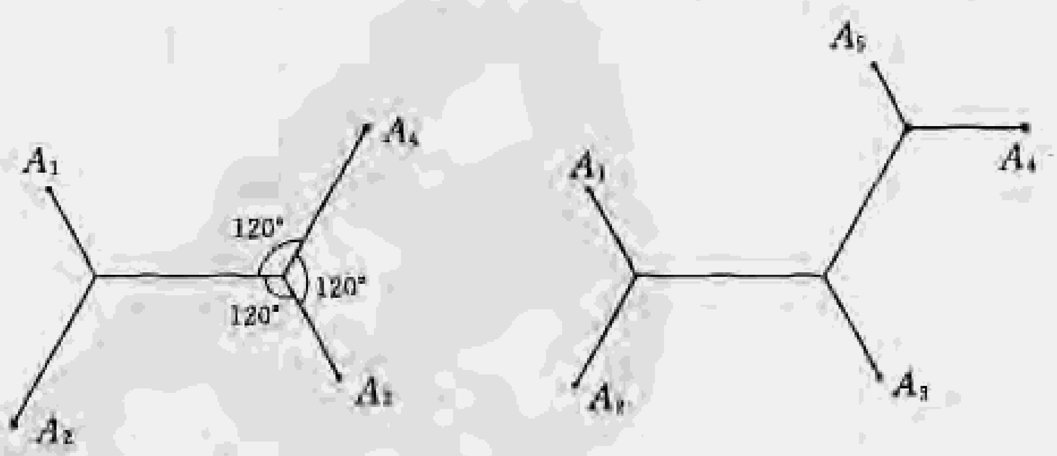


图 4-191

参考文献 [24,pp.460～469],[31,pp.392～394],[34,p.248],[38,p.364].

(张文华)

Fagnano 问题(Fagnano problem) 在△ABC 内求一点 P,使:(1) $PA^2+PB^2+PC^2$ 为最小;(2) $lPA^2+mPB^2+nPC^2$ 为最小.

本题由意大利数学家 Fagnano 于 1775 年提出并证明.

如图 4-192,建立直角坐标系,并设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$P(x,y)$.

(1)
$$\begin{aligned}&PA^2+PB^2+PC^2\\&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\\&\quad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\&=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\&\quad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\\&=3\left[x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right]^2+3\left[y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right]^2\\&\quad+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)\\&\quad-\frac{1}{3}\left[(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2\right].\end{aligned}$$

∴ 当 $x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$ 时, $PA^2+PB^2+PC^2$ 有最小值,即当 P 点位于△ABC 的重心位置时, $PA^2+PB^2+PC^2$ 为最小.

(2)
$$\begin{aligned}&lPA^2+mPB^2+nPC^2\\&=l[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+m[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]\\&\quad+n[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2]\\&=(l+m+n)x^2-2(lx_1+mx_2+nx_3)x+(lx_1^2+mx_2^2\\&\quad+nx_3^2)+(l+m+n)y^2-2(ly_1+my_2+ny_3)y\\&\quad+(ly_1^2+my_2^2+ny_3^2)\end{aligned}$$

$$= (l+m+n)\left[x - \frac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n}\right]^2$$
$$+ (l+m+n)\left[y - \frac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n}\right]^2$$
$$- \frac{(lx_1+mx_2+nx_3)^2}{l+m+n} - \frac{(ly_1+my_2+ny_3)^2}{l+m+n}$$
$$+ (lx_1^2+mx_2^2+nx_3^2) + (ly_1^2+my_2^2+ny_3^2).$$

当 $x = \dfrac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n}$, $y = \dfrac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n}$ 时，

$lPA^2 + mPB^2 + nPC^2$ 取最小值. 此时 P 位于$\triangle ABC$ 的加权重心 G: $BD : DC = n : m$, $AG : GD = (m+n) : l$, $G\left(\dfrac{lx_1+mx_2+nx_3}{l+m+n}, \dfrac{ly_1+my_2+ny_3}{l+m+n}\right)$.

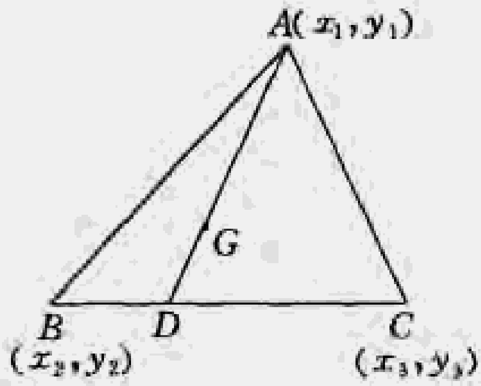


图 4-192

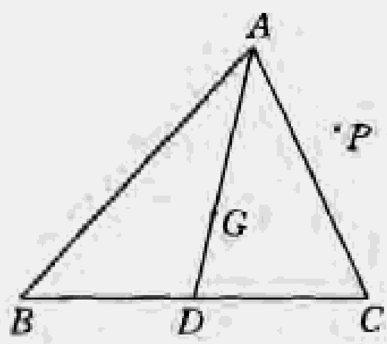


图 4-193

问题(1)也可以用综合法求解.

如图 4-193，设 AD 是$\triangle ABC$ 的中线，G 是重心. 根据 Stewart 定理，对于平面上任一点 P，有

$$PD^2 = \frac{1}{2}PB^2 + \frac{1}{2}PC^2 - \frac{1}{4}a^2,$$

即 $\quad PB^2 + PC^2 = 2PD^2 + \dfrac{1}{2}a^2;$

$$PG^2 = \frac{2}{3}PD^2 + \frac{1}{3}PA^2 - \frac{2}{9}AD^2,$$

即 $\quad PA^2 = 3PG^2 + \dfrac{2}{3}AD^2 - 2PD^2;$

$$2AD^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2\right)$$

$$= 3PG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

可见当 P 点位于 $\triangle ABC$ 的重心位置时，$PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的值最小，其最小值为 $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

问题(2)也可以利用 Stewart 定理来证明. 如图 4－193，在 BC 上取点 D，使 $BD : DC = n : m$，在 AD 上取点 G，使 $AG : GD = (m + n) : l$，则 G 就是 $\triangle ABC$ 的加权重心. 用与上述类似的方法可以证明，当 P 位于 G 位置时，$lPA^2 + mPB^2 + nPC^2$ 的值最小.

参考文献 [38，p. 365].

（张文华）

Watson 问题（Watson problem） 求到定三角形三边距离之积为最大的点.

该问题是由 Watson 于 1756 年提出的.

设给定 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，面积为 S. $\triangle ABC$ 内一动点 P 到 BC、CA、AB 的距离分别为 x、y、z，则 $ax + by + cz = 2S$. 于是

$$(ax)(by)(cz) \leqslant \left[\frac{1}{3}(ax + by + cz)\right]^3 = \frac{8}{27}S^3,$$

即 $xyz \leqslant \frac{8S^3}{27abc}$，当且仅当 $ax = by = cz$ 时等号成立. 此时 P 点位于 $\triangle ABC$ 的重心位置，即当 P 点是 $\triangle ABC$ 的重心时，它到三边的距离之积为最大.

与 Watson 问题相对应，有如下极值问题：

求到定三角形三边的距离平方和最小的点.

设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，面积为 S，三角形内一点 P 到三

边的距离分别为 x、y、z，则 $ax+by+cz=2S$. 另一方面，由柯西不等式

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(ax+by+cz)^2,$$

当且仅当 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 时，式中的等号成立.

可见，当 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 时，$x^2+y^2+z^2$ 取得最小值 $\frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$. 此时，相应的点 P 是 $\triangle ABC$ 的类似重心（重心的等角共轭点）.

参考文献 [38,p.366].

（张文华）

平面等周问题（Isoperimetric problem in a plan） （1）在所有等周长的平面图形中，圆有最大的面积；（2）在所有等面积的平面图形中，圆有最小的周长.

等周问题，源远流长，可一直追溯到古希腊时代. 传说 Tyre 国王的女儿 Dido 逃亡到非洲海岸，在那里成为迦太基创立者的继承人，她被允许从当地取得“不许比一张牛皮包得起来再大”的那么一块靠海的土地，于是她把牛皮割成细窄的长条以做成一条很长的绳子，为了得到最大的面积，Dido 用已知长的绳子在海边围成一个半圆形.

公元 180 年左右，希腊人 Zenodorous 著有《等周论》一书，其中就有如下命题：“圆的面积大于任何同周长的正多边形的面积.”“表面积相同的几何体中，以球的体积最大.”可惜这本书失传了，后人只是因为其中的 14 个命题被 4 世纪的帕波斯收入他的《数学汇编》第五卷中而得以知晓. 在《数学汇编》中，帕波斯还补充了如下命题：“周长相等的所有弓形中，半圆的面积最大.”“球的体积比表面积相同的圆锥体、圆柱体、正多面体的体积都大.”

17 世纪，许多著名数学家也都曾研究过等周问题. 笛卡尔在

他未完成的《思想的法则》一书中说:"为了用列举法证明圆的周长比任何具有相同面积的其他图形的周长都小,我们不必全部考察所有可能的图形,只需对几个特殊的图形进行证明,再运用归纳法,就可以得到与对所有其他图形都进行证明得出的同样结论."Wallis(1616~1703)则提出并解决了如下问题:"周长相等的矩形中,正方形的面积最大."雅各布·伯努利则于1697年5月在《教师学报》上提出了一个包含多种情况的、相当复杂的等周问题,并以此向其弟弟约翰·伯努利挑战,以后又发表了《等周问题实解》一文,部分地解决了这一问题.

等周问题也是促进变分法早期发展的一个问题,伯努利家族通过对等周问题、最速降线问题、悬链线问题的研究,奠定了变分法的基础.

对于等周问题,大几何学家施泰纳有深入的研究.1840~1841年间,他在巴黎写成《关于平面、球面和空间图形的极大和极小》一文,用综合几何的方法巧妙地解决了这一问题,而且给出了五种方法.下面介绍的就是施泰纳的方法,但这个方法中隐含了一个前提条件,即默认在定周长的所有曲线中,包含的区域面积最大的曲线是存在的.1870年,魏尔斯特拉斯求助于变分法完全解决了平面等周问题.之后,在Constantin Caratheodory(1873~1950)和Study合写的一篇文章中,不用变分法工具,把施泰纳的证明严格化了.

命题1　假定闭曲线 P 是具有给定周长 $2p$,而所围面积最大的一条闭曲线.

(1) 曲线 P 必定是凸曲线.

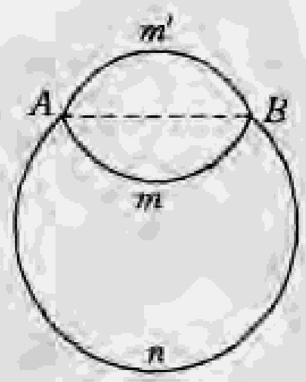


图4-194

如图4-194,若 P 不是凸的,则可以利用轴对称得到另一条周长为 $2p$ 的曲线 P',其所围的面积比 P 所围的面积还要大(P 由曲线 AmB 和 BnA 组成,P' 由曲线 $Am'B$ 和 BnA 组成,$Am'B$ 和 AmB 关于 AB 对称),这与 P

是所围面积最大的曲线这一假设不符.

(2) 任何把 P 分为相等长两段的直线必平分 P 所围的面积.

如图 4-195,若 P 不具有上述性质,则可利用轴对称得到另一条曲线 P',它的周长也是 $2p$,但其面积比 P 所围的面积还要大.在图 4-195 中,若曲线 AmB 和 BnA 的长度都是 p,但 $AmBA$ 所围的面积比 $BnAB$ 所围的面积大,作 AmB 关于 AB 的对称曲线 $Am'B$,则 P'(即 $AmBm'A$)和 P(即 $AmBnA$)周长相等,但前者所围面积比后者大.

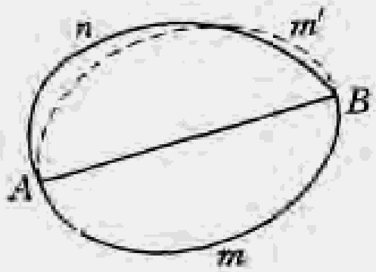


图 4-195

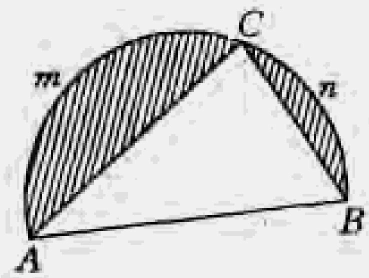


图 4-196

(3) 曲线 P 上,任何长度为 p 的弧 AmB 必是以 AB 为直径的半圆.

首先,由假设在所有长度为 p 的曲线及其封闭线段所围的面积中,曲线 P 上长度为 p 的弧 AmB 和直线段 AB 所围的面积 Δ 必最大.

其次,对于弧 AmB 上任一点 C,必有 $\angle ACB = 90°$(见图 4-196).这是因为,若 $\angle ACB \neq 90°$,则可以通过调整$\angle ACB$ 的大小而使$\triangle ACB$ 的面积变大,但两个月牙形 AmC、BnC 的面积不变,从而得到一条新的曲线 P',其长度仍为 p,但它和封闭直线段所围的面积却大于 Δ,这与"Δ 必最大"相矛盾.

由以上三点知,P 必是圆.

命题 2 设 Σ 是面积为 A 的圆,其周长为 p,P 是面积为 A 的非圆闭曲线,其周长为 q,则必有 $p < q$.

假设 $p \geqslant q$. 作 Σ 的同心圆 Σ',使其有周长 q,于是由 $p \geqslant q$

知，圆Σ'必在圆Σ的内部，圆Σ'的面积$A' \leqslant A$. 但另一方面，由于Σ'和P有相同的周长，依据命题1，应有$A' > A$，这就产生了矛盾. 既然$p \geqslant q$不能成立，必有$p < q$.

等周问题可用下述等周不等式来表达：设平面正则简单闭曲线C的周长为L，它所包围的区域的面积为A，则有$L^2 \geqslant 4\pi A$，等号当且仅当C是圆周时成立.

平面等周问题可推广到空间，得到空间等周问题：在表面积相等的所有立体中，球具有最大的体积，在体积相等的所有立体中，球具有最小的表面积.（参见空间等周问题）

参考文献　[24, pp. 485～487]，[25, pp. 185～210]，[31, pp. 414～418].

（张文华）

Schwarz 三角形（Schwarz triangle）　在已知锐角三角形内，作一个周长最小的内接三角形.

该问题是意大利伯爵 C. Fagnano（1682～1766）的儿子 J. F. Fagnano（1715～1797）于1775年提出的. 他给出了一个要用到微积分的证明. 由于 H. A. Schwarz（1843～1921）第一个用完全初等的方法给出了一个十分漂亮的解法，所以许多人把此问题称为 Schwarz 三角形问题. Schwarz 的证明后来被美国人 Frank Morley（1860～1931）推广到$2n+1$边形的情况.

在锐角$\triangle ABC$中，若D、E、F分别是三条高AD、BE、CF的垂足，则在$\triangle ABC$的所有内接三角形中，垂足三角形DEF的周长最短.

下面的证明源于 H. A. Schwarz.

如图4-197，设$\triangle DEF$是$\triangle ABC$的垂足三角形，$\triangle PQR$是任意内接三角形，将$\triangle ABC$（连同$\triangle DEF$、$\triangle PQR$）作关于AC边的反射，再把所得图形（$\triangle AB'C$）作关于$B'C$边的反射，再把所得图形（$\triangle A'B'C$）作关于$A'B'$边的反射，再将所得图形（$\triangle A'B'C'$）作关于$A'C'$边的反射，最后再把所得图形（$\triangle A'B''C'$）作关于$B''C'$

边的反射，得$\triangle A''B''C'$. 经过这样五次反射后，我们得到如图 4-197 所示的连接在一起的六个全等的三角形(与$\triangle ABC$全等)，以及分别与$\triangle DEF$、$\triangle PQR$相应的一系列内接三角形.

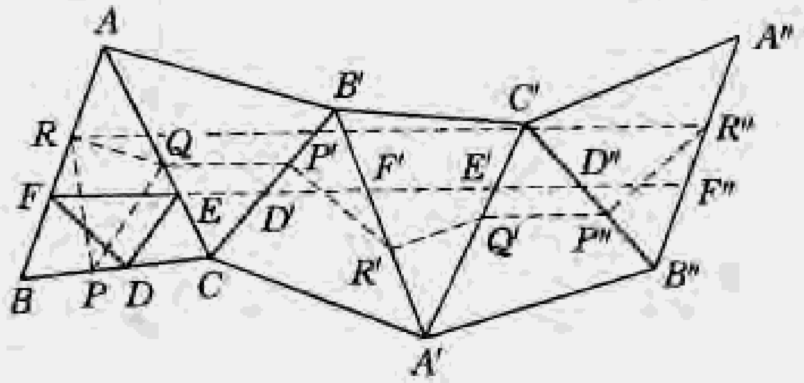


图 4-197

由于第一次反射使$\overrightarrow{AB}$按逆时针方向旋转了角度 $2A$，第二次反射使$\overrightarrow{AB'}$按逆时针方向旋转了角度 $2B$，第三次反射时$\overrightarrow{A'B'}$方向没有变化，第四次、第五次反射中$\overrightarrow{A'B'}$及$\overrightarrow{A'E''}$分别按顺时针方向旋转了 $2A$ 和 $2B$，故经过上述五次反射后，$\overrightarrow{AB}$的方向没有变化，所以 $A''B''\ /\!/\ AB$.

由于垂足三角形 DEF 有这样一个特殊性质：它的两边与$\triangle ABC$ 的相应边成等角(即 $\angle BDF=\angle EDC$，$\angle DEC=\angle FEA$，$\angle EFA=\angle DFB$)，所以经第一次反射后，与 DE 相应的线段 ED' 在 FE 的延长线上，经第二次反射后，与 DF 相应的线段 $D'F'$ 也在 FE 的延长线上，经第三次反射后，与 EF 相应的线段 $F'E'$ 也在 FE 的延长线上，以后两次反射也是如此，DE、DF 的相应线段 $E'D''$、$D''F''$都在 FE 的延长线上. 因此，$FED'F'E'D''F''$是一直线段，且 FF''等于$\triangle DEF$ 的周长的两倍.

再来观察任意内接三角形 PQR 经上述五次反射后得到的图形，发现折线 $RQP'R'Q'P''R''$的长度是$\triangle PQR$ 的周长的两倍. 显然该折线的长度不短于 RR''，即$\triangle PQR$ 的周长的两倍不短于 RR''. 由 $F''R''\ \underline{\underline{/\!/}}\ FR$ 知 $RR''=FF''$，可见$\triangle PQR$ 的周长不短于

$\triangle DEF$ 的周长.

下面是 Fagnano 问题的另一种解法，这一解法属于法国的小 Gabriel-Marie.

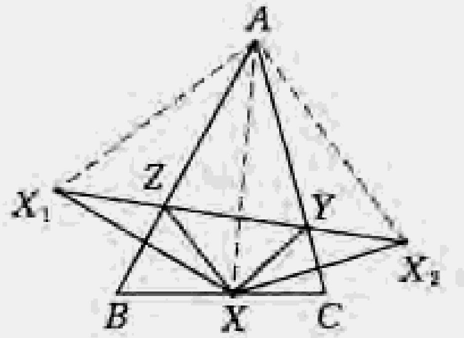


图 4-198

设$\triangle XYZ$ 内接于$\triangle ABC$，作出点 X 关于 AB、AC 的对称点 X_1、X_2，则 $ZX_1=ZX$，$YX_2=YX$，折线 X_1ZYX_2 的长度等于$\triangle XYZ$ 的周长. 显然，对于某个固定的点 X，只有当 Y、Z 在线段 X_1X_2 上时，$\triangle XYZ$ 的周长才能最小，其最小值为 X_1X_2 的长度. 又由于 $AX_1=AX_2=AX$，$\angle X_1AX_2=2A$（定角），$X_1X_2^2=AX_1^2+AX_2^2-2AX_1\cdot AX_2\cdot\cos 2A=2AX^2(1-\cos 2A)$. X_1X_2 的长度取决于 AX 的长度，只有当 $AX\perp BC$ 时，X_1X_2 才有最小值. 因此，要使$\triangle XYZ$ 的周长最短，必须 $AX\perp BC$. 同理，必须 $BY\perp AC$，$CZ\perp AB$. 故周长最短的内接三角形是$\triangle ABC$ 的垂足三角形.

参考文献　[24，pp. 450～456]，[27，p. 100]，[31，pp. 390～392].

（张文华）

最小内接四边形（A minimal inscribed quadrilateral）　设四边形 $ABCD$ 是一个圆内接四边形，X 是其对角线交点，自 X 向四边形的各边作垂线，垂足分别为 P、Q、R、S. 试证明：所有四个顶点分别位于四边形 $ABCD$ 的四条边上的四边形中，四边形 $PQRS$ 的周长最短.

本题选自 1926 年的《美国数学月刊》中的问题2 728(p. 161)，它是由 G. Y. Sosnow 提出的，解答则出自 Michael Goldberg.

(1) 先证明四边形 $PQRS$ 的边与四边形 $ABCD$ 的相应边相交成等角，即 $\angle SPA=\angle QPB$，$\angle PQB=\angle RQC$，$\angle QRC=\angle SRD$，$\angle RSD=\angle PSA$.

如图 4－199，∵ A、P、X、S 共圆，∴ $\angle 1=\angle 2$. ∵ P、B、Q、X 共圆，∴ $\angle 3=\angle 4$. 又 ∵ $\angle 1=\angle 4$，∴ $\angle 2=\angle 3$. ∴ $\angle SPA=90^\circ-\angle 2=90^\circ-\angle 3=\angle QPB$.

同理可证 $\angle PQB=\angle RQC$，$\angle QRC=\angle SRD$，$\angle RSD=\angle PSA$.

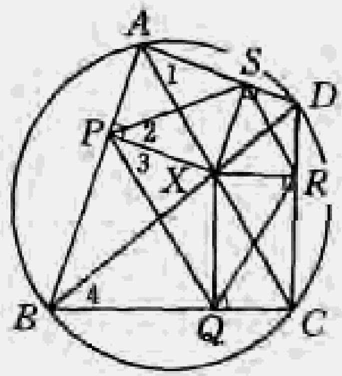


图 4－199

（2）利用轴对称展开内接四边形的周长. 如图 4－200 所示，以 AB 为对称轴作四边形 $ABCD$ 及 $PQRS$ 的轴对称图形 ABC_1D_1 及 $PQ_1R_1S_1$，接着以 BC_1 为对称轴作四边形 ABC_1D_1 及 $PQ_1R_1S_1$ 的轴对称图形 $A_2BC_1D_2$ 及 $P_2Q_1R_2S_2$，最后以 C_1D_2 为轴作 $A_2BC_1D_2$ 及 $P_2Q_1R_2S_2$ 的对称图形 $A_3B_3C_1D_2$ 及 $P_3Q_3R_2S_3$. 在上述图形中，由于四边形 $PQRS$ 的各边与四边形 $ABCD$ 的相应边成等角，所以 S、P、Q_1、R_2、S_3 在一直线上（例如，由于 $\angle Q_1PB=\angle QPB=\angle SPA$，$S$、$P$、$Q_1$ 在一直线上），从而 $PQ+QR+RS+SP=SP+PQ_1+Q_1R_2+R_2S_3=SS_3$.

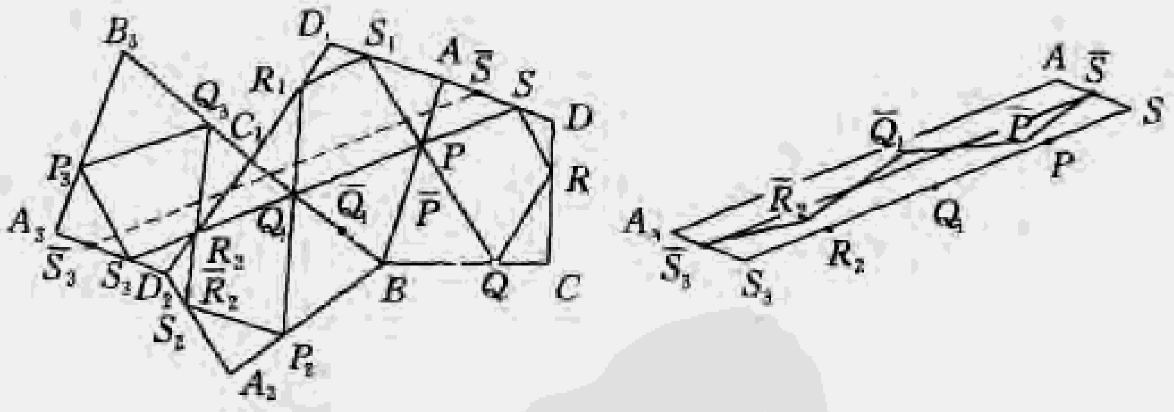


图 4－200

如果四边形 $\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R}\,\overline{S}$ 是四边形 $ABCD$ 的任一内接四边形，则它的周长也可以利用上述三次轴对称展开，得到一条折线 $\overline{S}\,\overline{P}\,\overline{Q}_1\,\overline{R}_2\,\overline{S}_3$，它的长度等于四边形 $\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R}\,\overline{S}$ 的周长. 由轴对称的

性质可知 $S\overline{S} \mathrel{\underline{\parallel}} S_3\overline{S}_3$，从而 $SS_3 \mathrel{\underline{\parallel}} \overline{S}\,\overline{S}_3$. 但是折线 $\overline{S}\,\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R}_2\overline{S}_3$ 的长度不小于 $\overline{S}\,\overline{S}_3$，所以四边形 $PQRS$ 的周长最短.

参考文献 [37,pp.138～141].

（张文华）

（七）几何不等式

Catalan 不等式（Catalan inequality） 设 a、b、c 是一个三角形的边，则

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0. \qquad ①$$

这是 Catalan 在 1906 年给出的结论，后被作为第 24 届国际数学奥林匹克（1983 年，巴黎）的第 6 题. 德国中学生伯尔哈德·李给出如下的证法.

不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$，则

$$\sum a^2b(a-b)=a(b-c)^2(b+c-a)+ b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geqslant 0. \qquad ②$$

该不等式的指数推广于 1986 年获得. 设 $\lambda\geqslant 2$，则

$$\sum a^\lambda b(a-b)\geqslant 0. \qquad ③$$

对双心多边形边长 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的猜想

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2a_{i+1}(a_i-a_{i+1})\geqslant 0 \quad (a_{n+1}=a_1) \qquad ④$$

至今尚未解决.

参考文献 [97,p.57],[145,p.138],[58,p.3].

（陈 计）

Janous-Nakassis 不等式（Inequality of Janous-Nakassis） 设 a,b,c 是一个三角形的边，$s=(a+b+c)/2$，则

$$2s(\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c})$$
$$\leqslant 3[\sqrt{bc(s-a)}+\sqrt{ca(s-b)}+\sqrt{ab(s-c)}]. \quad ①$$

这是 Janous 在 1986 年提出的猜想，两年之后由 Nakassis 首次用拉格朗日乘数法证明，篇幅相当于2 300个汉字. 下面的两个初等证法分别由陈计与狄继东给出.

令 $s-a=x^2, s-b=y^2, s-c=z^2(x、y、z>0)$，则①等价于

$$\left(\sum x^2\right)\left(\sum x\right) \leqslant \frac{3}{2}\sum x\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}. \quad ②$$

②两边平方，得

$$\left(\sum x^2\right)^2\left(\sum x\right)^2$$
$$\leqslant \frac{9}{4}\Big[\sum x^2(x^2+y^2)(x^2+z^2)+$$
$$2\sum yz(y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}\Big], \quad ③$$

由于 $(x^2+y^2)(x^2+z^2)\geqslant(x^2+yz)^2$，所以，要证③只需证

$$\left(\sum x^2\right)^2\left(\sum x\right)^2$$
$$\leqslant \frac{9}{4}\Big[\sum x^2(x^2+y^2)(x^2+z^2)+2\sum yz(y^2+z^2)(x^2+yz)\Big]. \quad ④$$

现在

$$9\sum x^2(x^2+y^2)(x^2+z^2)+18\sum yz(y^2+z^2)(x^2+yz)-4\left(\sum x^2\right)^2\left(\sum x\right)^2$$
$$=5\sum x^6-8\sum(x^5y+x^5z)+15\sum(x^4y^2+x^4z^2)$$
$$-8\sum x^4yz-16\sum y^3z^3+2\sum(x^3y^2z+x^3z^2y)+3x^2y^2z^2$$

$$= \sum (y-z)^4(x^2+15y^2+15z^2+4yz+8zx+8xy)/6$$
$$\geqslant 0. \tag{⑤}$$

这个配方证法是陈计在 1992 年给出的.

$$\begin{aligned}&(\sum x^2)(\sum x)\\ =&\frac{3}{4}\sum x(2x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{4}\sum x[(y^2-x^2)+(z^2-x^2)]\\ =&\frac{3}{2}\sum x\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}+\frac{3}{4}\sum x(\sqrt{x^2+y^2}-\\ &\sqrt{x^2+z^2})^2-\frac{1}{4}\sum(y+z)(y-z)^2.\end{aligned} \tag{⑥}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{3}{4}\sum x(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+z^2})^2\\ =&\frac{3}{4}\sum\frac{x(y^2-z^2)^2}{(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2})^2}\\ \leqslant&\frac{3}{16}\sum\frac{x(y^2-z^2)^2}{x(y+z)}\\ =&\frac{3}{16}\sum(y+z)(y-z)^2.\end{aligned} \tag{⑦}$$

于是不等式②成立,从而①得证.这个简单证明是狄继东在 1993 年给出的.

该不等式相当难证,Janous 在 1991 年曾将它变形成:设 s、r 是$\triangle ABC$ 的半周长与内切圆半径,则

$$\sum\sqrt{\cot\frac{A}{2}}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{\frac{r}{s}}\sum\csc\frac{A}{2}, \tag{⑧}$$

再度作为猜想公开征解,该不等式的一个有趣的应用是证明不等式

$$\sum\sin B\sin C\leqslant 3\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{⑨}$$

参考文献 [147,p.767],[156,pp.188~189],[73,p.20],[70,pp.29~30].

(陈 计)

Schur 型 Wolstenholme 不等式(Wolstenholme's inequality of Schur's type) 设 a、b、c 是一个三角形的边长,x、y、z 是任意实数,则

$$a^2(x-y)(x-z)+b^2(y-z)(y-x)+c^2(z-x)(z-y)\geqslant 0. \quad ①$$

这是 Wolstenholme 在 1867 年发表的一个结果.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则

$$\begin{aligned}&\sum a^2(x-y)(x-z)\\&=[a(x-y)-b(y-z)]^2+\\&\quad[(a+c)^2-b^2](x-y)(y-z)\geqslant 0.\end{aligned} \quad ②$$

这个配方证法是 Oppenheim 与 Davies 在 1964 年给出的.

该不等式的一个等价形式也由 Wolstenholme 给出:设实数 p、q、r 满足 $p+q+r=0$,则

$$\sum a^2qr\leqslant 0. \quad ③$$

参考文献 [46,p.24],[122,pp.25~27].

(陈 计)

Bager 图(Bager's graph) 在△ABC 中,记

$$a=8\pi\sin\frac{A}{2},\qquad b=\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi\cos\frac{A}{2}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\sum\sin A,$$

$$c=3\sqrt{3}\pi\operatorname{tg}\frac{A}{2},\qquad d=\frac{1}{3\sqrt{3}}\pi\cot\frac{A}{2},$$

$$e=\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi\sec\frac{A}{2},\qquad f=\frac{1}{8}\pi\csc\frac{A}{2}=\frac{1}{4}\sum\csc B\csc C,$$

$$g=\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi\sin A,\qquad h=8\pi\cos A,$$

$$i=3\sqrt{3}\,\pi\cot A,\qquad j=\frac{8}{3\sqrt{3}}\pi\csc A,$$

$$k=\frac{4}{3}\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad l=\frac{4}{9}\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$m=\frac{1}{9}\sum\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},\quad n=\frac{1}{4}\sum\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2},$$

$$o=\frac{1}{12}\sum\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2},\quad p=\frac{4}{9}\sum\sin B\sin C,$$

$$q=\frac{4}{3}\sum\cos B\cos C,\quad r=\frac{2}{3}\sum\sin\frac{A}{2},$$

$$s=\frac{2}{3\sqrt{3}}\sum\cos\frac{A}{2},\quad t=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2},$$

$$u=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sum\sec\frac{A}{2},\quad v=\frac{1}{6}\sum\csc\frac{A}{2},$$

$$w=\frac{2}{3}\sum\cos A,\qquad x=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum\cot A,$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sum\csc A.$$

用箭头及标号表示不等式

$$\frac{4}{9}\sum\sin B\sin C\leqslant\frac{4}{3}\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\qquad ①$$

则前面的 25 个函数与常函数 1 之间有图 4 - 201 表示的不等式族：

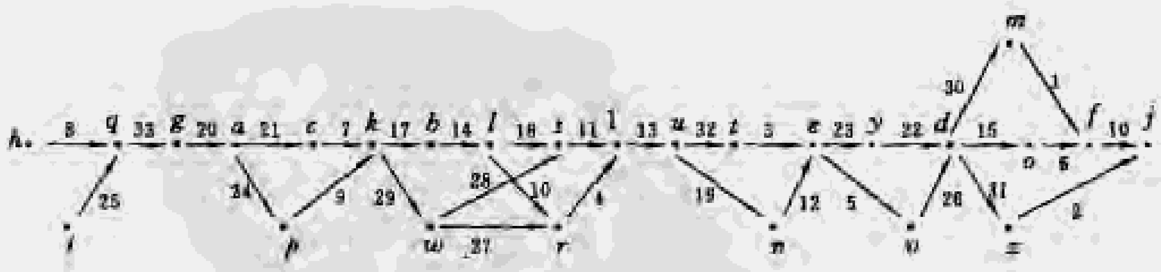


图 4 - 201

这张以$\triangle ABC$的26个规范对称函数为顶点，以它们的不等关系为线段构成的有向图，是由Bager在1971年首次绘制，经后人修改而得，被称为Bager第一图.在这33个不等式中，⑤⑦㉕是Bager的猜想，由Bottema证明，⑨则是苏化明在1987年才发现的.

Bager在1973年又对$\triangle ABC$的50个规范对称函数绘制了包含83个不等式的有向图，被称为Bager第二图，后由陈计作了彻底的改进.

参考文献　[130，pp. 5～25]，[131，pp. 27～36]，[53，pp. 13～14]，[70，pp. 29～30]，[135，pp. 207～216]，[78，pp. 10～15].

（陈　计）

三角形的半角正弦（或余弦）和的不等式（inequalities for the sum of the sines (or cosines) of the half angles of a triangle） 设α、β、γ是一个三角形的角，则

(1) $1<\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{2}$，

(2) $2<\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

上面两个不等式见R. Kooistra，Nieuw Tijdschr，Wisk. 45(1957/58)，108～115.其中(1)的第二个不等式也可见J. M. Child，Math. Gaz. 23(1939)，138～143.但是，关于一个三角形的角或半角的三角函数的和与积的一些著名不等式，早已为人们所发现并被再三获证.例如，

$$0<\prod\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{1}{8},1<\sum\cos\alpha\leqslant\frac{3}{2}\text{和}\prod\cos\alpha\leqslant\frac{1}{8}\text{等},$$

它们可见于R. Marcolongo，Boll. Matematica 14(1915～1916)，182～184，该文注明这些不等式已出现在P. Franchini，Trattato algebrico de massimi e minimi (Lucca，1823)中.而完整的有系统

的确定 24 个函数 $\sum f(\alpha)$、$\sum f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$、$\prod f(\alpha)$ 和 $\prod f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 的极大值和极小值(或上界与下界),可见于 F. Pignataro, Giorn. Matematiche, 68(1929), 18～23,这里 f 表示六个三角函数之一.

(1) 因为 $\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi$,所以

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$=1+4\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\sin\frac{\gamma+\alpha}{4}\sin\frac{\alpha+\beta}{4},$$

但 $\frac{\beta+\gamma}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)>0$,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$=1+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}\right)>1.$$

设 I 是$\triangle ABC$ 的内心,I 在各边上的射影为 D_1、D_2、D_3,$ID_1=ID_2=ID_3=r$,I 到 D_2D_3、D_3D_1、D_1D_2 的距离各为 d_1、d_2、d_3,则 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{d_1}{r}$,所以

$$\sum\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{r}(d_1+d_2+d_3).$$

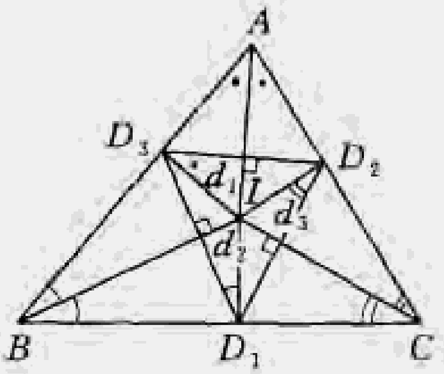


图 4－202

在 $\triangle D_1D_2D_3$ 中,据 Erdös-Mordell 不等式,得

$$3r\geqslant 2(d_1+d_2+d_3),$$

所以
$$\sum\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{d_1+d_2+d_3}{r}\leqslant\frac{3}{2},$$

当且仅当$\triangle D_1D_2D_3$ 为正三角形且 I 为它的中心时等号成立,也即$\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

如利用 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内为凸函数，即得

$$\sum\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 3\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

(2) 因为 $\cos\frac{\alpha}{2}>0$ 及 $1-\cos\frac{\alpha}{2}>0$，所以 $\sum\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)>0$，即 $\sum\cos\frac{\alpha}{2}>\sum\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 但

$$\begin{aligned}\sum\cos^2\frac{\alpha}{2}&=\frac{1}{2}\left[(1+\cos\alpha)+(1+\cos\beta)+(1+\cos\gamma)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[3+\left(1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right]>2,\end{aligned}$$

因此 $\sum\cos\frac{\alpha}{2}>2$.

因为 $2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\leqslant\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}$， ①

所以

$$\begin{aligned}\left(\sum\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2&\leqslant 3\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}(3+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\\&\leqslant\frac{3}{2}\left(3+\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4},\end{aligned}\qquad ②$$

因此 $\sum\cos\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

由①、②知，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

也可利用 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内为凸函数得出所求不等式.

据(1)、(2)及算术-几何平均不等式得

(3) $0<\prod\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{1}{8}$，

(4) $0<\prod\cos\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$,

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

利用(3)、(4)及有关三角恒等式得

(5) $1<\sum\cos\alpha\leqslant\frac{3}{2}$,

(6) $0<\sum\sin\alpha\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

又由(5)、(6)和算术-几何平均不等式得

(7) $-1<\prod\cos\alpha\leqslant\frac{1}{8}$,

(8) $0<\prod\sin\alpha\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$,

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

参考文献　[40, pp. 331～332], [30, p. 14, p. 22], [49, pp. 677～678].

（郑君文）

Wolstenholme-Klamkin 加权三角不等式（Asymmetric trigonometric inequality of Wolstenholme-Klamkin） 设 $A+B+C=\pi$，则对 $n\in\mathbf{N}$，x、y、$z\in\mathbf{R}$，有

$$x^2+y^2+z^2+2(-1)^n(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC)\geqslant 0. \quad ①$$

这是 Klamkin 在 1971 年给出的结论，并称为“非对称三角不等式”，意即关于 A、B、C 三角函数的加权不等式. 其特例（A、B、C 是一个三角形的角，$n=1$）出现于 Wolstenholme 1867 年的书中.

$$\sum x^2+2(-1)^n\sum yz\cos nA$$

$$\begin{aligned}&=x^2+2x(-1)^n(y\cos nC+z\cos nB)\\&\quad+y^2+z^2+2yz\cos(nB+nC)\\&=[x+(-1)^n(y\cos nC+z\cos nB)]^2\\&\quad+(y\sin nC-z\sin nB)^2\geqslant 0.\end{aligned}\tag{②}$$

上面这种选择 x 为"主元"的配方法称为拉格朗日配方法.

这个加权的三角不等式在几何不等式中有着为数众多的应用. 例如,令 $n=2$,由 $\cos 2A=1-2\sin^2 A$ 等,得

$$(\sum x)^2\geqslant 4\sum yz\sin^2 A,\tag{③}$$

当 A、B、C 是一个三角形的角时,由正弦定理 $a=2R\sin A$ 等,得 Kooi 在 1958 年证明的不等式

$$(\sum x)^2R^2\geqslant\sum yza^2,\tag{④}$$

再令 $x=\lambda a^2$ 等,由 $abc=4R\Delta$,得 Oppenheim 在 1965 年给出的不等式

$$(\sum\lambda a^2)^2\geqslant 16\Delta^2\sum\mu\nu.\tag{⑤}$$

参考文献　[129,pp. 33～34],[46,p. 69],[114,pp. 97～101],[124,p. 792].

（陈　计）

波利亚-科沙克不等式(Pólya-Kürschák inequality)　设 α、β、γ 是三角形的角,所对的边分别为 a、b、c,则

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

该不等式是波利亚根据科沙克想法得证的(见 G. 波利亚 G. 舍贵著《数学分析中的问题和定理》p. 473),G. Kalajdžic(见 D. Markovic,Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, NO. 3～4(1952),71)还证明了如下类似的不等式:"若 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,则

(1) $\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} \leqslant \frac{\pi-\alpha}{2}$;

(2) $\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$."

设 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则 $s-a>0, s-b>0, s-c>0$，所以有

$$\alpha(s-a)+\beta(s-b)+\gamma(s-c)>0,$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)s-(a\alpha+b\beta+c\gamma)>0,$$

$\therefore \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{s}<\pi$，即 $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$.

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，则 $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$，所以有

$$(a-b)(\alpha-\beta) \geqslant 0,(b-c)(\beta-\gamma) \geqslant 0,$$
$$(c-a)(\gamma-\alpha) \geqslant 0. \quad ①$$

相加得

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha) \geqslant 0,$$
$$a(\alpha-\beta-\gamma+\alpha)+b(\beta-\gamma-\alpha+\beta)+c(\gamma-\alpha-\beta+\gamma) \geqslant 0,$$

从而有 $a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi) \geqslant 0$,

所以 $3(a\alpha+b\beta+c\gamma)-\pi(a+b+c) \geqslant 0$,

即 $$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} \geqslant \frac{\pi}{3}. \quad ②$$

因为①中当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立，所以②中也仅在这时等号成立.

若 $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$，则有

$$(a+b-c)(\gamma-\alpha)+(a-b+c)(\beta-\alpha) \geqslant 0. \quad ③$$

又 $(a+b-c)\alpha+(a-b+c)\alpha=2a\alpha$,

所以 $(a+b-c)\gamma+(a-b+c)\beta \geqslant 2a\alpha$,

即 $2a\alpha+b\beta+c\gamma \leqslant (a+b)\gamma+(a+c)\beta$.

上面不等式的两边同加上 $b\beta+c\gamma$，得

$$2(a\alpha+b\beta+c\gamma)\leqslant(a+b+c)(\beta+\gamma),$$

因此 $$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leqslant\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}.\tag{④}$$

从③可知，当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时④中的等号成立.

若 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，则 $a\leqslant b\leqslant c$，所以有

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leqslant\frac{c(\alpha+\beta+\gamma)}{a+b+c}=\frac{c\pi}{2s}.\tag{⑤}$$

因为 $1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

$$=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$=1-\frac{s-c}{s}=\frac{c}{s},$$

故有 $$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leqslant\frac{\pi}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).\tag{⑥}$$

由⑤可知，当且仅当 $a=b=c$ 时⑥中的等号成立.

波利亚把本不等式推广到四面体，即

设 $k_1,k_2,\cdots,k_6$ 为四面体六条棱的长，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_6$ 为它的相交于相应棱处的两个面所成二面角的弧度数，则有

$$\frac{\pi}{3}<\frac{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_6\alpha_6}{k_1+k_2+\cdots+k_6}<\frac{\pi}{2}.$$

参考文献 [38,p. 377],[30,pp. 37～39],[44,p. 473].

（郑君文）

Weitzenböck 不等式（Weitzenböck inequality） 设△ABC 的各边长为 a、b、c，它的面积为 Δ，则 $a^2+b^2+c^2\geqslant4\sqrt{3}\Delta$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

该不等式是 Weitzenböck 于 1919 年获得的，见 Math. Z. 5(1919)，137～146. 其后有多人对它作过证明与研究，如 P. Finsler and H. Hadwiger (Commet. Math. Helv. 10(1937/38)，

316～326),L. A. Santaló(Math. Notae 3(1943),65～73)等. 该不等式在 1961 年曾被选为第三届 IMO 试题.

由余弦定理得

$$a^2+b^2+c^2=2(b^2+c^2)-2bc\cos A,$$

又 $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$, 故

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta\\=&2(b^2+c^2)-2bc\cos A-2bc\sqrt{3}\sin A\\=&2(b^2+c^2)-4bc\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\\\geqslant&2(b^2+c^2)-4bc=2(b-c)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

当且仅当 $b=c$ 且 $A=\frac{\pi}{3}$, 即三角形为正三角形时等号成立.

该不等式也可利用三斜求积公式

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$$

来证,即

$$\begin{aligned}3\cdot 16\Delta^2&=3\cdot[4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2]\\&=3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)\\&=(a^2+b^2+c^2)^2-2[(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+\\&\quad(a^2-b^2)^2]\\&\leqslant(a^2+b^2+c^2)^2,\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

当然也可利用海伦公式来证. 因为 $s-a>0, s-b>0, s-c>0$,所以

$$\begin{aligned}&(s-a)+(s-b)+(s-c)\\\geqslant&3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)},\end{aligned}\quad ①$$

即 $s\geqslant 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$,

从而得 $s^4\geqslant 27s(s-a)(s-b)(s-c)=27\Delta^2$,

所以 $s^2\geqslant 3\sqrt{3}\Delta$，即 $(a+b+c)^2\geqslant 12\sqrt{3}\Delta$.

但 $(a+b+c)^2$

$$=3(a^2+b^2+c^2)-[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]$$
$$\leqslant 3(a^2+b^2+c^2), \qquad ②$$

因此 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant 12\sqrt{3}\Delta$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$. 由①与②知，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

该不等式有如下推广：

(1) 设 λ、μ、ν 为任意实数，a、b、c 为任一三角形的边长，Δ 为这三角形的面积，则

$$(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2)^2\geqslant 16(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\Delta^2.$$

等号当且仅当

$$\lambda:\mu:\nu=(b^2+c^2-a^2):(c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$$

时成立(见单墫《几何不等式》(1980)，pp. 49～51).

当 $\lambda=\mu=\nu$ 时，即为 Weitzenböck 不等式.

(2) 设 a_1、a_2、a_3 是任意正数，则

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}a^2+\frac{a_2}{a_3+a_1}b_2+\frac{a_3}{a_1+a_2}c^2\geqslant 2\sqrt{3}\Delta.$$

(见 Amer. Math. Monthly, Vol. 93. No. 5 (1986) E3150) 当 $a_1=a_2=a_3$ 时，即为 Weitzenböck 不等式.

(3) 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为凸 n 边形的边长，Δ 为它的面积，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 4\Delta\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

(见 E. Just-N. Schaumberger, Problem E1634, Amer. Math. Monthly 70(1963), 1005 and 71 (1964), 796.)

显然，当 $n=3$ 时，即为 Weitzenböck 不等式.

(4) 设凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，它的

面积为 Δ，则对 $m<0, m>1$，都有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant n\left(\frac{4}{n}\Delta \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{m}{2}},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

这是 1988 年王方汉作出的一个推广，见《数学通讯》1(1988).

参考文献　[38, p. 377], [30, pp. 46～47, p. 168], [16, pp. 49～51].

（郑君文）

波利亚-舍贵几何不等式（Pólya-Szegö geometry inequality）

设 a、b、c 是一个三角形的边，Δ 是它的面积，则 $\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

该不等式见 G. 波利亚、G. 舍贵著《数学分析中的问题和定理》第二卷第 201 页，也可见 L. Carlitz-F. Leuenberger, Problem E1454, Amer. Math. Monthly 68(1961), 177 and 68 (1961), 805～806，或 H. W. Guggenheimer, Problem E1724, Amer. Math. Monthly 71(1964), 911 and 72(1965), 791～793. 下面的第一种证法属于 J. S. Frame，第二种证法属于 F. Leuenberger.

(1) 设 $x=s-a, y=s-b, z=s-c$，A、G 与 H 分别表示算术平均、几何平均与调和平均，于是

$$A=\frac{x+y+z}{3}=\frac{s}{3}, G=\sqrt[3]{xyz}, H=\frac{3xyz}{yz+zx+xy},$$

且 $A\geqslant G\geqslant H$，从而有

$$\Delta^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=(x+y+z)xyz=3AG^3,$$

故
$$\begin{aligned} abc &= (y+z)(z+x)(x+y) \\ &= (x+y+z)(yz+zx+xy)-xyz \\ &= 3A\cdot\frac{3G^3}{H}-G^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{8AG^3}{H} + \frac{(A-H)G^3}{H}$$

$$\geqslant \frac{8AG^3}{H} \geqslant \frac{8AG^3}{(AG^3)^{\frac{1}{4}}} = 8(AG^3)^{\frac{3}{4}}$$

$$= 8 \cdot \left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

即 $\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$，当且仅当 $A=G=H$ 或 $x=y=z$，也即三角形为正三角形时等号成立.

(2) 因为 $a+b+c \leqslant 3R\sqrt{3}$，又 $4R\Delta = abc$，所以

$$\frac{4\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{abc}{R\sqrt{3}} \leqslant \frac{3abc}{a+b+c} \leqslant \frac{abc}{\sqrt[3]{abc}} = (abc)^{\frac{2}{3}},$$

即 $\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

推论 1 若 $p>0$，则 $\Delta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a^p+b^p+c^p}{3}\right)^{\frac{2}{p}}$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

这个不等式见 G. 波利亚、G. 舍贵著《数学分析中的问题和定理》第 2 卷第 201 页.

推论 2 若 x、y、z 为实数，则

$$a^x b^y c^z + b^x c^y a^z + c^x a^y b^z \geqslant 3 \cdot \frac{2^{x+y+z}\Delta^{(x+y+z)/2}}{3^{(x+y+z)/4}}.$$

这个不等式及其证明属于 P. M. Vasić.

推论 3 若 x、y、z 为实数，则

$$b^x c^y (b+c)^z + c^x a^y (c+a)^z + a^x b^y (a+b)^z$$

$$\geqslant 3 \cdot 2^z \frac{2^{x+y+z}\Delta^{(x+y+z)/2}}{3^{(x+y+z)/4}}.$$

这个不等式及其证明属于 R. Ž. Djordjević.

1987 年，陈计在《数学通讯》6(1987)上把波利亚-舍贯不等式推广到四边形的情形：

设四边形 $ABCD$ 的四边边长及面积分别为 a、b、c、d 和 Δ，则

$$\Delta \leqslant (abcd)^{\frac{1}{2}},$$

当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形时取等号.

1981 年，杨路在《数学通报》6(1981)上给出了波利亚-舍贯不等式在三维空间中的一种推广：

设四面体 $ABCD$ 的六条棱的长为 a_1、a_2、…、a_6，它的外接球的半径为 R，体积为 V，则

$$V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{24R}\left(\prod_{i=1}^{6} a_i\right)^{\frac{2}{3}},$$

当且仅当四边形 $ABCD$ 是正四面体时取等号.

1984 年，赵何成在《数学通报》12(1984)上又给出了波利亚-舍贯不等式在三维空间的另一种推广：

设四面体 $ABCD$ 的六条棱的长为 a_1、a_2、…、a_6，它的外接球的半径为 R，体积为 V，则有

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3, \qquad V \leqslant \frac{1}{72}\left(\prod_{i=1}^{6} a_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

参考文献　[40，p. 335]，[30，pp. 50～51]，[44，p. 201].

（郑君文）

Finsler-Hadwiger 不等式（Finsler-Hadwiger inequality）　设 $\triangle ABC$ 的边长各为 a、b、c，它的面积为 Δ，则

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

该不等式是由 Finsler 和 Hadwiger 提出和证明的，见 P. Finsler and H. Hadwiger, Comment. Math. Helv. 10(1937/38),

316～326，也可见 H. Hadwiger，Jber. Deutsch. Math.—Verein. 49(1939)，35～39，它加强了 Weitzenböck 不等式.

该不等式等价于

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{4\Delta}+\frac{b^2-(c-a)^2}{4\Delta}+\frac{c^2-(a-b)^2}{4\Delta}\geqslant\sqrt{3},$$

而由 $4\Delta=\frac{abc}{R}=2bc\sin A$,

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1+\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc},$$

可知它又等价于 $\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}\geqslant\sqrt{3}$，或

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

因为 $\left(\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2=\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+2\sum\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$，而

$\sum\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$，$\sum\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=1+\frac{1}{2}\sum\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^2\geqslant1$，

所以 $\left(\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2\geqslant3$. 因此

$$a^2+b^2+c^2\geqslant4\Delta\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

我们也可利用海伦公式和两数差的平方大于或等于 0 来证明该不等式. 设 $s-a=x,s-b=y,s-c=z$，则

$$4\sqrt{3}\Delta=4\sqrt{3s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=4\sqrt{3(x+y+z)xyz},$$
$$[a^2-(b-c)^2]+[b^2-(c-a)^2]+[c^2-(a-b)^2]$$
$$=4(s-b)(s-c)+4(s-c)(s-a)+4(s-a)(s-b)$$
$$=4yz+4zx+4xy,$$

所以原不等式等价于

$$xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3(x+y+z)xyz},$$

或 $$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy.$$

因为 $$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2yz-y^2xz-z^2xy)$$
$$=(xy-zx)^2+(yz-xy)^2+(zx-yz)^2\geqslant 0,$$

所以

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

1987 年,杨克昌在《湖南数学通讯》4(1987)上把该不等式作了加权推广:

对于任意满足

$$\lambda\triangleq 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)>0$$

的正数 λ_1、λ_2、λ_3,有

$$\lambda_1a^2+\lambda_2b^2+\lambda_3c^2$$
$$\geqslant 4\sqrt{\lambda}\Delta+\lambda_1(b-c)^2+\lambda_2(c-a)^2+\lambda_3(a-b)^2.$$

1988 年,李尧亮和李尧明在《湖南数学通讯》2(1988)上对该不等式作了幂指数推广:

对于自然数 $m\geqslant 2$,有

$$a^m+b^m+c^m$$
$$\geqslant 2^m3^{\frac{1}{4}(1-m)}\Delta^{\frac{m}{2}}+|b-c|^m+|c-a|^m+|a-b|^m,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

1984 年,陈远利在《中学数学教学》6(1984)上把该不等式推广到四边形,进而在同一杂志 5(1985)上又推广到 n 边形:

设 a_1、a_2、…、a_n 各为 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长,Δ 为其面积,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 4\Delta\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}+\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(a_j-a_i)^2,$$

当且仅当 n 边形为正 n 边形时等号成立.

1987 年,马援在《数学通讯》7(1987)上又推广该不等式,得到:

设 a、b、c 和 Δ 分别是 $\triangle ABC$ 的三边边长和面积,且 $0<\theta<1$,则

$$a^{4\theta}+b^{4\theta}+c^{4\theta}\geqslant 3\left(\frac{16}{3}\right)^{\theta}\Delta^{2\theta}+(a^{2\theta}-b^{2\theta})^2+(b^{2\theta}-c^{2\theta})^2+(c^{2\theta}-a^{2\theta})^2,$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

陈计补充和完善了马援推广的不等式,指出当 $\theta\leqslant 0$ 或 $\theta\geqslant 1$ 时,上述不等式的不等号反向(见《数学通讯》12(1987)).

参考文献 [30,p.48],[16,pp.97~99].

(郑君文)

Oppenheim 单调性定理(Oppenheim's monotonicity theorem) 设 a、b、c 是一个三角形的边,当 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 时,a^θ、b^θ、c^θ 可构成三角形,记其面积为 $\Delta(a^\theta,b^\theta,c^\theta)$,则函数

$$f(p)=\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta)\right]^{1/\theta},\theta\neq 0, \quad ①$$

$$f(0)=\lim_{\theta\to 0}f(\theta)=(abc)^{2/3} \quad ②$$

在[0,1]上是单调减的.

这是 Oppenheim 在 1974 年得出的结论,它是 Finsler-Hadwiger 不等式 $f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant f(1)$ 及波利亚-舍贯不等式 $f(0)\geqslant f(1)$ 的推广.

定义函数

$$F(\theta)=\theta^2\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$$

$$=\theta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{\theta}\ln\sqrt{\frac{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)(b^\theta+c^\theta-a^\theta)(c^\theta+a^\theta-b^\theta)(a^\theta+b^\theta-c^\theta)}{3}}\right]$$

$$=\frac{\theta}{2}\left(\frac{a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{a^\theta+b^\theta+c^\theta}+\frac{b^\theta\ln b+c^\theta\ln c-a^\theta\ln a}{b^\theta+c^\theta-a^\theta}\right.$$
$$\left.+\frac{c^\theta\ln c+a^\theta\ln a-b^\theta\ln b}{c^\theta+a^\theta-b^\theta}+\frac{a^\theta\ln a+b^\theta\ln b-c^\theta\ln c}{a^\theta+b^\theta-c^\theta}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\ln\frac{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)(b^\theta+c^\theta-a^\theta)(c^\theta+a^\theta-b^\theta)(a^\theta+b^\theta-c^\theta)}{3}\right],$$

因为 $f(\theta)>0$,所以 $f'(\theta)$ 与 $F(\theta)$ 同号.我们来证明 $F(\theta)\leqslant 0$.
由于

$$F'(\theta)=\frac{\theta}{2}\left[\frac{b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}+c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}+a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}}{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}\right.$$
$$+\frac{b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}-c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}-a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}}{(b^\theta+c^\theta-a^\theta)^2}$$
$$+\frac{c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}-a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}-b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}}{(c^\theta+a^\theta-b^\theta)^2}$$
$$\left.+\frac{a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}-b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}-c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}}{(a^\theta+b^\theta-c^\theta)^2}\right].$$

不妨设 $a^\theta\leqslant b^\theta\leqslant c^\theta$,则 $(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^{-2}\leqslant(b^\theta+c^\theta-a^\theta)^{-2}\leqslant(c^\theta+a^\theta-b^\theta)^{-2}\leqslant(a^\theta+b^\theta-c^\theta)^{-2}$.因此

$$\frac{2}{\theta}F'(\theta)\leqslant\frac{b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}+c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}+a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}}{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}+$$
$$\frac{b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}-c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}-a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}}{(b^\theta+c^\theta-a^\theta)^2}+\frac{-2b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}}{(c^\theta+a^\theta-b^\theta)^2}$$
$$\leqslant\frac{b^\theta c^\theta\ln^2\frac{b}{c}+c^\theta a^\theta\ln^2\frac{c}{a}+a^\theta b^\theta\ln^2\frac{a}{b}}{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}$$

$$+\frac{-b^{\theta}c^{\theta}\ln^2\frac{b}{c}-c^{\theta}a^{\theta}\ln^2\frac{c}{a}-a^{\theta}b^{\theta}\ln^2\frac{a}{b}}{(b^{\theta}+a^{\theta}-c^{\theta})^2}\leqslant 0. \qquad ③$$

因此 $F(\theta)\leqslant\lim\limits_{\theta\to 0}F(\theta)=0$，所以 $f'(\theta)\leqslant 0$. 这一证法是由王振与陈计给出的.

函数 $f(\theta)$在$[0,1]$上的单调减，等价于当 $\theta\in[0,1]$ 时的不等式 $f(\theta)\geqslant f(1)$，即

$$3^{1-\theta}(16\Delta^2)^{\theta}\leqslant 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta}, \qquad ④$$

陈计指出：当 $\theta<0$ 或 $\theta>1$ 时，④中不等号反向.

参考文献 [136,pp.257～263],[152,pp.1～3].

（陈 计）

欧拉不等式(Euler inequality) 设 R 和 r 分别是$\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径，则 $R\geqslant 2r$，当且仅当这三角形为正三角形时等号成立.

该不等式见 L. Euler, Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae 11(1765),1767,103～123,或 L. Euleri, Opera Omnia, 126, 1953, 139～157, 或 Ramus—E. Rouché, Nouv. Ann. Math. 10(1851),353. 它是 18、19 世纪发现的大量不等式中最早的一个. O. Bottema 说这个不等式"仍然在这个领域里保持着高水平的地位"，并"具有数学鉴赏的两个特点：简单而不平凡".

这不等式的推导方法有多种，下面的(1)是直接由 Chapple 定理得到的. 因为欧拉于 1765 年再发现与其等价的公式(见 Chapple 定理)，所以常称欧拉不等式或 Chapple-Euler 不等式. (2)的证明是由波利亚-舍贵给出的.

(1) 因为 $OI^2=R^2-2Rr$，所以 $R-2r\geqslant 0$，或 $R\geqslant 2r$，当

且仅当三角形为正三角形时等号成立.

(2) 据波利亚-舍贵不等式得 $\frac{16\Delta^2}{3(abc)^{4/3}} \leqslant 1$，又 $r=\frac{\Delta}{s}$，$R=\frac{abc}{4\Delta}$，所以 $\frac{2r}{R}=\frac{8\Delta^2}{s(abc)}=\frac{16\Delta^2}{(a+b+c)abc} \leqslant \frac{16\Delta^2}{3(abc)^{4/3}} \leqslant 1$，即 $R \geqslant 2r$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

(3) $\frac{2r}{R}=\frac{8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant 1$，即 $R \geqslant 2r$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

推论 1 $\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab} \leqslant \frac{1}{4r^2}$.

这不等式见 F. Leuenberger，Elem. Math. 13(1958)，121～126.

推论 2 $4r^2 \leqslant \frac{abc}{a+b+c}$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

这不等式见 M. S. Klamkin，Math. Teacher 60(1967)，323～328.

欧拉不等式的推广：

(1) 若一四边形有一半径为 R 的外接圆与一半径为 r 的内切圆，则 $R \geqslant r\sqrt{2}$，当且仅当四边形为正方形时等号成立.

这不等式见 Jn. I. Gerasimov and O. A. Kotiž，Matematika v škole 1964，No. 1，83 或 L. Carlitz，Math. Mag. 38(1965)，33～35.

(2) 若 R 和 r 分别表示四面体的外接球半径和内切球半径，则 $R \geqslant 3r$，当且仅当四面体为正四面体时等号成立.

参考文献 [30，p. 53，pp. 61～62，p. 160]，[44，p. 475]，[45，p. 209，pp. 269～270].

(郑君文)

Gerretsen 不等式(Gerretsen inequalities) 设 R 和 r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径,它的三边长为 a、b、c,$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则

$$16Rr-5r^2\leqslant s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

1953 年,Gerretsen 利用三角形的垂心和内心、垂心和外心以及内心和外心之间距离的平方表达式,证明了不等式

$$24Rr-12r^2\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 8R^2+4r^2$$

及其等价形式

$$8r(R-2r)\leqslant(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\leqslant 8R(R-2r),$$

等号都是当且仅当三角形为正三角形时成立(见 J.C.H. Gerretsen, Nieuw Tijdschr. Wisk. 41(1953),1 ~ 7). 1963 年,Steinig 给出了与上面不等式等价的不同形式,即

$$16Rr-5r^2\leqslant s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$$

及 $$4r(5R-r)\leqslant bc+ca+ab\leqslant 4(R+r)^2,$$

等号都是当且仅当三角形为正三角形时成立(见 J. Steinig, Elem. Math. 18(1963),127~131). 而通常 Gerretsen 不等式往往是指

$$16Rr-5r^2\leqslant s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$$

而言的.

据 Lemoine 公式,即三角形内心 I 与垂心 H 之间的距离公式,得

$$a^2+b^2+c^2=4r^2+8R^2-2IH^2\leqslant 4r^2+8R^2,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

因为 O、G、H 三点共线,$GH=2OG$,而

$$\frac{IG^2+OG^2-IO^2}{2IG\cdot OG}$$

$$= -\frac{IG^2 + GH^2 - IH^2}{2IG \cdot GH},$$

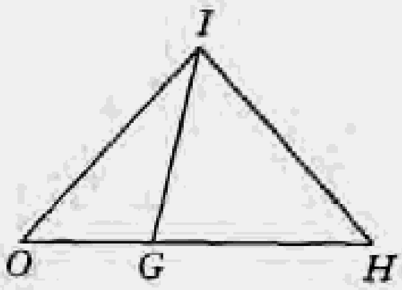


图 4-203

所以 $2IO^2 + IH^2 = 2OG^2 + GH^2 + 3IG^2$. 据 Chapple 定理和 Lemoine 公式(即三角形外心 O 与垂心 H 及内心 I 与垂心 H 之间的距离公式),得

$$2(R^2 - 2Rr) + 2r^2 + 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 2R^2 - \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 3IG^2,$$

故 $2r^2 - 4Rr + \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) = 3IG^2 \geqslant 0$,

即 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 24Rr - 12r^2$,

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

因为 $4Rr = \frac{abc}{s}$, $r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$, 所以

$$r^2 + 4Rr = \frac{(s-a)(s-b)(s-c) + abc}{s}$$

$$= bc + ca + ab - s^2$$

$$= s^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

于是 $a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2(r^2 + 4Rr)$.

因此 $16Rr - 5r^2 \leqslant s^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$,

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

推论 1 $6r(4R + r) \leqslant 2s^2 \leqslant 2(2R + r)^2 + R^2$, 当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

该不等式见 F. Leuenberger—L. Carlitz, Problem E1481, Amer. Math. Monthly 68(1961), 803 and 69 (1962), 312.

推论 2 $9r(4R + r) \leqslant 3s^2 \leqslant (4R + r)^2$, 当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

该不等式见 G. Colombier—T. Doucet, Problem E1051, Nouv. Ann. Math. 31(1872),467.

参考文献 [40,p. 336],[30,pp. 54~57,pp. 59~60,p. 62].

（郑君文）

Ramus-Rouche 基本不等式（Ramus-Rouche's fundamental inequality） 设 Δ、R、r 是一个三角形的面积、外接圆半径、内切圆半径，则形如

$$f(R,r)\leqslant\Delta\leqslant F(R,r) \qquad ①$$

（等号成立当且仅当正三角形）的最佳可能的不等式为

$$f(R,r)=r[2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}]^{\frac{1}{2}},$$
$$F(R,r)=r[2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}]^{\frac{1}{2}}.$$

1851 年，作为 Ramus 问题的解答，Rouche 给出了上述定理．由于 $\Delta=sr$，它等价于

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}\leqslant s^2$$
$$\leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}. \qquad ②$$

这是所谓索勒丹-米德曼方法的基础．

由恒等式

$$-s^4+2s^2(2R^2+10Rr-r^2)-r(4R+r)^3$$
$$=(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2/(4r^2)\geqslant 0, \qquad ③$$

即得不等式②，最佳性的证明较长，在此不再赘述．

在应用②证明三角形不等式时，由于其中根式 $\sqrt{R^2-2Rr}=d$ 常会导致较繁的计算，所以人们常用 $d<R-r$，将②放成稍弱的 Gerretsen 不等式

$$16Rr-5r^2\leqslant s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2 \qquad ④$$

后再使用. 当然,若用

$$d<\frac{5R-8r}{4},\frac{5R-9r}{3},\frac{17R-32r}{8},\frac{13R-25r}{5},$$

则依次可得彼此不分强弱的

$$-R^2+38Rr-18r^2\leqslant 2s^2\leqslant 9R^2+2Rr+14r^2, \quad ⑤$$

$$-4R^2+68Rr-39r^2\leqslant 3s^2\leqslant 16R^2-8Rr+33r^2, \quad ⑥$$

$$-9R^2+106Rr-68r^2\leqslant 4s^2\leqslant 25R^2-26Rr+60r^2, \quad ⑦$$

$$-16R^2+152Rr-105r^2\leqslant 5s^2\leqslant 36R^2-52Rr+95r^2. \quad ⑧$$

参考文献 [109,pp. 353~355],[88,pp. 82~87].

(陈 计)

Edwards-Blundon 不等式(Edwards-Blundon inequalities) 设 s、R、r 分别为一个三角形的半周长、外接圆半径、内切圆半径,则

$$3\sqrt{3}r\leqslant s\leqslant 2R+(3\sqrt{3}-4)r^4. \quad ①$$

第一个不等式属于 Edwards(1878),第二个不等式属于 Blundon(1965). 这是形如

$$3\sqrt{3}r+\alpha(R-2r)\leqslant s\leqslant 3\sqrt{3}r+\beta(R-2r) \quad ②$$

的 $s-R-r$ 线性不等式中最佳的($\alpha=0,\beta=2$).

由 Gerretsen 不等式、Chapple -欧拉不等式以及

$$16Rr-5r^2-(3\sqrt{3}r)^2=16r(R-2r)\geqslant 0,$$

$$[3\sqrt{3}r+2(R-2r)]^2-(4R^2+4Rr+3r^2)$$

$$=4r(3\sqrt{3}-5)(R-2r)\geqslant 0,$$

知①成立.

由于①是索勒丹-米德曼方法的主要工具之一,而 Blundon 不等式的系数往往造成计算上的不便,人们常采用下列稍弱的不等

式(在②中取 $\beta=\frac{7}{2\sqrt{3}}=2.020\cdots$)

$$2\sqrt{3}s \leqslant 7R+4r. \tag{③}$$

参考文献　[123,pp.615～626],[141,p.475].

(陈　计)

Berkes-Walker 不等式(Berkes-Walker inequalities)　设 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a、b、c,外接圆与内切圆的半径分别为 R、r,则当

$$-2\leqslant r\leqslant\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$$

时,有

$$2\sqrt{3}r\leqslant M_k(a,b,c)\leqslant\sqrt{3}R, \tag{①}$$

其中 $M_k(a,b,c)$表示 a、b、c 的 k 次幂平均.

这是用三角形边长的幂平均对外接圆半径、内切圆半径估计的最佳结果. 1963 年,作为 Makowski 问题的解答,Berkes 证明了第二个不等式;而第一个不等式则是由 Walker 在 1970 年发现的.

由于 $4(s-b)(s-c)=a^2-(b-c)^2\leqslant a^2$, 所以

$$\begin{aligned}&a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\\ \leqslant&\frac{1}{4(s-b)(s-c)}+\frac{1}{4(s-c)(s-a)}+\frac{1}{4(s-a)(s-b)}\\ =&\frac{s}{4(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{4r^2},\end{aligned} \tag{②}$$

即 $2\sqrt{3}\leqslant M_{-2}(a,b,c)$, 再由幂平均单调性,即得①的第一个不等式. ①的第二个不等式证明较繁,在此不再赘述.

王振在 1991 年把①的第二个不等式推广到圆内接 n 边形:

$$M_k(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant 2R\sin\frac{\pi}{n}, \tag{③}$$

其中 $k \leqslant [\ln n - \ln(n-1)] \Big/ \left(\ln\sin\frac{\pi}{n-1} - \ln\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

参 考 文 献　[127, p. 678], [120, pp. 31～32], [63, pp. 40～41].

（陈　计）

Fejes Tóth-Hajós 不等式（Fejes Tóth-Hajós inequalities） 设 $\triangle ABC$ 的旁切圆与外接圆半径分别为 r_a、r_b、r_c、R，则

$$\frac{r_a + r_b + r_c}{3} \leqslant \frac{3}{2}R \leqslant \sqrt{\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{3}}. \qquad ①$$

第一个不等式属于 Fejes Tóth，第二个不等式属于 Hajós.

由 $r_a = \frac{\Delta}{s-a}$，$R = \frac{abc}{4\Delta}$，$\Delta = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}$，令 $s-a=x$ 等，则①的第一个不等式等价于

$$8\left(\sum x\right)\sum yz \leqslant 9\prod(y+z), \qquad ②$$

这可由如下恒等式得证：

$$\begin{aligned} &9\prod(y+z) - 8\left(\sum x\right)\left(\sum yz\right) \\ &= \sum(x^2y + x^2z) - 6xyz \\ &= \sum x(y-z)^2. \end{aligned} \qquad ③$$

①的第二个不等式等价于

$$27\prod(y+z)^2 \leqslant 64\left(\sum x\right)^2\sum y^2z^2, \qquad ④$$

这可由下列恒等式得证：

$$\begin{aligned} &64\left(\sum x\right)^2\sum y^2z^2 - 27\pi(y+z)^2 \\ &= 37\sum(x^4y^2 + x^4z^2) - 54\sum x^4yz + 74\sum y^3z^3 \end{aligned}$$

$$-34\sum(x^3y^2z+x^3z^2y)-78x^2y^2z^2$$
$$=\sum(y-z)^2(27x^4+47x^3y+47x^3z+13x^2yz+10y^2z^2). \quad ⑤$$

上述配方证法由陈计给出.

对双心 n 边形的旁切圆半径 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 及外接圆半径 R,陈计猜想:当 $n\geqslant 4$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}r_i\geqslant nR\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}. \quad ⑥$$

并且证明了 $n=4$ 的情形.

参考文献 [124,p.72],[105,p.313],[98,p.313].

(陈 计)

Steinig 不等式(Steinig inequality) 设 h_a、h_b、h_c 是$\triangle ABC$ 的高,R 和 r 分别是它的外接圆半径和内切圆半径,则

$$\frac{2r(5R-r)}{R}\leqslant h_a+h_b+h_c\leqslant\frac{2(R+r)^2}{R},$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

该不等式见 J. Steinig, *Elem. Math.* 18(1963),127~131.

因为 $2R\sin A\cdot h_a=bc\sin A$,所以

$$2R(h_a+h_b+h_c)=bc+ca+ab.$$

由不等式

$$4r(5R-r)\leqslant bc+ca+ab\leqslant 4(R+r)^2$$

(见 Gerrestsen 不等式),得

$$4r(5R-r)\leqslant 2R(h_a+h_b+h_c)\leqslant 4(R+r)^2,$$

即
$$\frac{2r(5R-r)}{R}\leqslant h_a+h_b+h_c\leqslant\frac{2(R+r)^2}{R},$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

应用欧拉不等式 $R\geqslant 2r$,则由第二个不等式得

$$h_a + h_b + h_c \leqslant 2R + 5r,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立. 这个不等式见 F. Leuenberger, *Elem. Math.* 19(1964), 132～133, 或 L. Bankoff-D. Woods, *Math. Mag.* 38(1965), 240 and 39(1966), 130.

进而还可得

$$h_a + h_b + h_c \leqslant 3(R + r),$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立. 它见于 L. Carlitz, *Problem* E1616, *Amer. Math.* Monthly 70(1963), 758 and 71(1964), 558～559, 或 F. Leuenberger, *Elem. Math.* 19(1964), 132～133.

最后可得

$$9r \leqslant \frac{2r(5R - r)}{R} \leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant \frac{2(R + r)^2}{R}$$

$$\leqslant 2R + 5r \leqslant 3(R + r) \leqslant \frac{9}{2}R,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

参考文献 [40, p. 338], [30, p. 72].

(郑君文)

Makowski 不等式(Makowski inequality) 设△ABC 的高与旁切圆半径分别为 h_a、h_b、h_c, r_a、r_b、r_c, 则当 $t \leqslant -1$ 时,

$$M_t(h_a, h_b, h_c) \geqslant M_t(r_a, r_b, r_c), \qquad ①$$

当 $t > -1$ 时, 不等号反向.

这是 Makowski 在 1961 年对恒等式

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

的推广.

由 $h_a=\dfrac{2\Delta}{a}, r_a=\dfrac{\Delta}{(s-a)}$，令 $s-a=x$ 等，则①等价于

$$\sum\left(\frac{y+z}{2}\right)^{-t}\leqslant\sum x^{-t}. \qquad ②$$

由于函数 $f(x)=x^{-t}$ 在 $t\leqslant-1$ 时为凸，由 Jensen 不等式得

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^{-t}\leqslant\frac{y^{-t}+z^{-t}}{2}, \qquad ③$$

于是②成立，即有①. 当 $t>-1$ 时同理可证.

当 $t=0$ 时，①可化为

$$h_ah_bh_c\leqslant r_ar_br_c. \qquad ④$$

即当 $k\leqslant0$ 时，

$$M_k\left(\frac{h_a}{r_a},\frac{h_b}{r_b},\frac{h_c}{r_c}\right)\leqslant1. \qquad ⑤$$

石世昌与陈计在 1995 年证明了：当 $k\geqslant(\ln9-\ln4)/\ln3$ 时，⑤中不等号反向.

参考文献 [117, pp. 60～61], [90].

（陈　计）

Erdös-Oppenheim 不等式（Erdös-Oppenheim inequalities） 设 $\triangle ABC$ 的中线为 m_a、m_b、m_c，且边长满足 $a\leqslant b, a\leqslant c$，则

$$0<m_a+m_b+m_c-b-c\leqslant\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\right)a. \qquad ①$$

这是 P. Erdös 在给 L. Bankoff 的信中提出的猜想，由 A. Oppenheim 证明.

由于 $m_b+m_c>m_a$，所以

$$\begin{aligned}b+c&<\frac{2}{3}(m_c+m_a)+\frac{2}{3}(m_a+m_b)\\&=\frac{4}{3}m_a+\frac{2}{3}(m_b+m_c)\end{aligned}$$

$$< m_a + m_b + m_c,$$

即第一个不等式成立.第二个不等式证明较长,在此不再赘述.

不等式①的中线对偶式为

$$0 < 3s - 2m_b - 2m_c \leqslant (3\sqrt{3} - 4)m_a, \tag{②}$$

其中 $a \geqslant b$, $a \geqslant c$.

参考文献 [49,p.214].

（陈 计）

Janous-Gmeiner 不等式（Janous-Gmeiner inequality） 设 $\triangle ABC$ 的中线为 m_a、m_b、m_c,半周长为 s,则

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} > \frac{5}{s}. \tag{①}$$

这是Janous 在 1986 年提出的猜想,后由 Gmeiner 与 Janous、单墫与刘亚强分别在 1988 年给出证明.

先证

$$4m_bm_c \geqslant 2a^2 - 4b^2 - 4c^2 + 9bc. \tag{②}$$

这可由 $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ 及 $(2c^2 + 2a^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (2a^2 - 4b^2 - 4c^2 + 9bc)^2 = 18(b - c)^2[a^2 - (b - c)^2] \geqslant 0$ 得证.现在,将①的中线对偶式

$$\sum \frac{1}{a} \cdot \sum m_a > \frac{15}{2} \tag{③}$$

两边平方,得

$$\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2\left(\sum m_a^2 + 2\sum m_bm_c\right) > \frac{225}{4}. \tag{④}$$

由不等式②,我们只需证

$$\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2\left[\frac{3}{4}\sum a^2 + \frac{1}{2}\sum (2a^2 - 4b^2 - 4c^2 + 9bc)\right] > \frac{225}{4},$$

即

$$\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2\left(2\sum bc - \sum a^2\right) > 25. \quad ⑤$$

这可由下式得到：

$$\left(\sum bc\right)^2\left(2\sum bc - \sum a^2\right) - 25a^2b^2c^2$$

$$= \frac{1}{16}\sum (b-c)^2[a^2-(b-c)^2][15a^2+(b-c)^2] + \frac{1}{8}\left(\sum a^3 + 11abc\right)\prod (b+c-a) + \frac{1}{4}\prod (b+c-a)^2 > 0. \quad ⑥$$

陈计在 1992 年证明了③的加强

$$\sum \frac{1}{a} \cdot \sum m_a \geqslant \frac{15}{2}\sqrt{1+\frac{4r}{25R}}, \quad ⑦$$

并猜测①可加强成

$$\sum \frac{1}{m_a} \geqslant \frac{5}{s}\sqrt{1+\frac{4r}{25R}}. \quad ⑧$$

参考文献 [57,pp. 9～11],[69,pp. 8～9],[158].

（陈 计）

中线的立方和(Cubic sum of medians) 设△ABC 的中线为 m_a、m_b、m_c，外接圆半径为 R，则

$$m_a^3 + m_b^3 + m_c^3 \leqslant \frac{81}{8}R^3. \quad ①$$

这是陈计在 1991 年提出的猜想.

设 $d=\sqrt{R^2-2Rr}$，$u=r+d$，则 $u\in[\frac{R}{2},R)$，易验证

(m_a^2, m_b^2, m_c^2)

$$\prec_w \left((R+u)^2, \frac{1}{2}(5R^2+uR-4u^2), \frac{1}{2}(5R^2+uR-4u^2) \right). \quad ②$$

从而

$$m_a^3+m_b^3+m_c^3 \leqslant (R+u)^3+\frac{1}{\sqrt{2}}(5R^2+uR-4u^2)^{3/2}. \quad ③$$

又

$$\begin{aligned}&[81R^3-8(R+u)^3]^2-32(5R^2+uR-4u^2)^3\\ &=1\,329R^6-5\,904R^5u+6\,192R^4u^2+3\,792R^3u^3\\ &\quad -6\,336R^2u^4-1\,152Ru^5+2\,112u^6\\ &=(R-2u)^2(1\,329R^4-588R^3u-1\,476R^2u^2\\ &\quad +240Ru^3+528u^4)\\ &=(R-2u)^2[(R-u)(1\,329R^3+741R^2u^2-735Ru^3\\ &\quad -495u^4)+33u^4]\geqslant 0, \end{aligned} \quad ④$$

从而可得不等式①. 这一优超证法属于王振.

陈计在 1991 年的另一猜想

$$\frac{5}{8}\sum a^3<\sum m_a^3<\frac{27}{40}\sum a^3, \quad ⑤$$

已由陈国阳在 1994 年证得.

参考文献 [61, p. 88], [79, pp. 17~21], [93, p41].

（陈 计）

三角形中线和旁切圆半径的不等式(Inequality for the radii of excircles and medians of a triangle) 设$\triangle ABC$的中线及旁切圆半径分别为$m_a, m_b, m_c, r_a, r_b, r_c$，则

$$\frac{r_br_c}{m_bm_c}+\frac{r_cr_a}{m_cm_a}+\frac{r_ar_b}{m_am_b}\geqslant 3. \quad ①$$

这是单墫、陈计 1991 年发表的结论. 从 Leuenberger 不等式

$$r_a r_b r_c \leqslant m_a m_b m_c \tag{②}$$

的角度来看,①不仅外形简单,而且证明不会太平凡.

由于 $r_b r_c = s(s-a)$,① 等价于

$$\sum \frac{(b+c)^2-a^2}{m_b m_c} \geqslant 12, \tag{③}$$

它的中线对偶式为

$$\sum \frac{(m_b+m_c)^2-m_a^2}{bc} \geqslant \frac{27}{4}. \tag{④}$$

又由于

$$\begin{aligned} 2|m_b-m_c| &= \frac{2|m_b^2-m_c^2|}{m_b+m_c} = \frac{3|b^2-c^2|}{2(m_b+m_c)} \\ &= \frac{b+c}{BG+CG}|b-c| \geqslant |b-c|, \end{aligned} \tag{⑤}$$

其中 G 是 $\triangle ABC$ 的重心. 所以可得 $2|m_b-m_c| \geqslant |b-c|$ 的中线对偶式

$$3|b-c| \geqslant 2|m_b-m_c|. \tag{⑥}$$

于是

$$\begin{aligned} &4(m_b+m_c)^2-4m_a^2 \\ &= 8m_b m_c + 4m_b^2 + 4m_c^2 - 4m_a^2 \\ &\geqslant 8m_b^2 + 8m_c^2 - 4m_a^2 - 9(b-c)^2 \\ &= 9a^2 - 9b^2 - 9c^2 + 18bc \\ &= 36(s-b)(s-c), \end{aligned} \tag{⑦}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum \frac{(m_b+m_c)^2-m_a^2}{bc} &\geqslant 9\sum \frac{(s-b)(s-c)}{bc} \\ &= 9\sum \sin^2\frac{A}{2} \geqslant \frac{27}{4}. \end{aligned} \tag{⑧}$$

由不等式①,可得杨任尔在 1991 年发表的不等式

$$\sum \frac{r_a}{m_a} \geqslant 3. \tag{⑨}$$

石世昌与陈计在 1995 年证明了①与⑨的如下推广:

$$M_\theta\left(\frac{r_b r_c}{m_b m_c}, \frac{r_c r_a}{m_c m_a}, \frac{r_a r_b}{m_a m_b}\right) \geqslant 1, \tag{⑩}$$

$$M_k\left(\frac{r_a}{m_a}, \frac{r_b}{m_b}, \frac{r_c}{m_c}\right) \geqslant 1, \tag{⑪}$$

其中 $\theta \geqslant \frac{\ln 3}{\ln 4}, k \geqslant \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$.

参考文献　[62, pp. 40～42], [90], [118, pp. 127～129], [156, pp. 170～172].

(陈　计)

Marshall-Olkin 不等式(Marshall-Olkin inequality)　设 $\triangle ABC$ 的中线为 m_a、m_b、m_c,旁切圆半径为 r_a、r_b、r_c. 则当 $\lambda \geqslant 1$ 或 $\lambda \leqslant 0$ 时,有

$$r_a^\lambda + r_b^\lambda + r_c^\lambda \geqslant m_a^\lambda + m_b^\lambda + m_c^\lambda. \tag{①}$$

Marshall 与 Olkin 在 1979 年用优超方法建立了 $\lambda \geqslant 1$ 的情形,陈计补充了 $\lambda \leqslant 0$ 的情形.

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则 $r_a \geqslant r_b \geqslant r_c$, $m_a \leqslant m_b \leqslant m_c$,由三角形中的恒等式

$$m_a^2 = \frac{2r_c^2(r_a + r_b)^2 + 2r_b^2(r_c + r_a)^2 - r_a^2(r_b + r_c)^2}{4(r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b)}, \tag{②}$$

易知 $r_c \leqslant m_a$, $m_c \leqslant r_a$,再由 Leuenberger 不等式

$$r_a r_b r_c \leqslant m_a m_b m_c, \tag{③}$$

$$m_a + m_b + m_c \leqslant r_a + r_b + r_c \tag{④}$$

得

$$r_b r_c \leqslant m_a m_b, \tag{⑤}$$

$$m_b + m_c \leqslant r_a + r_b. \tag{⑥}$$

即有以下弱优超关系

$$(\ln r_a, \ln r_b, \ln r_c) \prec^w (\ln m_a, \ln m_b, \ln m_c), \tag{⑦}$$

$$(m_a, m_b, m_c) \prec_w (r_a, r_b, r_c). \tag{⑧}$$

由于 $f(x) = x^\lambda (\lambda > 1)$ 是递增凸函数，$g(x) = e^{\lambda x} (\lambda \leqslant 0)$ 是递减凸函数，所以不等式①成立.

参考文献 [48, pp. 207～208], [62, p. 41], [118, pp. 127～129].

（陈 计）

角平分线的平方和（Quadratic sum of anglebisetors） 设 $\triangle ABC$ 的角平分线为 w_a、w_b、w_c，面积与半周长分别为 Δ、s，则

$$3\sqrt{3}\Delta \leqslant w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leqslant s^2. \tag{①}$$

第一个不等式属于 Gordon，第二个属于 Kyžkov.

由 $w_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2} \geqslant bc - \dfrac{a^2}{4}$，得

$$\begin{aligned} \sum w_a^2 &\geqslant \sum bc - \sum \frac{a^2}{4} \\ &\geqslant \frac{3}{4}\left(2\sum bc - \sum a^2\right) \geqslant 3\sqrt{3}\Delta, \end{aligned} \tag{②}$$

其中最后一步用了 Finsler-Hadwiger 不等式.

又由 $w_a = \dfrac{2\sqrt{s(s-a)bc}}{b+c} \leqslant \sqrt{s(s-a)}$，得

$$\sum w_a^2 \leqslant s(3s - a - b - c) = s^2. \tag{③}$$

王振与陈计在 1993 年发表了公式

$$\sum w_a^2 = [s^6 + 3s^4r^2 + s^2r^2(32R^2 + 40Rr + 3r^2) + r^4(4R + r)^2]/(s^2 + 2Rr + r^2)^2, \qquad ④$$

并进而将①加强成

$$s^2 - 4r(R - 2r) \leqslant \sum w_a^2 \leqslant s^2 - \frac{16}{9}r(R - 2r). \qquad ⑤$$

参考文献 [125, p. 76], [72, pp. 34～36], [103].

(陈 计)

Panaitopal 不等式(Panaitopal inequality) 设△ABC 边 a 上的高为 h_a，$\angle A$ 的平分线为 w_a，外接圆与内切圆的半径为 R、r，则

$$w_a - h_a \leqslant R - 2r. \qquad ①$$

这是 Panaitopal 在 1983 年发表的不等式，虽然非常有趣，但人们尚未找到一个纯几何的证法.

我们来证更强的结论：

$$w_a - h_a \leqslant \frac{3}{4}(R - 2r). \qquad ②$$

由于 $\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{h_a}{w_a}$，所以②等价于

$$\frac{8}{3}\sin B\sin C\left(\sec\frac{B-C}{2} - 1\right) \leqslant 1 - 8\pi\sin\frac{A}{2}. \qquad ③$$

令 $t = \cos\dfrac{B-C}{2} \in (0,1]$，$x = \sin\dfrac{A}{2} \in (0,1)$，则③变成

$$f(x;t) = 4(2+t)x^2 - 12t^2x + (3t - 8t^2 + 8t^3) \geqslant 0. \qquad ④$$

这是关于 x 的二次函数，所以

$$f(x;t) \geqslant f\left(\frac{3t^2}{4+2t};t\right) = \frac{t(1-t)^2(6-t)}{2+t} \geqslant 0. \quad ⑤$$

对中线 m_a，陈计猜想

$$m_a - w_a \leqslant R - 2r, \quad ⑥$$

$$m_a - h_a \leqslant \frac{4}{3}(R - 2r). \quad ⑦$$

参考文献 [143，p. 300].

（陈　计）

Garfunkel-Gardner 不等式（Garfunkel-Gardner inequality） 设 h_a、m_b、w_c 分别是△ABC 的高、中线、内角平分线，则

$$h_a + m_b + w_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c). \quad ①$$

这是 J. Garfunkel 在 1974 年提出的一个猜想，两年之后由 C. S. Gardner首次证明.

由于 $h_a \leqslant w_a \leqslant \sqrt{s(s-a)}$，要证①，只需证

$$\sqrt{s(s-a)} + m_b + \sqrt{s(s-c)} \leqslant s\sqrt{3}. \quad ②$$

又由于

$$4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 = (c+a)^2 - 4(s-c)(s-a)$$

$$= [c + a + 2\sqrt{(s-c)(s-a)}][c + a - 2\sqrt{(s-c)(s-a)}]$$

$$\leqslant 2s[2s - (\sqrt{s-c} + \sqrt{s-a})^2],$$

即

$$\sqrt{s(s-c)} + \sqrt{s(s-a)} \leqslant \sqrt{2(s^2 - m_b^2)}. \quad ③$$

所以，要证②，只需证

$$\sqrt{2(s^2 - m_b^2)} + m_b \leqslant s\sqrt{3}, \quad ④$$

即

$$2(s^2 - m_b^2) \leqslant (s\sqrt{3} - m_b)^2,$$

或 $$(s-\sqrt{3}m_b)^2\geqslant 0.$$

上述证法由 C. Tǎnǎsescu 给出.

安振平在 1991 年对$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$提出下列猜想:

$$h_a h_{a'}+m_b m_{b'}+w_c w_{c'}\leqslant\frac{3}{4}(aa'+bb'+cc'). \qquad ⑤$$

参考文献 [49, pp. 221~223], [65, p. 41], [138].

(陈 计)

Leuenberger 不等式(Leuenberger inequalities) 设m_a、m_b、m_c和w_a、w_b、w_c分别是$\triangle ABC$的中线和内角平分线，r_a、r_b、r_c各是它的旁切圆的半径，则(1) $w_a w_b w_c\leqslant r_a r_b r_c\leqslant m_a m_b m_c$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立;(2) $w_a+w_b+w_c\leqslant m_a+m_b+m_c\leqslant r_a+r_b+r_c$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

上述不等式见 F. Leuenberger, *Elem. Math.* 16(1961) 127~129，其中(1)的第一个不等式也可见 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 70(1963)的问题 E1629，它由 Carlitz 提出.

(1) 据三角形内角平分线公式 $w_a=\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$，及 $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，得 $w_a\leqslant\sqrt{s(s-a)}$. 同样有 $w_b\leqslant\sqrt{s(s-b)}$，$w_c\leqslant\sqrt{s(s-c)}$，所以 $w_a w_b w_c\leqslant s\Delta$.

又 $\Delta=(s-a)r_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c$，于是

$$\Delta^3=(s-a)(s-b)(s-c)r_a r_b r_c,$$

所以 $r_a r_b r_c=s\Delta$，因此 $w_a w_b w_c\leqslant r_a r_b r_c$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

据三角形中线公式 $m_a^2=\dfrac{1}{4}[2(b^2+c^2)-a^2]$，及 $2(b^2+c^2)\geqslant(b+c)^2$，得 $m_a^2\geqslant\dfrac{1}{4}[(b+c)^2-a^2]=s(s-a)$. 同样有 $m_b^2\geqslant s(s-b)$，$m_c^2\geqslant s(s-c)$，所以 $m_a^2 m_b^2 m_c^2\geqslant s^2\Delta^2$，因此

$m_am_bm_c \geqslant s\Delta = r_ar_br_c$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

(2) 设 p_a、p_b、p_c 分别是△ABC 的外心到边 BC、CA、AB 的距离，它的外接圆半径为 R，则 $m_a \leqslant R + p_a$，$m_b \leqslant R + p_b$，$m_c \leqslant R + p_c$，相加得 $m_a + m_b + m_c \leqslant 3R + p_a + p_b + p_c$. 又 $ap_a = R^2\sin 2A$，$bp_b = R^2\sin 2B$，$cp_c = R^2\sin 2C$，于是有 $p_a + p_b + p_c = R(\cos A + \cos B + \cos C)$，而 $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$，所以 $m_a + m_b + m_c \leqslant 4R + r$.

因为 $r_a + r_b + r_c = s\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= R(\sin A + \sin B + \sin C)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \\
&= 4R\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right. \\
&\quad\left. + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right) \\
&= 4R\left(\cos^2\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right) \\
&= 4R\left(1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \\
&= 4R + r,
\end{aligned}
$$

所以　$m_a + m_b + m_c \leqslant r_a + r_b + r_c$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

显然　$w_a + w_b + w_c \leqslant \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)} \leqslant m_a + m_b + m_c$，当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

由最后这个不等式立刻可得

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \leqslant s^2 \leqslant m_a^2 + m_b^2 + m_c^2,$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立，它可见F. Rgž kov，*Matematika V ˇskole.* 1939，No. 1，80，No. 4，73，也可见 Z. A.

Skopec, *Matematika V ˇs kole*, 1963, No. 3, 89, 或 L. Carlitz, S. Philipp, *Problem* E1628, *Amer. Math.* Monthly 70 (1963), 891 and 71 (1964), 687, 或 F. Leuenberger, *Elem. Math.* 18(1963), 35~36.

参考文献 [40, pp. 341~342], [30, pp. 93~94].

(郑君文)

角平分线的倒数和(Reciprocal sum of anglebisetors) 设 $\triangle ABC$ 的角平分线为 w_a、w_b、w_c,则

$$\frac{1}{w_a}+\frac{1}{w_b}+\frac{1}{w_c}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \qquad ①$$

这是 1984 年发表的一个猜想,由成萱在 1994 年给出证明.

由于 $w_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$,所以

$$\frac{1}{w_a}=\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)\sec\frac{A}{2}>\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}, \qquad ②$$

从而不等式①成立.

杨学枝、王振与陈计分别将①加强成

$$\sum\frac{1}{w_a}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum\sec\frac{A}{2}\right)\sum\frac{1}{a}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}, \qquad ③$$

$$\sum\frac{1}{w_a}\geqslant\left(3\sum\frac{1}{w_bw_c}\right)^{1/2}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}. \qquad ④$$

该题的推广方向为:当 $k\geqslant-2$ 时,有

$$M_k(w_a,w_b,w_c)<M_k(a,b,c). \qquad ⑤$$

参考文献 [144, p. 126], [80, p. 31], [82, pp. 30~31], [85, pp. 51~53].

(陈 计)

Erdös-Leuenberger 不等式(Erdös-Leuenberger inequality) 在$\triangle ABC$中,设$a \leqslant b \leqslant c$,即$h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$,$w_a \geqslant w_b \geqslant w_c$,或$m_a \geqslant m_b \geqslant m_c$,则

$$w_c \leqslant M_{-2}(h_a, h_b), \quad ①$$
$$w_a \geqslant M_4(m_b, m_c). \quad ②$$

这是 Erdös 与 Leuenberger 在 1969 年给出的结论.

1970 年,Bundschuh 与 Reutter 证明了:若$w_c \leqslant M_n(h_a, h_b)$,则$n \geqslant -2$;若$w_a \geqslant M_n(m_b, m_c)$,则$n \leqslant \ln 2/(\ln 9 - \ln 8)$.

参考文献 [126].

(陈 计)

Garfunkel 不等式(Garfunkel inequalities) 设$\triangle ABC$的中线为m_a、m_b、m_c,中线延伸至外接圆的长为M_a、M_b、M_c,则

$$M_a + M_b + M_c \geqslant \begin{cases} \dfrac{4}{3}(m_a + m_b + m_c), & ① \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}(a + b + c). & ② \end{cases}$$

这两个不等式是由 Garfunkel 在 1974 年提出的,两年之后,Erdös 与 Klamkin 只证明了①.

令 $\sum a^2 = 4k^2 (k > 0)$,则由中线长公式$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$得$\sum m_a^2 = 3k^2$. 再由$4m_a^2 = 8k^2 - 3a^2$及相交弦定理$m_a(M_a - m_a) = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$,得$M_a m_a = \dfrac{2}{3}(k^2 + m_a^2)$,从而

$$M_a = \frac{2k}{3}\left(\frac{k}{m_a} + \frac{m_a}{k}\right) \geqslant \frac{4k}{3}. \quad ③$$

所以

$$\sum M_a \geqslant 4k = \begin{cases} 4\left(\dfrac{1}{3}\sum m_a^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \dfrac{4}{3}\sum m_a, & ④ \\ 2\left(\sum a^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sum a. & ⑤ \end{cases}$$

该题的进一步推广方向是：

当 $t \leqslant t_1 = \dfrac{\ln 9 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3}$ 时，有

$$M_t(M_a, M_b, M_c) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} M_t(a, b, c); \qquad ⑥$$

当 $t \leqslant t_2 = 3.081\cdots$（$t_2$ 是方程 $4^x + 2^{x+1} = 3^{x+1}$ 的根）时，有

$$M_t(M_a, M_b, M_c) \geqslant \frac{4}{3} M_t(m_a, m_b, m_c). \qquad ⑦$$

由不等式③知上述猜想在 $t \leqslant 2$ 时成立. 王振在 1992 年还给出了与本题有关的结论：

$$M_2\left(\frac{m_a}{M_a}, \frac{m_b}{M_b}, \frac{m_c}{M_c}\right) \leqslant \frac{3}{4} \leqslant M_4\left(\frac{m_a}{M_a}, \frac{m_b}{M_b}, \frac{m_c}{M_c}\right). \qquad ⑧$$

参考文献 [66],[137].

（陈　计）

Ciamberlini 不等式（Ciamberlini inequality） 设 s, R, r 是 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆与内切圆的半径. 则当 $\max\{A, B, C\} \lesseqgtr \dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$s \gtreqless 2R + r. \qquad ①$$

这是 Ciamberlini 在 1943 年提出的，其锐角三角形的情形是索勒丹-米德曼方法的有力工具之一.

由三角形中的恒等式

$$\prod \cos A = \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2} \qquad ②$$

易知①成立.

该定理尚有许多等价形式，如：

$$\sum\sin^2 A \gtreqless 2, \sum a^2 \gtreqless 8R^2,$$
$$R \gtreqless 3 \cdot \overline{OG}, \prod (s - r_a) \gtreqless 0.$$

参考文献 [105,pp.37~41].

（陈 计）

Walker 不等式（Walker inequality） 设 s、R、r 是锐角三角形 ABC 的半周长、外接圆与内切圆的半径，则

$$s^2 \geqslant 2R^2 + 8Rr + 3r^2. \qquad ①$$

这是 Walker 在 1972 年发表的一个结论，它是索勒丹-米德曼方法的有力工具之一.

由 $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$，得

$$2\sum\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\sum\frac{s-a}{a}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$
$$\leqslant \sum\frac{s-a}{a}\left(\frac{s-b}{c} + \frac{s-c}{b}\right) = \sum\frac{a(s-a)}{bc}$$
$$= \frac{\sum(a^2b + a^2c) - \sum a^3}{2abc} = \frac{\sum(ab^2 + ac^2) - \sum a^3}{2abc}$$
$$= \sum\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \sum\cos A. \qquad ②$$

这对任意△ABC 都成立. 在角变换 $(A,B,C) \to (\pi - 2A, \pi - 2B, \pi - 2C)$ 意义下，②等价于：对锐角△ABC，有

$$2\sum\cos B\cos C \leqslant \sum\cos 2A, \qquad ③$$

由三角形中的恒等式

$$\sum\cos B\cos C = \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}, \qquad ④$$

$$\sum \cos 2A = \frac{3R^2 + 4Rr + r^2 - s^2}{R^2}, \tag{⑤}$$

即知③等价于①.

由本题结论及 Ciamberlini 不等式,可求出使不等式

$$s \geqslant 3\sqrt{3}r + k(R - 2r) \tag{⑥}$$

成立的最大 $k = 7 + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} = 1.526\cdots$.

参考文献 [43],[133].

（陈 计）

锐角三角形角的不等式(Inequality for the angles of an acute triangle) 在锐角△ABC 中,有

$$\sin A + \sin B + \sin C > \frac{2 + \sqrt{2}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C). \tag{①}$$

这是单壿 1980 年发表的结论.

由三角形中的恒等式

$$\sum \sin A = \frac{s}{R}, \tag{②}$$

及

$$\sum \cos A = \frac{R + r}{R}, \tag{③}$$

可知①等价于

$$s > \frac{2 + \sqrt{2}}{2}(R + r). \tag{④}$$

由 Ciamberlini 与 Walker 不等式,以及当 $R \geqslant (1 + \sqrt{2})r$ 时

$$(2R + r) - \frac{2 + \sqrt{2}}{2}(R + r) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}[R - (1 + \sqrt{2})r] \geqslant 0, \tag{⑤}$$

$$(2R^2+8Rr+3r^2)-\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2(R+r)^2$$
$$=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}[R-(1+\sqrt{2})r]\left(R+\frac{13-9\sqrt{2}}{7}r\right)$$
$$>0, \tag{6}$$

即得不等式③.这一证法是陈计在1993年发表的.

该题的一个有趣的等价形式是

$$a+b+c>(2+\sqrt{2})(OD+OE+OF), \tag{7}$$

其中OD、OE、OF是锐角三角形垂心O到三边的距离.

参考文献 [41,p.60],[76,p.40].

（陈 计）

Erdös 不等式(Erdös inequality) 设锐角$\triangle ABC$的高为h_a、h_b、h_c,外接圆与内切圆半径分别为R、r,则

$$R+r\leqslant\max(h_a,h_b,h_c).$$

Erdös 的这个不等式,证明首次发表于1962年.

设$a=\min(a,b,c)$,内心I在高AD上的投影为E.熟知AI平分$\angle OAE$(O为外心),BI在BA上的射影$\leqslant\frac{1}{2}AB$.所以$\angle AOI\geqslant\frac{\pi}{2}$,$AO\leqslant AI\cos\frac{\angle OAE}{2}=AE$,$R+r\leqslant AE+ED=h_a$.这个证明属于单墫.

我们猜测有更强的结论:在锐角三角形中,

$$R+r\leqslant\frac{1}{2}\max\{h_b+h_c,h_c+h_a,h_a+h_b\}.$$

参考文献 [30,p.119],[119,pp.87～88],[42,p.622].

（陈 计）

Guggenheimer 不等式(Guggenheimer inequality) 设$\triangle ABC$

内一点 P 到各顶点的距离为 R_1、R_2、R_3，则

$$\frac{1}{2}(a+b+c)<R_1+R_2+R_3<a+b+c. \quad ①$$

这是 Guggenheimer 在 1967 年发表的结论.

由 $a<PB+PC<b+c$，知①成立.

与第一个不等式类似的结论有陈计在 1992 年发表的不等式

$$\sum R_1>\sqrt[3]{4abc}, \quad ②$$

第二个不等式可加强成

$$\sum R_1<\max\{b+c,c+a,a+b\}, \quad ③$$

陈计在 1984 年还将③推广到多边形.

参考文献 [47,p.67],[55],[154],[41,p.29],[84,p.67],[52,p.26].

（陈 计）

Gmeiner-Janous 不等式（Gmeiner-Janous inequality） 设 $\triangle ABC$ 内一点 P 到各顶点的距离为 R_1、R_2、R_3，则

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(R_1+R_2+R_3)>5. \quad ①$$

这是 Gmeiner 与 Janous 在 1987 年提出的猜想，后由单墫、刘亚强及他们自己在 1988 年证出.

由前面 Janous-Gmeiner 不等式证明中的⑤式

$$\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2\left(2\sum bc-\sum a^2\right)>25, \quad ②$$

只需证

$$\sum R_1\geqslant\sqrt{2\sum bc-\sum a^2}. \quad ③$$

对 Oppenheim 不等式

$$(\sum \lambda a^2)^2 \geqslant 16\Delta^2 \sum \mu\nu \quad ④$$

作平方根变换 $(a,b,c) \to (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$，得

$$(\sum \lambda a)^2 \geqslant (2\sum bc - \sum a^2)\sum \mu\nu. \quad ⑤$$

令 $\lambda = \dfrac{R_1}{a}$ 等，得

$$\begin{aligned}(\sum R_1)^2 &\geqslant (2\sum bc - \sum a^2)\sum \frac{R_2R_3}{bc} \\ &\geqslant 2\sum bc - \sum a^2,\end{aligned} \quad ⑥$$

其中最后一步用了林鹤一不等式.

上述证明中的不等式③

$$\sum R_1 \geqslant \sqrt{4r(4R+r)}, \quad ⑦$$

是刘健在 1993 年建立的. 由陈计 1994 年发表的不等式

$$\sum \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{9}{4r(4R+r)}, \quad ⑧$$

知⑦强于陈计与楼红卫在 1989 年的结论：

$$\sum R_1 \geqslant 3\left(\sum \frac{1}{a^2}\right)^{-1/2}. \quad ⑨$$

参考文献 [158，159，160，161]，[57，pp. 9～11]，[75，pp. 1～4]，[77]，[55].

（陈 计）

林鹤一不等式(Tsuruichi Hayashi inequality) 设 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，记 $PA = R_1, PB = R_2, PC = R_3$，则

$$\frac{R_2R_3}{bc}+\frac{R_3R_1}{ca}+\frac{R_1R_2}{ab}\geqslant 1. \qquad ①$$

这是日本和算学家林鹤一(1873~1935)发表在他自己创办的《东北数学杂志》上的一个重要结论.

用复数 u、v、w 表示$\triangle ABC$的顶点,P 取在复平面原点,则在恒等式

$$\sum vw(v-w)=\prod(v-w), \qquad ②$$

两边取模,即得

$$\sum aR_2R_3\geqslant abc. \qquad ③$$

在①中,令 $P=G$(重心),则 $R_1=\frac{2}{3}m_a$ 等,从而

$$\sum\frac{m_bm_c}{bc}\geqslant\frac{9}{4}, \qquad ④$$

其中线对偶式为

$$\sum\frac{bc}{m_bm_c}\geqslant 4. \qquad ⑤$$

由①与⑤,石世昌与陈计证明了

$$M_t\left(\frac{R_1}{a},\frac{R_2}{b},\frac{R_3}{c}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad ⑥$$

$$M_t\left(\frac{a}{m_a},\frac{b}{m_b},\frac{c}{m_c}\right)\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad ⑦$$

其中 $t\geqslant\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 3}$.

参考文献 [98,pp.68~70],[90].

(陈 计)

惯性极矩不等式(Polar moment of inertia inequality) 设 P 为$\triangle ABC$所在平面上一点,记 $R_1=PA$,$R_2=PB$,$R_3=PC$,则对任

意实数 λ、μ、ν，有

$$\sum\lambda\cdot\sum\lambda R_1{}^2\geqslant\sum\mu\nu a^2. \qquad ①$$

这是 G. A. Tsintsifas 在 1967 年给 D. S. Mitrinović信中的结果，后为 M. S. Klamkin 重新发现并于 1971 年发表.

$$\begin{aligned}0&\leqslant|\sum\lambda\overrightarrow{PA}|^2\\&=\sum\lambda^2|\overrightarrow{PA}|^2+2\sum\mu\nu\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\\&=\sum\lambda^2|\overrightarrow{PA}|^2+\sum\mu\nu(|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)\\&=\sum\lambda^2R_1{}^2+\sum\mu\nu(R_2{}^2+R_3{}^2)-\sum\mu\nu a^2\\&=\sum\lambda\cdot\sum\lambda R_1{}^2-\sum\mu\nu a^2. \qquad ②\end{aligned}$$

惯性极矩不等式有着极其广泛的应用. 例如，取 $P=O$（外心），得 Kooi 不等式

$$(\sum\lambda)^2R^2\geqslant\sum\mu\nu a^2; \qquad ③$$

又如，令 $\lambda=a/R_1$ 等，得林鹤一不等式

$$\sum aR_2R_3\geqslant abc; \qquad ④$$

再如，令 $\lambda=a$ 等，得 Klamkin 在 1975 年发表的不等式：

$$\sum aR_1{}^2\geqslant abc. \qquad ⑤$$

参考文献 [49, p. 491], [132, p. 966], [139, pp. 44～46].

（陈 计）

三角形内一点到它各顶点的距离的不等式（Inequality for the distances from a point in the interior to the vertices of a triangle） 设△ABC 内一点 P 到各顶点的距离为 R_1、R_2、R_3，则

$$R_1R_2R_3<\frac{32}{27}R^3, \qquad ①$$

其中 R 是△ABC 覆盖圆的半径.

这是陈计1990年发表的一个不等式，三年之后，Paul Erdös发表了稍弱的结论. 其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

当 $\angle A$ 为钝角时，$\triangle ABC$ 的覆盖圆 $\odot O$ 以 BC 为直径，延长 PA 交 $\odot O$ 于 D，则 $PA < PD$. 所以，我们可设 $\triangle ABC$ 是锐角（或直角）三角形，此时，它的覆盖圆就是外接圆. 不妨设 P 在 $\triangle BOC$ 中，过点 P 作 BC 的平行线，交 OB 于 M，交 OC 于 N，再过 O 作 MN 的垂线，垂足为 Q. 于是

$$\begin{aligned} PB \cdot PC &\leqslant (PM + MB)(PN + PC) \\ &= PM \cdot PN + MN \cdot NC + NC^2 \\ &= QN^2 - PQ^2 + 2 \cdot QN \cdot NC + NC^2 \\ &\leqslant QN^2 + OQ^2 - OP^2 + 2 \cdot ON \cdot NC + NC^2 \\ &= ON^2 + 2 \cdot ON \cdot NC + NC^2 - OP^2 \\ &= OC^2 - OP^2 = R^2 - d^2, \end{aligned} \quad ②$$

其中 $d = OP$. 又 $PA \leqslant R + d$，所以

$$\begin{aligned} R_1R_2R_3 &\leqslant (R+d)(R^2-d^2) = (R+d)^2(2R-2d)/2 \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{4R}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}R^3. \end{aligned} \quad ③$$

这个证明是由万惠华给出的.

与本题类似的结论还有陈计的不等式

$$\sum R_2R_3 < 4R^2 \quad ④$$

及王振的不等式

$$R\sum \frac{1}{R_1} > y_0 = 2.8645157\cdots \quad ⑤$$

其中 y_0 是12次整系数多项式的根.

参考文献 [59],[149],[158].

（陈 计）

三角形内一点到它各边的距离的不等式(Inequality for the

distances from a point in the interior to the sides of a triangle) 设$\triangle ABC$内一点P到各边的距离为r_1、r_2、r_3，其面积为Δ，则

$$r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2\leqslant\frac{\Delta}{\sqrt{3}}. \quad ①$$

这是安振平对Gerber1975年结论

$$\Delta\geqslant 3\sqrt{3}(r_1r_2r_3)^{\frac{2}{3}} \quad ②$$

的一个加强.

对Oppenheim不等式

$$(\sum\lambda a^2)^2\geqslant 16\Delta^2\sum\mu\nu \quad ③$$

作平方根变换$(a,b,c)\to(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$，得

$$(\sum\lambda a)^2\geqslant(2\sum bc-\sum a^2)\sum\mu\nu. \quad ④$$

令$\lambda=r_1$等，由$\sum ar_1=2\Delta$，得

$$\sum r_2r_3\leqslant\frac{4\Delta^2}{2\sum bc-\sum a^2}\leqslant\frac{\Delta}{\sqrt{3}}. \quad ⑤$$

其中最后一步用了Finsler-Hadwiger不等式.

上述证明中⑤的第一个不等式由陈计1992年首次得到，它实际上给出了$\sum r_2r_3$的极大值，极值点J的重心坐标为$(a(s-a),b(s-b),c(s-c))$.

参考文献　[54, pp. 55～57]，[140, pp. 97～111]，[68, pp. 8～9].

（陈　计）

Erdös-Mordell不等式(Erdös-Mordell inequality)　设$\triangle ABC$内一点P到各顶点的距离为R_1，R_2，R_3，到各边的距离为r_1、r_2、r_3，

则

$$R_1+R_2+R_3\geqslant 2(r_1+r_2+r_3).\qquad ①$$

这是 Erdös 在 1935 年提出的一个猜想，两年后由 Mordell 首先证明.

作 P 关于$\angle A$ 的等角共轭点 P'，则

$$d(P',CA)=r_3,d(P',AB)=r_2,d(P',a)=r_1'$$

(P'在$\triangle ABC$ 形内为正，否则为负)，从而

$$(R_1+r_1')a\geqslant 2\Delta=br_3+cr_2+ar_1'.$$

即

$$R_1\geqslant\frac{b}{a}r_3+\frac{c}{a}r_2.\qquad ②$$

同理，

$$R_2\geqslant\frac{c}{b}r_1+\frac{a}{b}r_3,R_3\geqslant\frac{a}{c}r_2+\frac{b}{c}r_1.$$

于是

$$\sum R_1=\sum\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)r_1\geqslant 2\sum r_1.\qquad ③$$

1958 年，Florian 对①作了指数推广：当 $|k|\leqslant 1$ 时，

$$M_k(R_1,R_2,R_3)\geqslant 2M_k(r_1,r_2,r_3);\qquad ④$$

当 $|k|>1$ 时，

$$M_k(R_1,R_2,R_3)>2^{1/|k|}M_k(r_1,r_2,r_3).\qquad ⑤$$

1989 年，陈计与王振进一步把上述结论推广到凸 n 边形：当 $|k|\leqslant 1$ 时，

$$M_k(R_i)\geqslant\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)M_k(r_i);\qquad ⑥$$

当 $|k|>1$ 时，

$$M_k(R_i) > \left(\sec\frac{\pi}{n}\right)^{1/|k|} M_k(r_i). \qquad ⑦$$

特别地，当 $k=\pm 1$ 时，⑥是 Fejes Tóth 在 1948 年的猜测. 而当 $k\geqslant 1$ 时，⑥与⑦是由大关信雄 1957 年首先证明的. 事实上，他证明了更强一点的结论：设 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 是点 P 关于凸 n 边形各边张角的平分线长，则

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^k \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} w_i^k. \qquad ⑧$$

王振与陈计又对 $0\leqslant k\leqslant 1$，分别在 1988 年与 1991 年两次加强了⑥，得到

$$M_k(R_i) \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right) M_k(w_i), \qquad ⑨$$

$$\left(2\cos\frac{\pi}{n}\right) M_k(R_i) \geqslant M_k(w_i + w_{i+1}), \qquad ⑩$$

其中 $w_{n+1}=w_1$，并对 $k>1$ 提出如下猜想：

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^k \geqslant \left(\sec\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} w_i^k + n\left(\sec^k\frac{\pi}{n} - \sec\frac{\pi}{n}\right) \prod_{i=1}^{n} w_i^{k/n}. \qquad ⑪$$

目前，我们只知道：当 $n=3, k\geqslant 2$ 时，⑪成立.

参考文献　[99]，[113，pp. 55～58]，[56，pp. 3～4]，[106，pp. 817～822]，[112，pp. 247～250]，[153，pp. 257～259]，[64，pp. 28～29]，[89].

（陈　计）

Erdös 极值问题（Extreme value problem of Erdös）　设 P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上一点，若直线 AP、BP、CP 分别与边 BC、CA、AB 相交于 D、E、F，求 $PD+PE+PF$ 的最大值.

这是 Erdös 在 1935 年提出的问题.

假定 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $b\geqslant AD\geqslant c, a\geqslant BE\geqslant c, a\geqslant CF\geqslant b$，

从而 $AD\leqslant a, BE\leqslant a, CF\leqslant a$，因此，

$$1=\sum\frac{PD}{AD}\geqslant\frac{1}{a}\sum PD,\qquad ①$$

当 P 在 BC 上时等号成立. 这个证法属于 G. R. Veldkamp.

陈计在 1994 年猜想 $\sum(PE\cdot PF)$ 的极大值点是最大边的中点.

参考文献 [100],[49,p. 681],[131,p. 38].

（陈　计）

Stroeker-Mascioni 不等式（Stroeker-Mascioni inequalities） 设 w 是 $\triangle ABC$ 的 Crelle-Brocard 角，则当 $r\leqslant-\frac{\ln 3}{\ln 2}, s\geqslant\frac{\ln 2-\ln 3}{\ln 4-\ln 3}$ 时，有

$$M_r(A,B,C)\leqslant 2w\leqslant M_s(A,B,C).\qquad ①$$

1981 年，Stroeker 对 $r=-2, s=-1$ 猜测①成立. 1986 年，Mascioni 首先证明了 $s=-1$ 时，①的第二个不等式成立，1987 年，他给出了本题的结论.

陈计与王振在 1994 年提出本题的一个推广方向：设 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内一点，设 $\angle PA_iA_{i+1}=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n;A_{n+1}=A_1)$，记 $r_0=-\frac{\ln 3}{\ln 2}, s=\frac{\ln 2-\ln 3}{\ln 4-\ln 3}, k_1=\frac{\ln 3}{\ln 2}, k_2=\frac{\ln 3-\ln 2}{\ln 2}$，猜测：当 $r<r_0, k\geqslant k_1+r_0/(r-r_0)$ 时，有

$$2M_k(\alpha)\geqslant M_r(A);\qquad ②$$

当 $s>s_0, k\leqslant k_2+s_0/(s-s_0)$ 时，有

$$2M_k(\alpha)\leqslant M_s(A).\qquad ③$$

曾登高与陈计在 1992 年证明了③在 $k=-\infty, s=1$ 时的情形：

$$\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\frac{n-2}{2n}\pi.\qquad ④$$

特别地，当 $n=3$ 时，④是第 32 届国际数学奥林匹克（1991 年，Sigtuna）的第 5 题.

参考文献　[142，pp. 619～620]，[146，pp. 98～101]，[148，pp. 35～44]，[86，p. 38]，[67，p. 41，p. 34].

（陈　计）

Erdös-Bager 不等式（Erdös-Bager inequality）　设点 D，E，F 分别位于$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上，α、β、γ、δ 分别是$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEF$ 的面积，则

$$\delta\geqslant\min\{\alpha,\beta,\gamma\}.\qquad ①$$

不等式①由 Debruner 在 1956 年发表，但按照 Rainwater 的说法，它可归之于 Erdös. Bager 首先给出了①的证明.

设 D、E、F 分别将 BC、CA、AB 分隔成 $x:x'$、$y:y'$、$z:z'$，且 $x+x'=y+y'=z+z'=1$. 再设$\triangle ABC$ 的面积为 1，则角上的三角形面积为 $y'z$、$z'x$、$x'y$，且

$$\begin{aligned}\delta&=1-y'z-z'x-x'y=xyz+x'y'z'\\&\geqslant 2\sqrt{xyzx'y'z'}=2\sqrt{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}\qquad ②$$

因此

$$\delta^2(\delta+\alpha+\beta+\gamma)\geqslant 4\alpha\beta\gamma.\qquad ③$$

因为 $f(u)=u^2(u+\alpha+\beta+\gamma)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数，又因为

$$\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\sqrt{\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}+\alpha+\beta+\gamma\right)\leqslant 4\alpha\beta\gamma,\qquad ④$$

所以

$$\delta \geqslant \sqrt{\frac{3\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \geqslant \min\{\alpha,\beta,\gamma\}. \quad ⑤$$

这个证明属于黄西灵.⑤的第一个不等式

$$\frac{3}{\delta^2} \leqslant \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} \quad ⑥$$

加强了 Mavlo 在 1987 年给出的

$$\frac{1}{\delta} \leqslant \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}. \quad ⑦$$

我们猜测：不等式

$$\delta \geqslant M_k(\alpha,\beta,\gamma) \quad ⑧$$

当且仅当 $k \leqslant \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 2}$ 时成立．陈计在 1994 年还发表了一个类似的猜想：当 $p \leqslant \dfrac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2}$ 时，有

$$M_p(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant \frac{\Delta}{4}, \quad ⑨$$

其中 Δ 是$\triangle ABC$ 的面积.

参考文献 [111],[123],[74,p.20],[150],[151,p.58],[83].

（陈　计）

Debrunner-Dresel 不等式（Debrunner-Dresel inequality） 设点 D、E、F 分别位于$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上，s_0、s_1、s_2、s_3 及 r_0、r_1、r_2、r_3 分别是$\triangle DEF$、$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的周长与内切圆半径，则

$$s_0 \geqslant \min(s_1,s_2,s_3), \quad ①$$

$$r_0 \geqslant \min(r_1,r_2,r_3). \quad ②$$

不等式①是 Debrunner 在 1956 年提出的猜想，它由 Dresel

在 1961 年证明；同时，Dresel 还给出了②.

为了证明这一结论，方便的做法是将$\triangle DEF$ 作为给定，定义角坐标 φ、ψ、θ 为$\triangle ABC$ 的边与$\triangle DEF$ 的相应边所成的角. 更确切地说，通过 D 平行于 FE 的直线反时针旋转，即与$\triangle DEF$ 同向，转过角 φ 以使它与 BC 重合，对于顺时针旋转，我们将给 φ 添一负号. 类似地，利用关于 E 与 F 的反时针旋转定义 ψ 与 θ.

设 D、E、F 为$\triangle DEF$ 的角，则 $\angle AFE = E+\theta$，$\angle AEF = F-\psi$. 对 φ、ψ、θ 的值域仅有的限制是$\triangle DEF$ 必须在$\triangle ABC$ 内. 因此所有的像 $E+\theta$，$F-\psi$ 的角必须为正，并且同一个三角形的任一对角的和必须小于两个直角. 对$\triangle DEF$ 应用正弦定理，得

$$\frac{DF+DE}{FE}=\frac{\sin E+\sin F}{\sin(E+F)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(E-F)}{\cos\frac{1}{2}(E+F)}.$$

类似地，在$\triangle AEF$ 中，有

$$\frac{AF+AE}{FE}=\frac{\cos\frac{1}{2}(E-F+\theta+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(E+F+\theta-\varphi)}.$$

因为所有的分母是正的，s_0-s_1 与下式有同样符号：

$$\begin{aligned}&\cos\frac{1}{2}(E-F)\cos\frac{1}{2}(E+F+\theta-\psi)\\&\quad-\cos\frac{1}{2}(E+F)\cos\frac{1}{2}(E-F+\theta+\psi)\\&=\frac{1}{2}\cos\left(E+\frac{\theta-\varphi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(F+\frac{\theta-\psi}{2}\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\cos\left(E+\frac{\theta+\psi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(F-\frac{\theta+\psi}{2}\right)\\&=\sin\frac{\psi}{2}\sin\left(E+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(F-\frac{\psi}{2}\right).\end{aligned}\qquad(*)$$

因此，有三种可能：

1° φ、ψ、θ 都为 0，这时△ABC 的边与△DEF 的边平行，D 是 BC 的中点，等等，$s_0=s_1=s_2=s_3$.

2° φ、ψ、θ 符号不全同，或至多一个为 0，于是在循环的次序 $\varphi\psi\theta\varphi$ 中必须有一对角，负的（或 0）紧接着正的，例如，$\psi\geqslant 0,\theta<0$（或 $\psi>0,\theta\leqslant 0$），于是 $s_0>s_1$.

3° φ、ψ、θ 符号全同且均不为 0，于是乘积 $\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ 是正的，表达式（$*$）与 s_0-s 有相同的符号，可以除以这乘积得

$$\sin E\cot\frac{\theta}{2}+\cos E-\sin F\cot\frac{\psi}{2}+\cos F.$$

再除以 $\sin E\sin F$，并注意到 $\cos E+\cos F>0$，我们看出有某个 $k_1>0$，使

$$k_1(s_0-s_1)>\csc F\cot\frac{\theta}{2}-\csc E\cot\frac{\psi}{2}.$$

加上关于 s_0-s_2 与 s_0-s_3 的类似结果，得

$$k_1(s_0-s_1)+k_2(s_0-s_2)+k_3(s_0-s_3)>0,$$

因此 s_0 至少大于一个 s_i.

由于
$$r_0\left(\cot\frac{E}{2}+\cot\frac{F}{2}\right)=EF$$
$$=r_1\left(\cot\frac{E+\theta}{2}+\cot\frac{F-\psi}{2}\right),$$

因此 r_0-r_1 与

$$\cot\frac{E+\theta}{2}+\cot\frac{F-\psi}{2}-\cot\frac{E}{2}-\cot\frac{F}{2}$$
$$=\sin\frac{\psi}{2}\csc\frac{F}{2}\cos\frac{F-\psi}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\csc\frac{E}{2}\csc\frac{E+\theta}{2}$$

有相同的符号.

情况 1°与 2°的证明从略. 在情况 3°中,φ、ψ、θ 或者全正或者全负,这时 r_0-r_1 与下式相同:

$$\csc\frac{F}{2}\csc\frac{\theta}{2}\sin\frac{E+\theta}{2}-\csc\frac{E}{2}\csc\frac{\psi}{2}\sin\frac{F-\psi}{2}$$
$$=\left(\sin\frac{E}{2}\cot\frac{\theta}{2}+\cos\frac{E}{2}\right)\csc\frac{F}{2}-\left(\sin\frac{F}{2}\cot\frac{\psi}{2}-\cos\frac{E}{2}\right)\csc\frac{F}{2}$$
$$>\left(\csc^2\frac{F}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\csc^2\frac{F}{2}\cot\frac{\psi}{2}\right)\times\sin\frac{E}{2}\sin\frac{F}{2}.$$

因为括号中的项加上类似的项时互相抵消,我们看出有正数 k_i 使得

$$k_1(r_0-r_1)+k_2(r_0-r_2)+k_3(r_0-r_3)>0,$$

所以 r_0 至少大于一个 r_i.

注意在情况 3°中,我们的证明并未告诉我们是否有同一个 i 满足 $s_0>s_i$ 与 $r_0>r_i$.

上述证明属于 Dresel.

我们猜测:当 $k\leqslant\dfrac{\ln2-\ln3}{\ln2}$ 时,有

$$s_0\geqslant M_k(s_1,s_2,s_3); \tag{3}$$

与此题有关的一个结论是:

$$\min\{s_1,s_2,s_3\}<\frac{2}{3}s, \tag{4}$$

其中 s 是△ABC 的周长;关于△ABC 内切圆半径,陈计在 1994 年发表猜测:当 $p\leqslant\dfrac{\ln3-\ln2}{\ln2}$ 时,有

$$M_p(r_1,r_2,r_3)\leqslant\frac{r}{2}. \tag{5}$$

参考文献 [111],[116,pp. 97~99].

（陈　计）

Neuberg-Pedoe 不等式（Neuberg-Pedoe inequality）　设 a_1、a_2、a_3 与 Δ_a 和 b_1、b_2、b_3 与 Δ_b 分别是 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长与面积，则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)$$
$$+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\geqslant 16\Delta_a\Delta_b,$$

当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

1891 年，J. Neuberg 提出了该不等式，1942 年，D. Pedoe 重新发现和证明了这个不等式，见 Proc. Cambridge Philos. Soc.，38(1942)，357～358，及 Math. Gaz. 26 (1942)，202～208. 1963 年，D. Pedoe 还把这个不等式作为问题 E1562 提供给 *Amer. Math.* Monthly 70(1963)，92 and 1012.

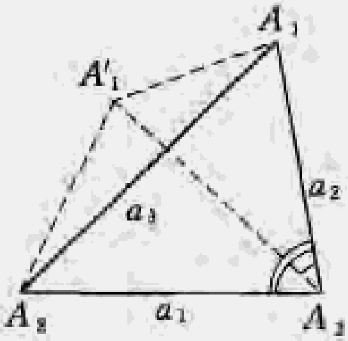


图 4-204

以 A_2A_3 为一边，在与点 A_1 的同侧作 $\triangle A_1'A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$，则

$$A_1'A_3=\frac{a_1b_2}{b_1},\angle A_1'A_3A_1=\angle A_3-\angle B_3.$$

根据余弦定理，得

$$A_1A_1'^2=a_2^2+\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\right)^2-2a_2\cdot\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\right)\cos(A_3-B_3)\geqslant 0,$$

从而有

$$a_2^2b_1^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2(\cos A_3\cos B_3+\sin A_3\sin B_3)\geqslant 0.$$

但 $2a_1a_2\cos A_3=a_1^2+a_2^2-a_3^2, 2b_1b_2\cos B_3=b_1^2+b_2^2-b_3^2$，$a_1a_2\sin A_3=2\Delta_a, b_1b_2\sin B_3=2\Delta_b$，所以有

$$a_2^2b_1^2+a_1^2b_2^2-\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2-a_3^2)(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\geqslant 8\Delta_a\Delta_b,$$

即

$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\geqslant 16\Delta_a\Delta_b$，显然，当且仅当 A_1'与 A_1 重合，也即 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

当 $b_1=b_2=b_3$ 时，$\Delta_b=\frac{\sqrt{3}}{4}b_1^2$，于是 Neuberg-Pedoe 不等式就成为 Weitzenböck 不等式：$a_1^2+a_2^2+a_3^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta_a$，当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形时等号成立.

(1) 该不等式的几种加强形式.

1980 年，程龙在《数学通报》11(1980)上把它加强为

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$\geqslant 16\Delta_a\Delta_b+\frac{2}{3}\sum(a_1b_2-a_2b_1)^2,$$

当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

1983 年，彭家贵、常庚哲在《初等数学论丛》第 6 辑上，把它加强为

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$\geqslant 8\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\Delta_a^2+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\Delta_b^2\right),$$

当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

显然，应用算术-几何平均值不等式，由这个不等式即可得到 Neuberg-Pedoe 不等式.

1986 年，陈云烽在《初等数学论丛》第 9 辑上，把它加强为

$$\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$
$$\geqslant 16\Delta_a\Delta_b+\frac{16\sum(a_1^2\Delta_b-b_1^2\Delta_a)^2+2\sum(a_1^2b_2^2-a_2^2b_1^2)^2}{\sum a_1^2\cdot\sum b_1^2},$$

当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

1987 年,安振平在《数学通讯》6(1987)上把它加强为

$$\begin{aligned}&\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\ \geqslant\ &16\Delta_a\Delta_b+\sum(a_1b_2-a_2b_1)(a_1b_3-a_3b_1),\end{aligned}$$

这里 $\sum(a_1b_2-a_2b_1)(a_1b_3-a_3b_1)\geqslant 0$,其中当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$ 时等号成立.

1988 年,陈计、何明秋在《数学通讯》1(1988)上,又把它加强为

$$\begin{aligned}&\sum a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)\\ \geqslant\ &16\Delta_a\Delta_b+2(a_1b_2-a_2b_1)^2,\end{aligned}$$

当且仅当 $A_3=B_3$ 时等号成立.

(2) 该不等式的推广.

① 指数推广. 1983 年,高灵在《厦门数学通讯》3(1983)上,把它推广为:若 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$,$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$,$\alpha$ 为任意实数,则

$$\sum a_1^\alpha(-b_1^\alpha+b_2^\alpha+b_3^\alpha)\geqslant 3\left(\frac{16}{3}\Delta_a\Delta_b\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

当且仅当 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 都是正三角形时等号成立.

1985 年,萧振纲在《厦门数学通讯》3(1985)上指出,当 $\alpha=2^{-n}$(n 为非负整数)时,上述推广中条件 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$ 和 $b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$ 可以取消.

② 加权推广. 1985 年,杨克昌在《初等数学论丛》第 8 辑上,把它推广为:若实数 k_1、k_2、k_3 满足 $k_1+k_2+k_3=\sqrt{-\sum k_1k_2}>0$,则

$$\begin{aligned}&b_1^2(k_1a_1^2+k_2a_2^2+k_3a_3^2)+b_2^2(k_3a_1^2+k_1a_2^2+k_2a_3^2)\\ &+b_3^2(k_2a_1^2+k_3a_2^2+k_1a_3^2)\end{aligned}$$

$$\geqslant 16(k_1+k_2+k_3)\Delta_a\Delta_b,$$

当且仅当 $b_1^2:(\lambda_2+\lambda_3)=b_2^2:(\lambda_3+\lambda_1)=b_3^2:(\lambda_1+\lambda_2)$ 时等号成立，这里 $\lambda_1=k_1a_1^2+k_2a_2^2+k_3a_3^2$，$\lambda_2=k_3a_1^2+k_1a_2^2+k_2a_3^2$，$\lambda_3=k_2a_1^2+k_3a_2^2+k_1a_3^2$. 显然，当取 $k_1=-1$，$k_2=k_3=1$ 时，就得到 Neuberg-Pedoe 不等式.

③ 多边形与高维空间推广. 1988 年，陈计、马援在《数学通讯》5(1988)上给出两种四边形推广. 设 a_1、a_2、a_3、a_4 和 S_a 与 b_1、b_2、b_3、b_4 和 S_b 分别是四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的边长和面积，并设 $H=a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_3(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)$，则

$$\text{(i) } H+4\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}a_1a_2a_3a_4+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}b_1b_2b_3b_4\right)\geqslant 16S_aS_b,$$

$$\text{(ii) } H+4[(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)]^{\frac{1}{2}}-4a_1a_2a_3a_4-4b_1b_2b_3b_4\geqslant 16S_aS_b,$$

当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形时等号成立.

1985 年，王坚在《数学通讯》2(1985)上，把它推广到 n 边形的情形. 设两个 n 边形的边长序列是 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，面积为 S_a 和 S_b，并设 $H(\alpha,\beta)=\sum b_1^\beta(-a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)$. 若序列 a 和 b 一个单调不增另一个单调不减，且 $\alpha\cdot\beta\geqslant 1$，则有

$$H(\alpha,\beta)\geqslant n(n-2)\left[\frac{4}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right]^{\frac{\alpha+\beta}{2}}S_a^{\frac{\alpha}{2}}S_b^{\frac{\beta}{2}},$$

当 $n=3$ 时，只要 $\alpha\cdot\beta>0$.

1980 年，杨路、张景中在《数学学报》5(1980)上，把它推广到

高维空间,即设 A 和 B 是两个 n 维单形,$V(A)$、$V(B)$分别表示 A、B 的体积.设 A 的顶点是 A_1、A_2、…、A_{n+1},B 的顶点是 B_1、B_2、…、B_{n+1},且 $a_{ij}=|A_iA_j|$,$b_{ij}=|B_iB_j|$.以 S_i 表示 $\{B_1,B_2,\cdots,B_{n+1}\}/B_i$ 所成的 $n-1$ 维单形之面积,θ_{ij}表示 S_i、S_j 之夹角,则有

$$\sum_{i<j} a_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} \geqslant n^3 V(A)^{\frac{2}{n}} V(B)^{2-\frac{2}{n}}.$$

当 $n=2$ 时,应用余弦定理,由上述不等式即得 Neuberg-Pedoe 不等式.

参考文献 [40,pp.352～353],[30,pp.110～111],[16,pp.101～107,pp.110～112].

(郑君文)

Oppenheim 不等式(Oppenheim inequality) 设$\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别是 a_1、a_2、a_3 和 b_1、b_2、b_3,它们的面积分别记为 Δ_1 和 Δ_2.定义

$$c_i=(a_i^2+b_i^2)^{\frac{1}{2}},i=1,2,3.$$

则 c_1、c_2、c_3 是一个三角形的三条边,并且这个三角形的面积 Δ 与外接圆半径 R 满足:

$$\Delta \geqslant \Delta_1+\Delta_2, \quad ①$$

$$R^2 \leqslant R_1^2+R_2^2. \quad ②$$

不等式①是 Oppenheim 在 1963 年发表的结果,②则是他在 1974 年发表的.

将 Oppenheim1965 年的不等式

$$(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2)^2 \geqslant 16\Delta(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu) \quad ③$$

与 Kooi 不等式

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2R^2 \geqslant \lambda_2\lambda_3a^2+\lambda_3\lambda_1b^2+\lambda_1\lambda_2c^2 \quad ④$$

分别用于$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$，得

$$\sum \lambda a_1{}^2 \geqslant 4\Delta_1 \sqrt{\sum \mu\nu}, \quad ⑤$$

$$\sum \lambda b_1{}^2 \geqslant 4\Delta_2 \sqrt{\sum \mu\nu}, \quad ⑥$$

$$(\sum \lambda_1)^2 R_1{}^2 \geqslant \sum \lambda_2\lambda_3 a_2{}^2, \quad ⑦$$

$$(\sum \lambda_1)^2 R_2{}^2 \geqslant \sum \lambda_2\lambda_3 b_1{}^2. \quad ⑧$$

然后，将⑤与⑥，⑦与⑧分别两边相加，得

$$\sum \lambda a^2 \geqslant 4(\Delta_1 + \Delta_2) \sqrt{\sum \mu\nu}, \quad ⑨$$

$$(\sum \lambda_1)^2 (R_1{}^2 + R_2{}^2) \geqslant \sum \lambda_2\lambda_3 a^2. \quad ⑩$$

现在，我们分别在⑨与⑩中分别取$\lambda = b^2 + c^2 - a^2, \lambda_1 = a^2(b^2 + c^2 - a^2)$，等等，得

$$2\sum b^2c^2 - \sum a^4 \geqslant 4(\Delta_1 + \Delta_2) \sqrt{2\sum b^2c^2 - \sum a^4}, \quad ⑪$$

$$(2\sum b^2c^2 - \sum a^4)^2 (R_1{}^2 + R_2{}^2) \geqslant a^2b^2c^2(2\sum b^2c^2 - \sum a^4), \quad ⑫$$

所以

$$\Delta_1 + \Delta_2 \leqslant \frac{1}{4} \sqrt{2\sum b^2c^2 - \sum a^4} = \Delta, \quad ⑬$$

$$R_1{}^2 + R_2{}^2 \geqslant \frac{a^2b^2c^2}{2\sum b^2c^2 - \sum a^4} = R^2. \quad ⑭$$

上述证法属于王振与陈计.

1981 年，杨路与张景中将不等式①与②推广到n维 Euclid 空间：设$\alpha = \{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$，$\beta = \{B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}\}$是$n$维 Euclid 空间中的两个点集，则必存在一个点集$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}\}$，使得

$$|c_i - c_j|^2 = |A_i - A_j|^2 + |B_i - B_j|^2, i, j = 1, 2, \cdots, n + 1.$$

则若用 v_1、v_2、v 及 R_1、R_2、R 分别表示 α、β、C 所生成的 n 维单形 $\sum_\alpha$、$\sum_\beta$、$\sum_C$ 的体积与外接球（或覆盖球）半径，则

$$v^{\frac{2}{n}} \geqslant v_1^{\frac{2}{n}} + v_2^{\frac{2}{n}}, \tag{15}$$

$$R^2 \leqslant R_1^2 + R_2^2. \tag{16}$$

1991 年，陈计将①推广成：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,F_1$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n,F_2$ 分别是 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 的边长和面积；对 $p \geqslant 1$，定义

$$c_i = (a_i^p + b_i^p)^{\frac{1}{p}}, i = 1,2,\cdots,n,$$

则 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是一个 n 边形 $C_1C_2\cdots C_n$ 的边长；并且当 $2 \leqslant p \leqslant 4$ 时，这个多边形的最大面积 F 满足不等式

$$F^{\frac{p}{2}} \geqslant F_1^{\frac{p}{2}} + F_2^{\frac{p}{2}}. \tag{17}$$

猜测在 $1 \leqslant p < 2$ 时，上式也成立. Carroll 在 1982 年的结果表明这一猜想在 $n=3$ 和 4 时是成立的. 对 $p=1$ 的三角形内切圆半径，王振与陈计在 1994 年建立了

$$r \geqslant r_1 + r_2, \tag{18}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta} = \sqrt{sr} &\geqslant \sqrt{(s_1+s_2)(r_1+r_2)} \\ &\geqslant \sqrt{s_1r_1} + \sqrt{s_2r_2} = \sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2},\end{aligned} \tag{19}$$

这是第 43 届普特南数学竞赛（1982）的一道试题，它是 Oppenheim 在 1971 年给出的.

参考文献　[121]，[136，pp. 257～263]，[87，pp. 27～32]，[50，pp. 1～3]，[51，pp. 63～70]，[60，pp. 17～20].

（陈　计）

Sondat 基本不等式(Sondat fundamental inequality)　以 s 为半周长、R 为外接圆半径、r 为内切圆半径的三角形存在的充分必要条件是

$$s^4 - 2s^2(2R^2 + 10Rr - r^2) + r(4R + r)^3 \leqslant 0. \qquad ①$$

这是 Sondat 在 1890 年发表的结果，它与 Ramus-Rouche 基本不等式等价. Blundon 在 1965 年重新发现了上述不等式，并让人们普遍认识到其重要性. 所以不少作者称其为 Blundon 基本不等式.

1952 年，Petrov 给出了三角形存在性的四十余个充要条件. 例如，以 a 为边长，w_a 为内角平分线，r 为内切圆半径的三角形存在的充要条件是：对 $2R \geqslant a > 2r$，有

$$4a^2r/(a^2 - 4r^2) \leqslant 2R + \sqrt{4R^2 - a^2}. \qquad ②$$

由正弦定理 $a = 2R\sin A$，②等价于：以 A 为内角，R、r 为外接圆与内切圆半径的三角形存在的充要条件是：对 $0 < A < \pi, R > r$，有

$$\sin\frac{A}{2}\left(1 - \sin\frac{A}{2}\right) \geqslant \frac{r}{2R}. \qquad ③$$

这是第 26 届波兰数学竞赛第三试(1975)的第 5 题.

参考文献　[95]，[123，pp. 615～626]，[110，pp. 77～92].

（陈　计）

Erdös-Klamkin 不等式(Erdös-Klamkin inequality)　设 A、B、C 为一个三角形的内角，则当 $\lambda \geqslant 2, 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$ 时，存在一个以

$$\cos^\mu\frac{A}{\lambda}, \cos^\mu\frac{B}{\lambda}, \cos^\mu\frac{C}{\lambda}$$

为边的三角形.

这是 Erdös 与 Klamkin 在 1973 年发表的一个结论，它统一了

两个常见的特例：(i) $\lambda=2,\mu=2$，(ii) $\lambda=2,\mu=1$. 实际上，这一命题对 $\lambda\geqslant 2, 0\leqslant\mu\leqslant\lambda^2/2$ 也成立.

不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$，我们只需证

$$\cos^{\lambda^2/2}\frac{A}{\lambda}+\cos^{\lambda^2/2}\frac{B}{\lambda}\geqslant\cos^{\lambda^2/2}\frac{C}{\lambda}. \qquad ①$$

因为 $\max\cos\dfrac{C}{\lambda}=1, \min\left\{\cos^{\lambda^2/2}\dfrac{A}{\lambda}+\cos^{\lambda^2/2}\dfrac{B}{\lambda}\right\}$ 仅在 $C=0$ 才可达到. 所以只需证：对 $A+B=\pi$，

$$\cos^{\lambda^2/2}\frac{A}{\lambda}+\cos^{\lambda^2/2}\frac{B}{\lambda}\geqslant 1. \qquad ②$$

因为 $\lambda=2$ 时，②左边为 1. 所以只需证 $y(\lambda)=\cos^{\lambda^2/2}\dfrac{A}{\lambda}(0\leqslant A\leqslant\pi)$ 在 $\lambda\geqslant 2$ 时单调升. 因为

$$\frac{y'(\lambda)}{y(\lambda)}=\frac{A}{2}\mathrm{tg}\,\frac{A}{\lambda}+\lambda\ln\cos\frac{A}{\lambda}=\frac{\lambda}{2}z(x), \qquad ③$$

其中 $x=\dfrac{A}{\lambda}, z(x)=x\,\mathrm{tg}\,x+2\ln\cos x$. 因为

$$z'(x)=x\sec^2 x-\mathrm{tg}\,x=(2x-\sin 2x)/(2\cos^2 x)\geqslant 0, \qquad ④$$

所以 $z(x)\geqslant z(0)$，即 $y'(\lambda)\geqslant 0$.

求出使命题对 $\lambda\geqslant 2, 0\leqslant\mu\leqslant f(\lambda)$ 成立的最大 $f(\lambda)$，至今仍未解决.

参考文献 [134, pp. 117～118], [30, pp. 145～146], [71, pp. 98～99].

（陈 计）

麦比乌斯-蓬佩尤定理（Möbius-Pompeiu theorem） 若 A、B、C、D 是平面上任意四点，记 $a=BC, b=CA, c=AB, R_1=DA, R_2=DB, R_3=DC$，则存在一个以 aR_1、bR_2、cR_3 为边的三角形.

这是 1852 年 Möbius 证明的定理，Neuberg 在 1891 年又重新发现. 其特例"对正三角形 ABC，R_1、R_2、R_3 可构成三角形"在 1936 年又被蓬佩尤(D. Pompeiu，1873～1954)发现，并广为流传. 因此，许多作者将本定理称为 Neuberg-Pompeiu 定理.

用复数 z_1、z_2、z_3、z_4 表示点 A，B，C，D，则由恒等式

$$(z_1 - z_4)(z_2 - z_3) + (z_2 - z_4)(z_3 - z_1) + (z_3 - z_4)(z_1 - z_2) = 0 \quad ①$$

移项后取模即得

$$cR_3 + aR_1 \geqslant bR_2, \quad ②$$

等等. 从而 aR_1、bR_2、cR_3 可构成一个三角形. 所构成的三角形退化当且仅当 A、B、C、D 四点共圆(此时即为著名的托勒密定理).

本题及其特例蓬佩尤定理有着众多的推广. 例如，1937 年 Bratu 发现对空间四点，本题结论仍然成立. 又如，1939 年 Pompeiu 证明了：P 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 平面上一点，则 PA_1，PA_2，…，PA_n 是一个 n 边形的边长.

参考文献　[94，pp. 41～54]，[96，pp. 81～82]，[101，pp. 6～7]，[102，pp. 263～269]，[104，pp. 29～34].

（陈　计）

Gal-Bankoff 不等式(Gal-Bankoff inequality)　设 P 为正方形 $A_1A_2A_3A_4$ 所在平面上的任意一点，则

$$\sum_{i=1}^{4} PA_i \geqslant (1 + \sqrt{2}) \max_i PA_i + \min_i PA_i,$$

当 P 点在正方形的外接圆上时等号成立.

该不等式见 I. S. Gal-L. Bankoff，*Problem* E1308，*Amer. Math*. Monthly 65(1958)，205 and 701.

不妨假设诸 PA_i 中 PA_2 为最大，PA_4 为最小，则

$$PA_1 \cdot A_2A_3 + PA_3 \cdot A_1A_2 \geqslant PA_2 \cdot A_1A_3,$$

当且仅当 A_1、P、A_3、A_2 四点共圆时等号成立.

因为 $A_1A_2 = A_2A_3$，$A_1A_3 = \sqrt{2}A_1A_2$，所以 $PA_1 + PA_3 \geqslant \sqrt{2}PA_2$. 把上式两边同加上 PA_2 与 PA_4，即得

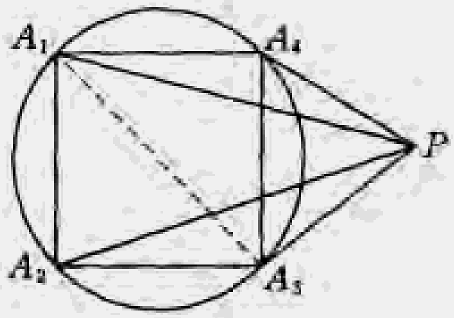


图 4－205

$$PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 \geqslant (1 + \sqrt{2})PA_2 + PA_4,$$

当 P 点在正方形的外接圆上时等号成立.

I. S. Gal 把本不等式推广到任意正多边形的情形，如设 P 为正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 所在平面上的任意一点，则

$$\sum_{i=1}^{6} PA_i \geqslant (2 + \sqrt{3}) \max_i PA_i + \min_i PA_i,$$

当 P 点在正六边形的外接圆上时等号成立.

参考文献 ［40，p. 361］，［30，p. 163］.

（郑君文）

刘徽不等式 设 S 是圆 O 的面积，S_n 和 S_{2n} 分别是它的内接正 n 边形和内接正 $2n$ 边形的面积，则 $S_{2n} < S < 2S_{2n} - S_n$. 如果在单位圆中，则 $S_{2n} < \pi < 2S_{2n} - S_n$.

该不等式是刘徽注释《九章算术》在证明圆面积公式的过程中提出并证明的，详见割圆求积.

1979 年，俞文魮和陈开明在《数学教学》2(1979)上加强了上述不等式，得到

$$\frac{4}{3}S_{2n} - \frac{1}{3}S_n < \pi < \frac{1}{3}S_{2n} + \frac{2}{3}T_{2n},$$

其中 T_{2n} 是圆 O 的外切正 $2n$ 边形的面积.

参考文献 [16,pp. 99～100],[49,p. 435].

(郑君文)

一个 Erdös 不等式(An Erdös inequality) 设 ON 为垂直于 $\odot O$ 弦 AB 的半径,它与 AB 相交于点 M,P 为优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上除位于 ON 所在直径上外的任意一点. 若 PM、PN 各交 $\odot O$ 于 Q、弦 AB 于 R,则 $MQ < RN$.

这个几何不等式,是 P. Erdös 于 1975 年在私人通信中提出的,下面第一个解答属于 P. Erdös,第二个解答属于 Peter Crippen.

(1) 设 $P'N$ 是 PN 关于直径 NON' 反射(轴对称变换)的像. 因为 $ON \perp AB$,所以这个直线反射把点 R 变换为 AB 与 $P'N$ 的交点 R',且 $NR' = NR$. 又 AB 与 $P'P$ 都垂直于直径 NON',所以它们互相平行,从而 $\angle NP'P = \angle NR'M$. 因为 $\angle NP'P = \angle NQP$,所以 $\angle NR'M = \angle NQM$,故 Q、N、M、R' 四点共圆.

因为 $R'N$ 所对的圆周角 $\angle R'MN$ 为直角,所以它是直径,而 MQ 所对圆周角 $\angle QNM$ 小于直角,因此弦 MQ 小于直径 $R'N$,即 $MQ < RN$.

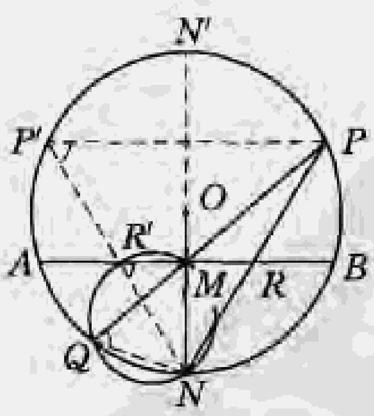


图 4-206

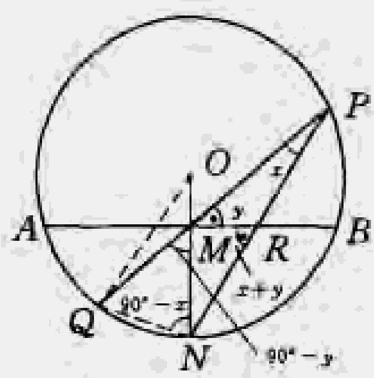


图 4-207

(2) 令 x 表示 $\angle QPN$,则 $\angle QON = 2x$,所以等腰三角形 OQN 的底角 $\angle OQN = \angle ONQ = 90° - x$. 又令 y 表示 $\angle PMR$,则 $\angle NRM = x + y$,$\angle QMN = 90° - y$,所以 $\angle NQM = x + y$.

在$\triangle QMN$中,有

$$\frac{MQ}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{MN}{\sin(x+y)},$$

在$\triangle NMR$中,有

$$\frac{MN}{\sin(x+y)} = \frac{RN}{1}.$$

但$\sin(90^\circ - x) < 1$,

所以$QM < RN$.

参考文献 [37,pp. 96~98].

(郑君文)

参考文献

1 钱宝琮校点.算经十书.北京:中华书局,1963

2 沈括著.梦溪笔谈选注.上海:上海古籍出版社,1978

3 秦九韶著.数书九章.北京:商务印书馆,1937

4 李冶著,白尚恕译.测圆海镜今译.济南:山东教育出版社,1985

5 吴文俊主编.九章算术与刘徽.北京:北京师范大学出版社,1982

6 严敦杰著.中学数学课程中的中算史材料.北京:人民教育出版社,1984

7 李逢平著.中国古算题选解.北京:科学普及出版社,1985

8 钱宝琮主编.中国数学史.北京:科学出版社,1964

9 梁宗巨.世界数学史简编.沈阳:辽宁人民出版社,1980

10 吴文俊主编.世界著名科学家传记.数学家(Ⅱ).北京:科学出版社,1992

11 吴文俊主编.世界著名科学家传记.数学家(Ⅳ).北京:科学出版社,1992

12 谷超豪主编.数学词典.上海:上海辞书出版社,1992

13 梁宗巨主编.数学家传略辞典.济南:山东教育出版社,1989

14 梁绍鸿编.初等数学复习及研究(平面几何).北京:高等教育出版社,

1958
15 胡杞，周春荔编．初等几何研究基础教程．北京：北京师范大学出版社，1989
16 李炯生，黄国勋主编．中国初等数学研究．北京：科学技术文献出版社，1992
17 高希尧编．数海钩沉——世界数学名题选辑．西安：陕西科学技术出版社，1982
18 王长烈，朱一鸣编．世界数学名题趣题选．长沙：湖南教育出版社，1988
19 陆乃超，袁小明编著．世界数学名题选．上海：上海教育出版社，1989
20 [法]J．阿达玛著．初等数学教程·几何（平面部分）．上海：上海科学技术出版社，1980
21 Casey 著．近世几何学初编．北京：商务印书馆，1958
22 Roger A. Johnson 著．近世几何学．北京：商务印书馆，1955
23 林鹤一著．初等几何学作图不能问题．北京：商务印书馆，1955
24 [美]R．柯朗，H．罗宾著．数学是什么?．北京：科学出版社，1985
25 [美]G．波利亚著．数学与猜想（第一卷）．北京：科学出版社，1984
26 [德]汉斯·拉德梅切，奥托·托普利茨著．数学欣赏．北京：北京出版社，1981
27 H. S. M．考克塞特，S. L．格雷策著．几何学的新探索．北京：北京大学出版社，1986
28 R．亨斯贝尔格著．数学中的智巧．北京：北京大学出版社，1985
29 [美]R．洪斯贝格尔著．数学瑰宝（第1辑）．成都：四川教育出版社，1985
30 [荷兰]O. Bottema 等著，单墫译．几何不等式．北京：北京大学出版社，1991
31 [德]H．德里著．100个著名初等数学问题——历史和解．上海：上海科学技术出版社，1982
32 [苏]B. Д．契斯佳可夫著．初等数学古代名题集．北京：科学普及出版社，1984
33 [美]M．克莱因著．古今数学思想（第一册）．上海：上海科学技术出版社，1982

34 [美]M. 克莱因著. 古今数学思想(第三册). 上海：上海科学技术出版社，1982
35 [美]H. 伊夫斯著. 数学史概论. 太原：山西人民出版社，1986
36 [美]A. 吉特尔曼特著. 数学史. 北京：科学普及出版社，1987
37 Ross Honsberger. *Mathematical Morsels*. *The Dolciani Mathematical Expositions* No. 3, Published and Distributed by The Mathematical Association of America，1978
38 岩田至康編. 幾何学大辞典(第1卷). 槙書店，1979
39 岩田至康編. 幾何学大辞典(第3卷). 槙書店，1979
40 岩田至康編. 幾何学大辞典(第5卷). 槙書店，1980
41 单墫. 几何不等式. 上海：上海教育出版社，1980
42 单墫. 数学竞赛研究教程. 南京：江苏教育出版社，1993
43 朱再宇，陈计. 关于锐角三角形的一个不等式：中国中学数学教师优秀论文集(第二卷). 乌鲁木齐：新疆少儿出版社，1995
44 G. 波利亚，G. 舍贵. 数学分析中的问题和定理(第二卷). 上海：上海科学技术出版社，1985
45 [美]Ivan Niven. 极大极小. 成都：四川教育出版社，1988
46 J. Wolstenholme. *A Book of Mathematical Problems on Subjects Included in the Cambridge Course*. London and Cambridge，1867
47 H. W. Guggenheimer. *Plane Geometry and Its Groups*. San Francisco，Cambridge，London，Amsterdam，1967
48 A. W. Marshall and I. Olkin. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*，Academic Press，1979
49 D. S. Mitrinović，J. E. Pečarić and V. Volenec，*Recent Advances in Geometric Inequalities*. Kluwer Academic Publishers，1989
50 杨路，张景中. 关于 Alexander 的一个猜想. 科学通报，1981年第1期
51 杨路，张景中. 高维度量几何的两个不等式. 成都科技大学学报，1981年第4期
52 陈计. 反向 Fermat 问题的推广. 数学通讯，1984年第5期
53 苏化明. 几个关于三角形的不等式链. 教学与研究(中学数学版)，1987年第3期

54 安振平.关于一个三角形不等式的再讨论.咸阳师专学报(自然科学版),1989年第2期
55 陈计,楼红卫,王振,万惠华.征解问题30.数学通讯,1989年第3期,43;1989年第11期,44;1992年第9期,39~41
56 陈计,王振.关于Erdös和Fejes Tóth的猜想.数学通讯,1989年第5期
57 单墫,刘亚强.介绍一个几何不等式.中等数学,1989年第6期
58 陈计,刘竞欧.Cotalan不等式的指数推广.数学通讯,1989年第11期
59 陈计,余刚,王振,万惠华,杨任尔.征解问题55.数学通讯,1990年第3期,17;1991年第10期,44;1993年第6期,41~42
60 陈计.*A generalization of Oppenheim's area inequality for Polygons*.宁波大学学报(理工版),1991年第1期
61 D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Vdenec, JiChen. *Addenda to the monograph "Recent Adances in Geometric Inequalities"*, Part I.宁波大学学报(理工版),1991年第2期
62 杨任尔,单墫,M. E. Kuczma,陈计.征解问题68.数学通讯,1991年第5期
63 王振.征解问题43的评注(Ⅱ).数学通讯,1991年第6期
64 王振,陈计.关于Erdös-Mordell不等式.数学通讯,1991年第7期
65 安振平.征解问题74*.数学通讯,1991年第8期
66 王振,郭兴甫,黄军华,陈计.征解问题87.数学通讯,1992年第3期,40;1994年第4期,37~38
67 曾登高,陈计.征解问题28的评注(Ⅰ).数学通讯,1992年第4期
68 陈计.关于Gerber不等式的加强.福建中学数学,1992年第5期
69 陈计,Janous不等式的一个加强.福建中学数学,1992年第6期
70 陈计.关于三角形的不等式簇.中学教研(数学版),1992年第10期
71 陈计.*A generization of the Erdö s-Klamkin inequality*.宁波大学学报(理工版),1993年第1期
72 王振,陈计.三角形角平分线的平方和.中学教研(数学版),1993年第1期
73 狄继东.Janous猜想的又一简证.数学通讯,1993年第4期
74 黄西灵.Erdös-Bager不等式的再加强.中学教研(数学版),1993年第7

期
75 刘健.三个新的三角形不等式.教学月刊(中学理科版),1993年第8期
76 陈计.征解问题1的评注(Ⅲ).数学通讯,1993年第11期
77 陈计.数学竞赛训练题75及其注记.数学通讯,1994年第2期,34;1994年第3期,34
78 陈计.Bager第二图的改进.宁波大学学报(理工版),1994年第2期
79 陈国阳.关于三角形中线长的一个不等式.中学教研(数学版),1994年第4期
80 成萱.关于三角形角平分线的一个猜想的证明.中学数学(武汉),1994年第5期
81 陈计.征解问题137'.数学通讯,1994年第7期
82 杨学枝.关于三角形角平分线的两个不等式.中学数学(武汉),1994年第7期
83 陈计.数学竞赛训练题86.数学通讯,1994年第7期,33;1994年第8期,36
84 陈计.一个几何不等式的别证.初中生数学学习,1994年第7、8期
85 王振,陈计.两个猜想不等式的加强及其他.中学教研(数学版),1994年第7、8期
86 陈计,王振.征解问题28的评注(Ⅱ).数学通讯,1994年第8期
87 王振,陈计.数学竞赛(18).长沙:湖南教育出版社,1994
88 陈计.数学竞赛(19).长沙:湖南教育出版社,1994
89 王振,陈计.一个三角不等式的简证及应用.宁波大学学报(理工版),1995年第1期
90 石世昌,陈计.三元二次初等对称平均对幂平均的分隔及其应用.成都大学学报(自然科学版),1995年第2期
91 陈计.关于四边形旁切圆半径的不等式.福建中学数学,1995年第3期
92 陈计.一期一题.初中生数学学习,1995年第3期,1995年第4期
93 王振.征解问题57注记(Ⅳ).数学通讯,1995年第6期
94 A. F. Möbius, über eine Methode, um von Relotionen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sötzen der Planimetrie zu gelangen, Ber. Verhandl. Königl. Söchs. Ges. Wiss. Leipzig Math.

Phys. Cl., 1852

95 P. Sondat and E. Lemoine. *Question* 1 593. *Nouv. Ann. Math.*, 9(1890), 49 and 10(1891), 43～47

96 J. Neuberg. *Sur Les quadrangles Complets. Mathesis*, (2)1(1891).

97 E. Catalan. *Educotional Times*, N. S. 10(1906)

98 Tsurichi Hayashi(林鹤一). *Two theorems on complex numbers*. 东北数学杂志(仙台), 4(1913～1914)

99 P. Erdös, L. J. Mordell and D. F. Barrow. *Advanced Problem* 3 740. *Amer. Math. Monthly*, 42(1935), 396 and 44(1937), 252～254

100 P. Erdös. *Problem* 3 746. *Amer. Math. Monthly*, 42(1935), 454 and 44(1937), 400

101 D. Pompeiu. *Une identité entre nombres complexes et un théoréme de géométrie élementaive. Bull. Math. Phys. École Polytechn. Bucarest*, 6 (1936)

102 G. Bratu. *Sur le trapèze rectangle. Mathematica(cluj)*, 13(1937)

103 F. Ryžkov. *Mathematika V škole*. 1939, No. 1, 80 and No. 4, 73

104 D. Pompeiu. *La géométrie et les imaginaires. démonstration de quelques théorems élementaires*, *Bull. Math. Phys. École Polytechn. Bucarest*, 11(1939)

105 C. Ciamberlini. *Sulla condizione necessaría e sufficiente affinchè un triangolo sia acutangolo, rettangolo O ottusangolo*, *Boll. Un. Mat. Ital.* (2)5(1943)

106 L. Fejes Tóth. *Inequalities concerning polygons and polyhedra*, *Duck Math. J.*, 15(1948)

107 L. Fejes Tóth. *Mat. Lapok*, 1(1949)

108 G. Hajós. *Math. Lapok*, 1(1950)

109 *Ramus and É. Rouché. Question* 233. *Nouv. Ann. Math.* 10(1851)

110 G. Petrov. *O podmínkách konstrukce trojúhelníku*, *Časopis pro Pěstování matematiky*, 77(1952)

111 H. Debrunner and A. Bager. *Problem* 260. *Elem. Math.*, 11(1956), 20 and 12(1957), 43

112 Nobuo Ōzeki(大关信雄). *On P. Erdös Inequality to the triangle.* J. College Arts & Sci., Chiba Univ. (千叶大学), 2(1957)

113 A. Florian. *Zu einem Satz von P. Erdös. Elem. Math.* 13(1958)

114 O. Kooi. *Simon Stevin*, 32(1958)

115 J. Rainwater and P. H. Diananda. *Problem* 4 908. *Amer. Math. Monthly*, 67(1960), 479 and 68(1961), 479

116 L. A. G. Dresel. *Nabla(Bull. of the Malayan Math. Soc.)*, 8(1961)

117 A. Makowski. *Elem. Math.*, 16(1961)

118 F. Leuenberger. *Elem. Math.*, 16(1961)

119 *Matematika V škole*, 1962, No. 6

120 A. Makowski and J. Berkes. *Elem. Math.*, 17(1962), 40～41 and 18 (1963), 31～32

121 A. Oppenheim. *Problem* 5 092. *Amer. Math. Monthly*, 70(1963), 444 and 71(1964), 444

122 A. Oppenheim and R. O. Davies. *Inequalities of Schur's type. Math. Gaz.*, 48(1964)

123 W. J. Blundon. *Inequalities associated with the triangle. Canad. Math. Bull.*, 8(1965)

124 A. Oppenheim. *Problem E* 1 724. *Amer. Math. Monthly*, 72(1965)

125 V. O. Gordon. *Mathematika V škole*, 1966, No. 5

126 P. Erdös, F. Leuenberger, P. Bundschuh and O. Reutter. *Aufgabe* 610. *Elem. Math.*, 24(1969), 139 and 25(1970), 138～139

127 A. W. Walker and H. Meyer. *Problem E* 2 248. *Amer. Math. Monthly*, 77(1970), 765 and 78(1971), 678

128 A. Oppenheim. *Some inequalities for triangles. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 357～380(1971)

129 M. S. Klamkin. *Asymmetric triangle inequalities. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 357～380(1971)

130 A. Bager. *A family of goniometric inequalities. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 338～352(1971)

131 O. Bottema. *Inequalities for R, r and s. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 338～352(1971)

132 M. S. Klamkin. *Nonnegative quadratic forms and triangle Inequalities. hotices of A. M. S.*, *Oct.*, 1971

133 A. W. Walker and M. G. Greening. *Problem* E2 388. *Amer. Math. Monthly*, 79(1972), 1 135 and 8(1973), 1 142～1 143

134 P. Erdös and M. S. Klamkin. *A triangle inequality. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 412～460(1973)

135 A. Bager. *Another family of goniometric inequalities. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 412～460(1973)

136 A. Oppenheim. *Inequalities involving elements of triangles, quadrilateterals or tetrahedra. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, No. 461～497(1974)

137 J. Garfunkel, W. J. Blundon, P. Erdös and M. S. Klamkin. *Problem* E2 505. *Amer. Math. Monthly*, 81(1974), 1 111 and 83(1976), 59～60

138 J. Garfunkel and C. S. Gardner. *Problem* E2 504. *Amer. Math. Monthly*, 81(1974), 1 111 and 83(1976), 289～290

139 M. S. Klamkin. *Geometric inequalities via the polar moment of inertia. Math. Mag.*, 48(1975)

140 L. Gerber. *The orthocentric simplex as an extreme simplex. Pacific J. Math.*, 56(1975)

141 N. A. Edwards. *Problem* 1 273. *Nouv. Ann. Math.*, 37(1878)

142 R. J. Stroeker. *Problem* E2 905*. *Amer. Math. Monthly*, 88(1981)

143 L. Panaitopol. *Problem* O374, *Gaz. Mat. (Bucharest)*, 88(1983)

144 *Problem* Gy 2 188, *Köz. Mat. Lapok* 1984, No. 3

145 V. Cirtoaje. *Problem* O473, *Gaz. Mat. (Bucharest)*, 91(1986)

146 V. Mascioni. *Zur Absch ätzung des Brocardschen Winkels. Elem. Math.*, 41(1986)

147 W. Janous and M. P. Nakassis. *Problem* E3 146*. *Amer. Math. Monthly*, 93(1986), 299 and 95 (1988), 767～769

148 V. Mascioni. *Zur Abschätzung des Brocardschen Winkels*, Ⅰ. *Elem. Math.*, 42(1987)

149 G. Tsintsifas, W. Janous and P. Penning. *Problem* 1 273, *Crux Math.*, 13(1987),256 and 14(1988), 276～278

150 D. P. Mavlo and K. Post. *Problem* 71. G, *Math. Gaz.*, 71(1987),309 and 72(1988),131～132

151 D. P. Mavlo. *Problem* 4. *Obuč po Mat. Inf.*, 1988,No. 2

152 Ji Chen. An extension of Oppenheim's area inequality for triangles. Crux Math., 15(1989)

153 Ji Chen and Zhen Wang. *Ageneralization of Lenhard's inequality. Crux Math.*, 15(1989)

154 Hui-Hua Wan and Ji Chen, *Problem* 1 619. *Crux Math.*, 17(1991), 44 and 18(1992),86～87

155 W. Janous and Ji Chen. *Problem* 1 663*. *Crux Math.*, 17(1991),207 and 18(1992),188～189

156 Zun San, Ji Chen, M. E. Kuozma, De-Jun Zhao, Zhen Wang and Kee-Wai Lou. *Problem* 1 680 and 19(1993), 170～172

157 P. Erdös. *Problem* 10 282. *Amer. Math. Monthly*, 100(1993)

158 W. Janous, W. Gmeiner and Ji Chen. *Problem* 1 137*. *Crux Math.*, 12(1986),79,177; 13(1987),228～230;14(1988),79～83 and 18 (1992), 208～209

二　立体几何

（一）直线和平面

直线和平面垂直的判定定理（Criterion for perpendicular between line and plane）　如果一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线，那么这条直线就垂直于这个平面.

这个定理相当于《几何原本》第 11 卷中的命题 4，它曾引起不少数学家的关注，并给出了不同的证明. 下面介绍的是柯西、勒让德以及欧几里得《几何原本》中的证明，一般教科书上采用的是柯西的证法. 如果在立体几何中引进向量，也可利用向量来证明.

柯西的证法　如图 4－208，设 a、b 是平面 α 内的两条相交直线，直线 $l\perp a$，$l\perp b$. 显然直线 l 不可能在平面 α 内也不可能和平面 α 平行，所以直线 l 必和平面 α 相交，设其交点为 H. 过 H 分别作 a、b 的平行线 a'、b'，则 $l\perp a'$，$l\perp b'$.

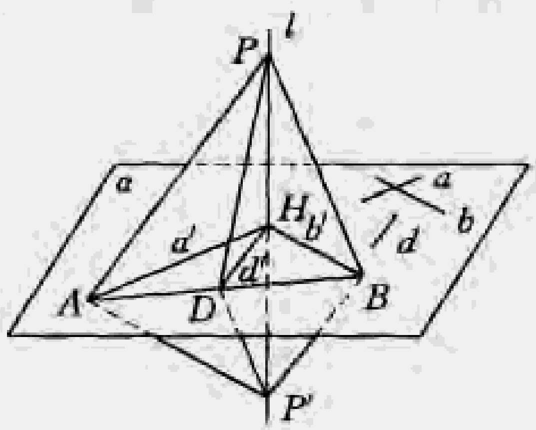


图 4－208

在 a' 和 b' 上各取一点 A 和 B，设 d 是平面 α 内任意一条直线，过 H 作 $d' \parallel d$，交 AB 于 D.

在直线 l 上点 H 的两侧各取一点 P 与 P'，使 $PH = P'H$，连结 PA、PB、PD、$P'A$、$P'B$、$P'D$，则 $PA = P'A$，$PB = P'B$，$AB = AB$，所以 $\triangle PAB \cong \triangle P'AB$，故 $\angle PAD = \angle P'AD$，于是 $\triangle PAD \cong \triangle P'AD$，这样 $PD = P'D$，从而 $DH \perp PP'$，即 $l \perp d$，因此 $l \perp \alpha$.

《几何原本》中的证法　如图 4－209，设在直线 a、b 交点 H 的两侧各取 A、A' 及 B、B'，使 $HA = HA'$，$HB = HB'$，连结 AB、

$A'B'$，则 $\triangle HAB \cong \triangle HA'B'$，所以 $AB = A'B'$，$\angle HAB = \angle HA'B'$. 在 l 上任取一点 P，连结 PA、PB、PA'、PB'，则 $PA = PA'$，$PB = PB'$，所以 $\triangle PAB \cong \triangle PA'B'$，于是 $\angle PAB = \angle PA'B'$. 在平面 α 内，过 H 点任作一直线 d，各交 AB、$A'B'$ 于 D、D'，连结 PD、PD'. 因为 $\triangle HAD \cong \triangle HA'D'$，所以 $AD = A'D'$，$HD = HD'$，这样就有 $\triangle PAD \cong \triangle PA'D'$，从而得 $PD = PD'$，于是 $PH \perp DD'$，即 $l \perp d$，因此 $l \perp \alpha$.

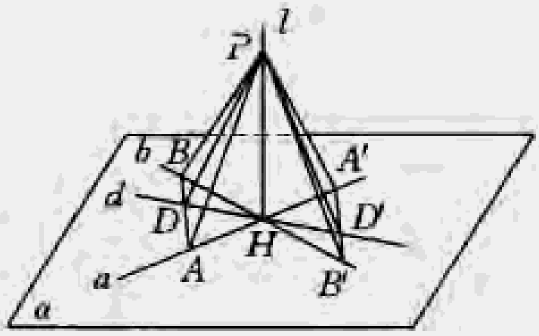


图 4-209

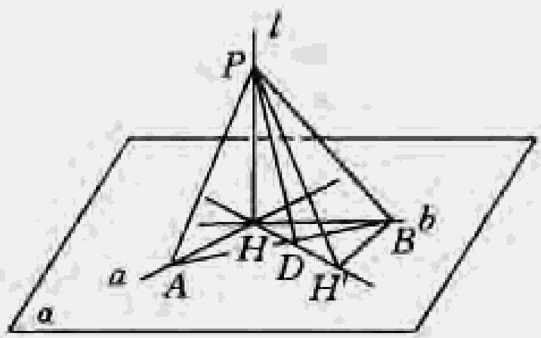


图 4-210

勒让德的证法 如图 4-210，在平面 α 上任取一点 D，并与直线 a、b 的交点 H 相连结. 延长 HD 至 H'，使 $DH' = HD$. 过 H' 作 $H'B \parallel a$，交 b 于 B. 连结 BD 并延长，设它与 a 相交于 A，则 $AD = DB$，故

$$HA^2 + HB^2 = 2(HD^2 + AD^2). \quad ①$$

在 l 上任取一点 P，连结 PA、PB、PD，则

$$PA^2 + PB^2 = 2(PD^2 + AD^2). \quad ②$$

②－①，得

$$(PA^2 - HA^2) + (PB^2 - HB^2) = 2(PD^2 - HD^2).$$

因为 $PH \perp HA$，$PH \perp HB$，所以 $PA^2 - HA^2 = PB^2 - HB^2 = PH^2$，从而有 $2PH^2 = 2(PD^2 - HD^2)$，即 $PD^2 = PH^2 + HD^2$，于是有 $PH \perp HD$，因此 $l \perp \alpha$.

注：《几何原本》第 11 卷中，直线与平面垂直的定义是："一直线和平面内所有与它相交的直线都成直角时，则称此直线与平面

成直角."而相当于直线与平面垂直的判定定理的命题4是:"如果一直线在另两条直线交点处都成直角,则此直线与两直线所在平面成直角."这与通常立体几何中的有关内容不尽相同,因此在给出的证明中也略有差别,它不必证明 l 或 d 不过 a 与 b 交点 H 的情况.

参考文献 [25,pp.110~111],[14,pp.538~540].

(郑君文)

三垂线定理(Theorem of three perpendiculars) 平面内的一条直线,如果和一条斜线在这平面内的射影垂直,那么它也和这斜线垂直.

这定理揭示了三条直线之间的垂直关系,应用很广,通常称为三垂线定理.

如图4-211,设 l 是平面 α 内的直线,PH 和 PA 分别为平面 α 的垂线和斜线,H 和 A 各为垂足和斜足,且 $l\perp HA$.

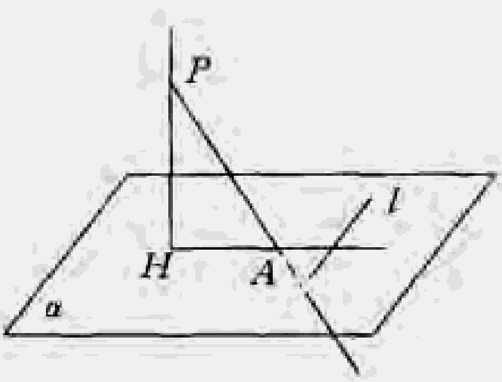


图4-211

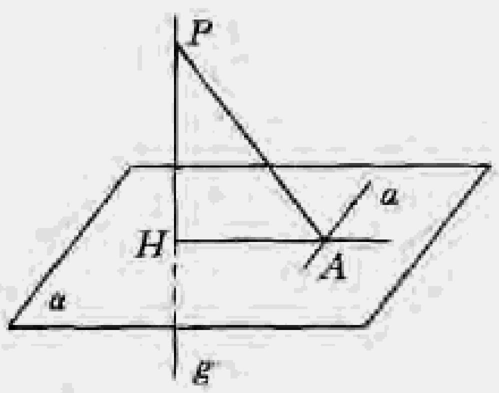


图4-212

因为 $PH\perp\alpha$,所以 $PH\perp l$,所以 $l\perp$ 平面 PHA,因此 $l\perp PA$.

这定理的逆命题也是成立的,称之为"三垂线定理的逆定理",即"平面内的一条直线,如果和这平面的一条斜线垂直,那么它也和这斜线的射影垂直".这是因为 $l\perp PA$,又 $PH\perp l$,所以 $l\perp$ 平面 PHA,因此 $l\perp HA$.

推论 如图4-212,若 a 是平面 α 内的直线,g 是这平面 α 的

垂线，则过 g 上任意一点 P 作直线 a 的垂线都通过一定点.

参考文献 [25,pp.113～114].

（郑君文）

Tinseau 定理(Tinseau's theorem) 设平面多边形(或一般的平面封闭曲线图形)的面积为 S，它在互相垂直的三个平面上的正射影的面积各为 S_1、S_2、S_3，则 $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

这个一般的情形是法国数学家 Tinseau(1748～1822)于 1774 年向 Paris Academy 提出的.当 S 为三角形面积的情形时，这个定理成为 Gua de Malves 等已经知道的情形，见**笛卡尔—加定理**.

要证这个定理，应先证一个引理：设$\triangle ABC$ 在平面 α 上的正射影为$\triangle A'B'C'$，θ 为平面 α 与$\triangle ABC$ 所在平面 β 的交角，则

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\theta.$$

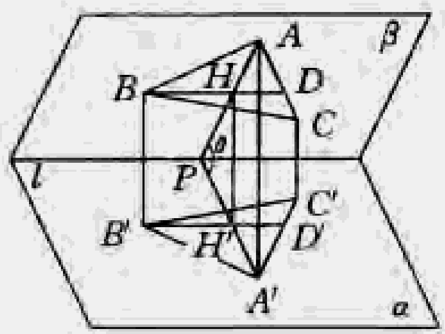


图 4－213

设平面 α 与 β 相交于直线 l，过 B 作 $BD /\!/ l$ 交 AC 于 D.再作 $AP \perp l$ ($AP \perp BD$)，交 BD 于 H，这里 P 为垂足，连结 $A'P$，则 $A'P \perp l$.

作 $B'D' /\!/ l$，交 $A'P$ 于 H'，交 $A'C'$ 于 D'，则 $A'H' \perp B'D'$ 且 H'、D' 各为 H、D 的正射影，所以 $A'H' = AH\cos\theta$，$B'D' = BD$，从而得

$$S_{\triangle A'B'D'} = \frac{1}{2}B'D' \cdot A'H' = \frac{1}{2}BD \cdot AH\cos\theta = S_{\triangle ABD} \cdot \cos\theta.$$

同理可得 $S_{\triangle B'C'D'} = S_{\triangle BCD} \cdot \cos\theta$.

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\theta.$$

把引理中的三角形推广到平面多边形或平面封闭曲线图形的情形，也同样成立.就是说，该平面多边形或封闭曲线图形的面积为 S，它在平面 α 上的正射影的面积为 S'，则有 $S' = S\cos\theta$.事实上，对于多边形的情形，只要把多边形分成若干个三角形，据引理就可得证.而对于封闭曲线图形，只要取它的内接多边形的面积，

当边数无限增多(最长的边趋于零)时的极限就可得证了.

设平面多边形(或平面封闭曲线图形)所在平面与三个互相垂直的平面的交角分别为 θ_1、θ_2、θ_3,则有

$S_1 = S\cos\theta_1, S_2 = S\cos\theta_2, S_3 = S\cos\theta_3$,

$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3)$.

设三个互相垂直的平面 α_1、α_2、α_3 相交于点 O,与平面多边形(或平面封闭曲线图形)所在平面 β 各交于 BC、CA、AB. 又 O 在平面 β 的正射影为 H,则 $AH \perp BC$. 延长 AH 交 BC 于 D,则 $\angle ADO = \theta_1$,所以 $\angle AOH = \theta_1$. 同样 $\angle BOH = \theta_2$,$\angle COH = \theta_3$. 若作出以 OH 为对角线,三条相邻的棱分别在 OA、OB、OC 上的长方体,则可知

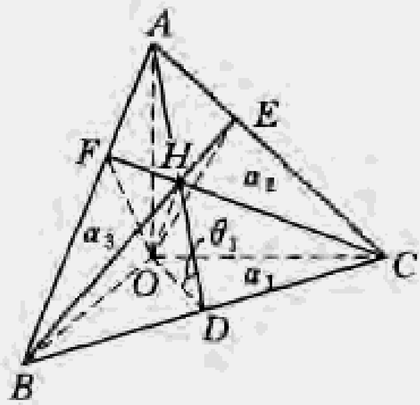


图 4-214

$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$,

$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2$.

参考文献 [25, p. 118].

(郑君文)

三面角的梅内劳斯定理(Menelaus' theorem for trihedral angle)

(1) 三面角的 3 个二面角之和大于 2 个直角而小于 6 个直角;

(2) 在三面角中,如果两个面角相等(不等),那么其所对的二面角也相等(不等,面角大的所对的二面角也大),反之亦然.

上述定理都是梅内劳斯发现的. 在(1)的证明中实质上使用了补三面角的概念,这个重要概念是由韦达于 1593 年和 Snellius 于 1627 年提出来的. (2)是平面几何里的定理"三角形中,等边对等角(边大所对的角也大),反之亦然"在空间的推广.

对于(1),可在三面角 $S-XYZ$ 内任取一点 S',由 S' 向这三面角的各个面引垂线 $S'A'$、$S'B'$、$S'C'$,垂足分别为 A'、B'、C'. 设平面 $S'B'C'$ 与 SX、平面 $S'C'A'$ 与 SY、平面 $S'A'B'$ 与 SZ 各交于点 A、B、C,则 $\angle B'AC'$、$\angle C'BA'$、$\angle A'CB'$ 分别是三面角 $S\text{-}XYZ$ 的三个二面角的平面角,且

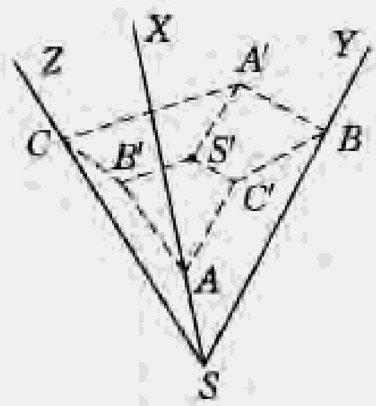


图 4-215

$$\angle B'AC' + \angle B'S'C' = \angle C'BA' + \angle C'S'A' = \angle A'CB' + \angle A'S'B' = 2\text{Rt}\angle,$$

即
$$\angle B'S'C' = 2\text{Rt}\angle - \angle B'AC',$$
$$\angle C'S'A' = 2\text{Rt}\angle - \angle C'BA',$$
$$\angle A'S'B' = 2\text{Rt}\angle - \angle A'CB'.$$

但 $\angle B'S'C'$、$\angle C'S'A'$、$\angle A'S'B'$ 是三面角 $S'-A'B'C'$ 的三个面角,其和必小于 $4\text{Rt}\angle$,

$$\therefore 0 < 2\text{Rt}\angle - \angle B'AC' + 2\text{Rt}\angle - \angle C'BA' + 2\text{Rt}\angle - \angle A'CB' < 4\text{Rt}\angle,$$

$$2\text{Rt}\angle < \angle B'AC' + \angle C'BA' + \angle A'CB' < 6\text{Rt}\angle,$$

所以,三面角 $S-XYZ$ 的 3 个二面角之和大于 2 个直角而小于 6 个直角.

对于(2),先考察三面角的面角相等的情形. 显然,如果相等的面角都是直角,那么所对的二面角也都是直二面角,且必相等. 这样就可分相等的面角为锐角或钝角来研究. 三面角 $S-ABC$ 中,设面角 $\angle ASB = \angle ASC < 90°$. 在 SA 上任取一点 P,作 $PH \perp$ 平面 BSC 于 H,再分别作 $HD \perp SB$ 于 D,$HE \perp SC$ 于 E,连结 PD、PE,则 $PD \perp SB$,$PE \perp SC$,所以 $\angle PDH$ 与 $\angle PEH$

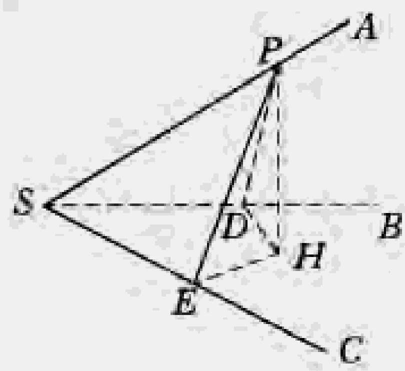


图 4-216

各是以 SB 与 SC 为棱的二面角的平面角. 由 $\mathrm{Rt}\triangle PSD \cong \mathrm{Rt}\triangle PSE$，可推出 $\mathrm{Rt}\triangle PDH \cong \mathrm{Rt}\triangle PEH$，所以 $\angle PDH = \angle PEH$，从而可知面角$\angle ASC$与$\angle ASB$所对的二面角相等.

当 $\angle ASB = \angle ASC > 90°$ 时，可反向延长 SA 得 SA'，于是在三面角 $S-A'BC$ 中有 $\angle A'SB = \angle A'SC < 90°$，所以其所对的二面角相等. 因为相等的二面角的邻补二面角也必相等，也就是说三面角 $S-ABC$ 的面角$\angle ASB$、$\angle ASC$ 所对的二面角相等.

用类似的方法可以推出：若三面角的二面角相等，则其所对的面角也相等.

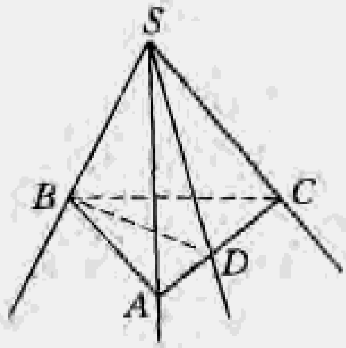


图 4-217

再考察三面角的二面角不等的情形. 三面角 $S-ABC$ 中，设二面角 $A-SB-C$ 大于二面角 $B-SC-A$，现作二面角 $C-SB-D$ 等于二面角 $B-SC-A$，交面 SAC 于 SD，则 $\angle BSD = \angle DSC$，又$\angle BSD + \angle DSA > \angle BSA$，所以 $\angle CSA > \angle BSA$.

至于三面角中，面角大的所对的二面角也大，则可用反证法来证.

参考文献 [25, pp. 122～124], [13, p. 170], [11, p. 135].

（郑君文）

空间 Desargues 定理（Desargues' theorem in space） 不在同一平面上的两个三角形$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，如果它们对应顶点的连线 AA'、BB'和 CC'交于一点 O，则其对应边 AB 和$A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$的交点 P、Q、R 在同一直线上，反之亦真.

空间和平面的 Desargues 定理，是于 1648 年发表在 Desargues 的朋友 Abraham Bosse 所著《运用 Desargues 透视法的一般讲解》一书的附录中，原书打算用通俗方法讲解 Desargues 的一些实用方法. Desargues 对两个三角形在同一平面（见平面几

何部分)与不在同一平面的两种情形,都证明了正定理及其逆定理,显然空间情形的证明比平面情形的证明简单. Desargues 在证明该定理前,先引入了无穷远点和无穷远直线,这样就不必分两直线平行与相交的情况. 本定理是射影几何中的重要定理.

设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的对应顶点的连线交于O点,因此AB和$A'B'$在同一平面上.

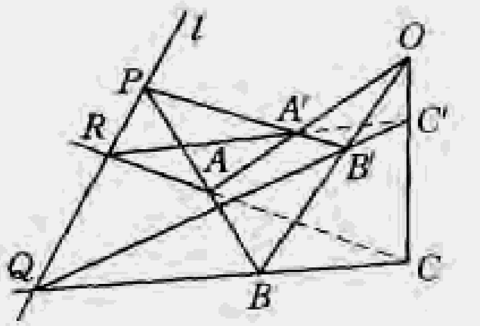


图 4-218

因为直线AB和$A'B'$分别在平面ABC和平面$A'B'C'$上,所以它们的交点P必在这两平面的交线l上. 同理,R、Q也都在直线l上,所以P、R、Q三点同在直线l上.

反之,由于AB与$A'B'$相交于P,从而确定了一个平面α,所以直线AA'与BB'同在平面α内,设它们相交于点O.

又BC与$B'C'$相交于Q,AC与$A'C'$相交于R,它们分别确定了平面β和γ,由此可知BB'与AA'各在平面β与γ内,所以BB'与AA'的交点O在β与γ的交线CC'上,即$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$对应顶点连线AA'、BB'和CC'交于点O.

参考文献 [25,p. 128],[11,pp. 337~340],[4,p. 176,p. 182],[24,p. 179].

(郑君文)

塞瓦-卡诺定理(Ceva-Carnot theorem) 设A'、B'、C'、D'分别是空间四边形$ABCD$各边上的点,则这四点共面的充要条件是

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}\cdot\frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}}=1.$$

该定理为梅内劳斯定理在空间的推广,是卡诺(L. N. M. Carnot,1753~1823)于 1803 年得到的,实际上塞瓦早已知

道了它.

如果 A'、B'、C'、D' 四点共面，则 $A'B'$ 与 $C'D'$ 或者平行或者相交. 如图 4－219，若 $A'B' /\!/ C'D'$，则它们必都平行于 AC，于是

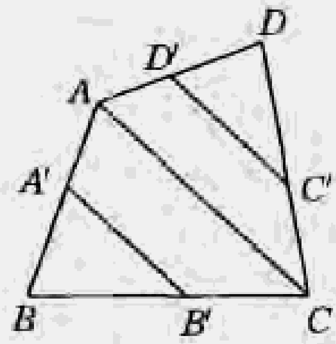


图 4－219

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}=\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'B}},\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}=\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'D}},$$

$$\therefore \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}\cdot\frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}}=1.$$

如图 4－220，若 $A'B'$ 与 $C'D'$ 相交，设其交点为 P，则直线 AC 也必通过 P 点，据梅内劳斯定理，有

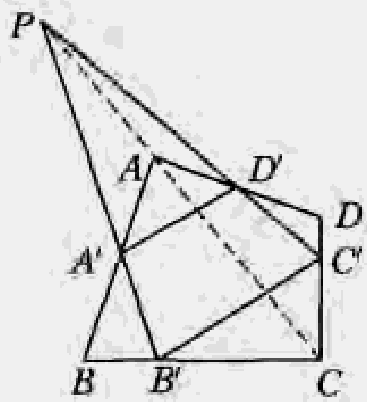


图 4－220

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}=-1,$$

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}\cdot\frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}=-1,$$

$$\therefore \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}\cdot\frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}}=1.$$

反之，设 A'、B'、C' 三点确定的平面与 AD 相交于 D'' 点，根据刚才的证明，有

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}\cdot\frac{\overline{DD''}}{\overline{D''A}}=1,$$

再与已知条件 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}\cdot\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}\cdot\frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}}\cdot\frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}}=1$

比较，得 $\frac{\overline{DD''}}{\overline{D''A}}=\frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}}.$

所以 D' 与 D'' 重合，因而 A'、B'、C'、D' 四点共面.

推论 1 设 A_1'、A'_2、…、A_n' 分别是空间 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边上的点（$n\geqslant 4$），则这 n 个点共面的充要条件是

$$\frac{\overline{A_1A'_1}}{\overline{A_1'A_2}}\cdot\frac{\overline{A_2A_2'}}{\overline{A_2'A_3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\overline{A_nA_n'}}{\overline{A_n'A_1}}=(-1)^n.$$

该推论是卡诺于1806年得到的. 卡诺还把梅内劳斯定理中的"直线"或"横截线"扩展到"任意的 n 次代数曲线",见其所著的《横截线论》(*Essai sur la théorie des transversales*,1806).

推论 2 在空间四边形 $ABCD$ 中,如果 A'、C' 分 AB、DC 成等比,B'、D' 分 BC、AD 成等比,即 $\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}}=\frac{\overline{DC'}}{\overline{C'C}}$,$\frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}}=\frac{\overline{AD'}}{\overline{D'D}}$,则 $A'C'$ 与 $B'D'$ 在同一平面上. 反之亦真.

这推论是 Léry 于1828年得到的.

推论 3 如果空间四边形的四边切于一个球面,那么四个切点共面.

该推论是 Durrunde 于1811年至1816年得到的.

参考文献 [25,pp. 130~132,p. 181],[13,p. 423].

(郑君文)

共面点的费尔巴哈定理(Feuerbach's theorem of coplanar points) 设有点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5,若记 $d_{ij}=A_iA_j(i、j=1,2,3,4,5)$,则该五点共平面或共球面的条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ d_{51}^2 & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

该定理是费尔巴哈发现的,但采用的不是行列式的形式. 凯莱用行列式的形式证明了该定理,发表在 *Cambridge Math.* Journal 2(1847)上.

设点 A_i 的空间直角坐标为(x_i,y_i,z_i),记 $\sum x_i^2=x_i^2+y_i^2+$

z_i^2, $\sum x_ix_j = x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j (i、j = 1,2,3,4,5)$，则五点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 共球面或共平面的条件是

$$\begin{vmatrix} \sum x_1^2 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \sum x_2^2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \sum x_3^2 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \sum x_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ \sum x_5^2 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0. \qquad ①$$

由 ①，得

$$\begin{vmatrix} 1 & \sum x_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 \\ 1 & \sum x_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 \\ 1 & \sum x_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & -2z_3 \\ 1 & \sum x_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \\ 1 & \sum x_5^2 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 \end{vmatrix} = 0,$$

所以有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sum x_1^2 & \sum x_2^2 & \sum x_3^2 & \sum x_4^2 & \sum x_5^2 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & -2x_5 \\ -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & -2y_4 & -2y_5 \\ -2z_1 & -2z_2 & -2z_3 & -2z_4 & -2z_5 \end{vmatrix} = 0. \qquad ②$$

①与②左边两行列式相乘，因为

$$\sum x_i^2 + \sum x_j^2 - 2\sum x_ix_j = \sum (x_i - x_j)^2 = d_{ij}^2,$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ d_{51}^2 & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

在平面的情形，就有

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

把它展开整理后得

$$d_{12}\cdot d_{34}\pm d_{13}\cdot d_{24}\pm d_{23}\cdot d_{14}=0.$$

它实质上就是托勒密定理或直线上四点的欧拉定理.

参考文献 [25,pp.253～254].

（郑君文）

（二）多面体

多面体的庞斯莱定理(Poncelet's theorem of polyhedron) 设两个四面体对应顶点的连线交于一点，则对应面的交线在同一平面上.

该定理的逆命题也成立.我们称这样的两个四面体是透视的或配景的，它们对应顶点连线的交点叫做透视中心或配景中心，对应面的交线所在平面称为透视面或配景面.

该定理是庞斯莱于 1822 年得到的，它是平面几何中 Desargues 定理的推广.

若四面体 $ABCD$ 与四面体 $A'B'C'D'$ 的对应顶点的连线交于 O 点，则 BC 与 $B'C'$、CA 与 $C'A'$、AB 与 $A'B'$、DA 与 $D'A'$、DB

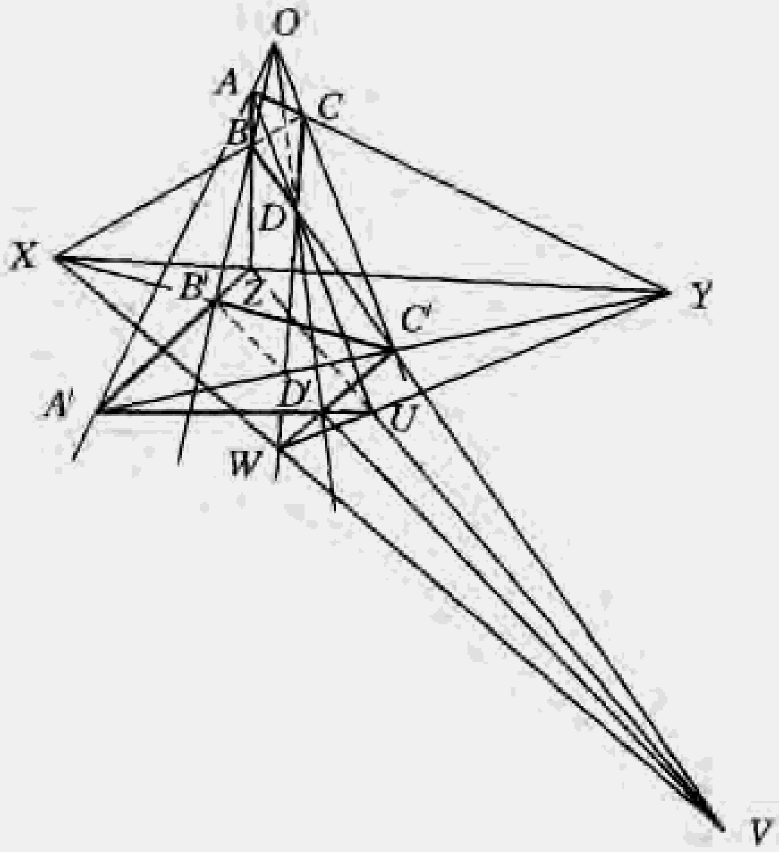


图 4-221

与 $D'B'$、DC 与 $D'C'$ 都各在同一个平面上，设它们的交点分别为 X、Y、Z、U、V、W. 因为平面 ABC 与平面 $A'B'C'$ 的交线包含点 X、Y、Z，平面 DAB 与平面 $D'A'B'$ 的交线包含点 U、V、Z，所以它们有公共点 Z，即这两条交线相交. 同样可证，其余各对应面的交线都相交. 由此可知，这两个四面体各对应面所成的四条交线的任意两条都相交，所以这四条交线在同一平面上.

参考文献 [25, pp. 148～149].

（郑君文）

葛尔刚定理(Gergonne's theorem) 四面体的一个二面角的内（或外）平分面，内（或外）分对棱所成两线段与其两个邻面面积对应成比例.

该定理是葛尔刚于 1812 年得到的，见 *Annales de Math.* Vol. 3. 本定理可看做平面几何中的三角形内角（或外角）平分线

性质定理在立体几何中的推广.

设面 PAB 是四面体 $ABCD$ 的二面角 AB 的内平分面，它与棱 CD 交于点 P，则点 P 到面 ABC 的距离与到面 ABD 的距离相等，并记为 h，

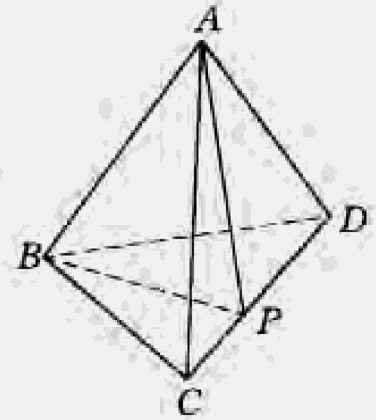


图 4-222

$$\therefore \frac{CP}{PD}=\frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle BDP}}=\frac{V_{ABCP}}{V_{ABDP}}=\frac{h\cdot S_{\triangle ABC}}{h\cdot S_{\triangle ABD}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}.$$

对于四面体的一个二面角的外平分面的情形，可同样证明.

推论 四面体中会于一点的三个二面角，若其中两个二面角的内平分面与第三个二面角的外平分面(或都为外平分面)各交对棱于一点，则该三个交点共线.

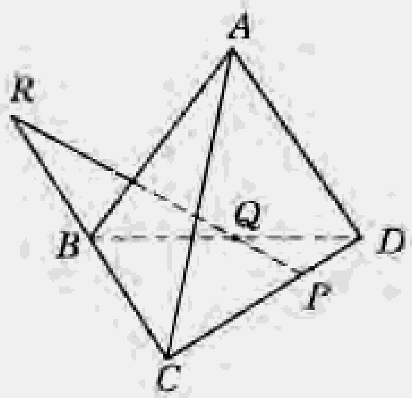


图 4-223

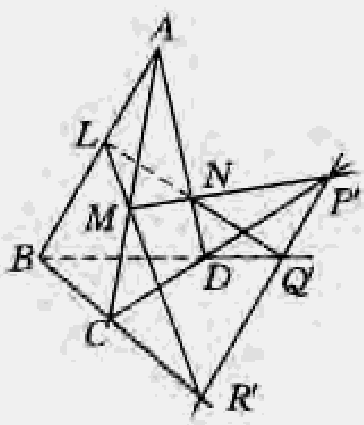


图 4-224

如图 4-223，设四面体 $ABCD$ 的二面角 AB、AC 的内平分面和二面角 AD 的外平分面各交其对棱于 P、Q、R，则据葛尔刚定理，有

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{DQ}}{\overline{QB}}\cdot\frac{\overline{BR}}{\overline{RC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{-S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=-1,$$

所以，由梅内劳斯定理知 P、Q、R 三点共线.

同样可以证明，如图 4-224，四面体 $ABCD$ 中会于一点 A 的

三个二面角 AB、AC 和 AD 的外平分面，各交其对棱于 P'、Q' 和 R'，则该三点共线. 当然，它也可利用上面推论中已证明的结论和空间 Desargues 定理来证.

上述推论在平面几何中也有相应的定理.

参考文献 [25,pp. 137～138],[9,p. 227].

（郑君文）

笛卡尔-加定理(Descartes - Gua theorem) 四面体 $ABCD$ 中，若三面角 $A-BCD$ 为直三面角，则

$$(S_{\triangle ABC})^2+(S_{\triangle ABD})^2+(S_{\triangle ACD})^2=(S_{\triangle BCD})^2.$$

该定理是法国数学家加·德·马尔弗(Gua de Malves,1712～1786)于1783年向 Paris Academy 提出的，被称为加(Gua)定理，但一般认为它早已为笛卡尔及其同时代的 Faulhaber (1580～1635)所知，所以把它称为笛卡尔-加定理. 该定理是勾股定理在空间的推广.

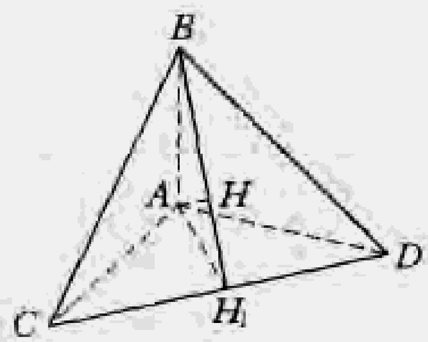


图 4 - 225

在平面 BCD 内作 $BH_1\perp DC$，H_1 为垂足，则有

$$\begin{aligned}(S_{\triangle BCD})^2&=\frac{1}{4}(BH_1^2\cdot CD^2)=\frac{1}{4}(AB^2+AH_1^2)(AD^2+AC^2)\\&=\frac{1}{4}AB^2\cdot AD^2+\frac{1}{4}AB^2\cdot AC^2+\frac{1}{4}AH_1^2(AD^2+AC^2)\\&=(S_{\triangle ABC})^2+(S_{\triangle ABD})^2+(S_{\triangle ACD})^2.\end{aligned}$$

该定理也可用下面方法获得.

作 $AH\perp BH_1$ 于 H，则 $AH_1^2=H_1H\cdot H_1B$，所以

$$(S_{\triangle ACD})^2=S_{\triangle HCD}\cdot S_{\triangle BCD}.$$

同样可得

$(S_{\triangle ABC})^2 = S_{\triangle HBC} \cdot S_{\triangle BCD}$,

$(S_{\triangle ABD})^2 = S_{\triangle HBD} \cdot S_{\triangle BCD}$,

$\therefore (S_{\triangle ABC})^2 + (S_{\triangle ABD})^2 + (S_{\triangle ACD})^2$

$= (S_{\triangle HBC} + S_{\triangle HBD} + S_{\triangle HCD}) \cdot S_{\triangle BCD} = (S_{\triangle BCD})^2$.

当然证明中也可不必作辅助线，直接利用三斜求积公式，通过简单计算就可获证. 即

$$(S_{\triangle BCD})^2$$
$$= \frac{1}{4}\left[(AB^2 + AC^2)(AB^2 + AD^2) - \left(\frac{AB^2 + AC^2 + AB^2 + AD^2 - AD^2 - AC^2}{2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{4}[AB^4 + AB^2 \cdot AD^2 + AC^2 \cdot AB^2 + AC^2 \cdot AD^2 - AB^4]$$
$$= S^2_{\triangle ABC} + S^2_{\triangle ABD} + S^2_{\triangle ACD}.$$

推论 $\quad \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

参考文献 [25, p. 150].

（郑君文）

四面体的重心(Centroid of a tetrahedron) 连结四面体的对棱中点的三条直线交于一点，这点称为四面体的重心.

该定理是蒙日于1809年得到的.

设 P、R 和 Q、S 分别是四面体 $ABCD$ 对棱 AB、CD 和 BC、AD 的中点，则 $PQ \parallel AC \parallel SR$，$PQ = \frac{1}{2}AC = SR$，所以四边形 $PQRS$ 是平行四边形，它的对角线 PR 和 QS 在交点 G 互相平分.

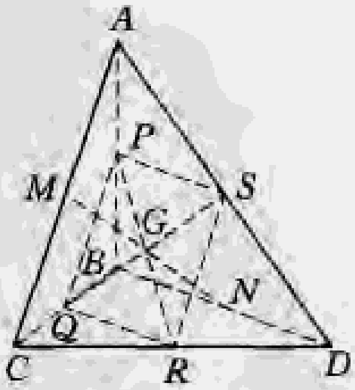


图 4-226

设 M、N 各是对棱 AC、BD 的中点，同样可证四边形 $PMRN$ 是平行四边形，

它的对角线 PR 与 MN 互相平分，所以 MN 通过 PR 的中点 G，因此 PR、QS、MN 交于一点 G.

如果使用向量，那么可取四面体 $ABCD$ 的外心 O 为原点，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 等，P、R 各为 AB、CD 的中点，则 $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$.

设 G 为 PR 的中点，则 $\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$.

同样，设 G'、G'' 分别为 QS、MN 的中点，则

$$\overrightarrow{OG'}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4},\overrightarrow{OG''}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}.$$

所以 G' 与 G'' 都重合于 G，即三双对棱中点连线交于 G 点.

参考文献 [25，p. 138].

（郑君文）

Commandino 定理（Commandine's theorem） 连结四面体的每一顶点与其对面重心的四条直线交于一点 G，且被 G 分为 3 与 1 之比.

意大利数学家 F. Commandino（1509～1575）于 1565 年得到了该定理.

设 G_1 和 G_2 各是四面体 $ABCD$ 的面 BCD 与面 ACD 的重心，M 是棱 CD 的中点，则

$$\frac{MG_1}{MB}=\frac{MG_2}{MA}=\frac{1}{3},$$

$$\therefore G_1G_2 \parallel BA, \frac{G_1G_2}{BA}=\frac{1}{3}.$$

设 G 为 AG_1 和 BG_2 的交点，则

$$\frac{GG_1}{AG}=\frac{GG_2}{BG}=\frac{1}{3}.$$

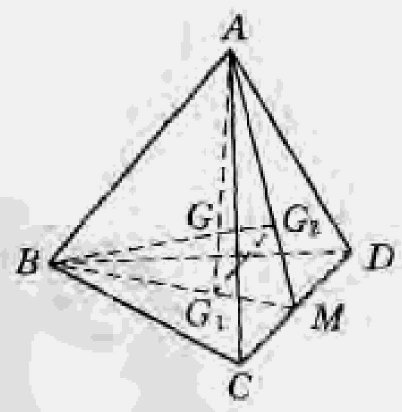


图 4-227

因此，BG_2 通过以 $3:1$ 内分线段 AG_1 的分点 G.

设 G_3 和 G_4 各是面 ABD 和面 ABC 的重心，同样可证 CG_3、

DG_4 也通过 G 点.

因为四面体 $ABCD$ 每双对棱中点的连线都通过 G，且被 G 平分，所以 G 是该四面体的重心.

由本定理可得如下推论：

(1) 通过四面体的每一棱与其对棱中点的六个平面，都通过该四面体的重心.

(2) 通过四面体三个面的重心的平面平行于第四个面，其组成的三角形的面积与第四个面的面积之比为 1∶9.

(3) 由四面体的四个面的重心所组成的四面体的体积，是原四面体体积的 $\frac{1}{27}$.

参考文献　[25，pp.138～139]，[13，p.518].

（郑君文）

蒙日点(Monge point)　通过四面体各棱的中点，且垂直于各自的对棱的六个平面共点，这个点叫做四面体的蒙日点.

该定理是蒙日于 1811 年发现的，见 *Correspon dance sur l'Ecole Polytechnique* Vol.2.

四面体 $ABCD$ 中，P 和 Q 是一双对棱 AB 和 CD 的中点. 设 G 是 PQ 的中点，O 是该四面体的外心，连结 OG 并延长至 M，使 $GM=OG$，则 $PM \parallel OQ$.

因为 $OC=OD$，所以 $OQ \perp CD$，故 $PM \perp CD$. 因此通过 P 且垂直于 CD 的平面必包含 PM，也即该平面通过点 M.

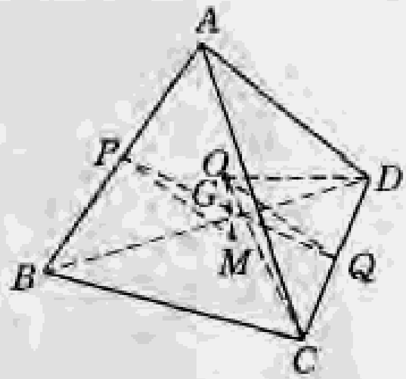


图 4-228

同理可证，其他通过一棱的中点且垂直各自对棱的五个平面也都通过 M 点.

该定理也可利用向量来证. 取四面体 $ABCD$ 的外心 O 为原点，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 等，

P 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{OP}$ 为$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，通过 P 而垂直于 CD 的平面方程为：

$$(\vec{c}-\vec{d})\cdot\left(\vec{r}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)=0.$$

因为 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$，所以 $\vec{r}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}$ 满足这平面方程. 设 G 是四面体 $ABCD$ 的重心(见蒙日定理)，则 $\overrightarrow{OG}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$，所以 OG 在这平面上.

设$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}=\overrightarrow{OM}$，则 M 在 OG 的延长线上，且 $GM=OG$，即点 M 在过 P 且垂直于 CD 的平面内.

同样可证，$\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{2}$都满足通过其他一棱的中点且垂直于各自对棱的平面方程，也即它们都包含点 M. 这就是说，过一棱中点且垂直于它的对棱的六个平面交于点 M(蒙日点).

由上可知，四面体的外心、重心和蒙日点共线，通常称这直线为四面体的欧拉线.

参考文献 [25,pp. 140～141],[13,p. 434].

(郑君文)

Mannheim 定理(Mannheim's theorem) 设 H_i 是四面体 $ABCD$ 各面的垂心，h_i 是相应面上的高线，则由 H_i 与 $h_i(i=1,2,3,4)$所确定的四个平面相交于蒙日点 M.

该定理是法国数学家 V. M. A. Mannheim(1831～1906)于1895 年发现的，见 *Journal de Math. elementaire*.

设 AA' 是四面体 $ABCD$ 的面 BCD 上的高线(即 h_1)，O、G 和 M 分别是它的外心、重心和蒙日点，O_1、G_1 和 H_1 各是$\triangle BCD$ 的外心、重心和垂心，则 $OO_1\perp$平面 BCD.

又设 G' 和 M' 各是 G 和 M 在平面 BCD 上的正射影，则因 $OG=GM$，所以 $O_1G'=G'M'$.

因为 G_1、G、A 三点共线，所以 G_1、G'、A' 三点也共线，且

$$\frac{G_1G'}{G'A'}=\frac{G_1G}{GA}=\frac{1}{3}.$$

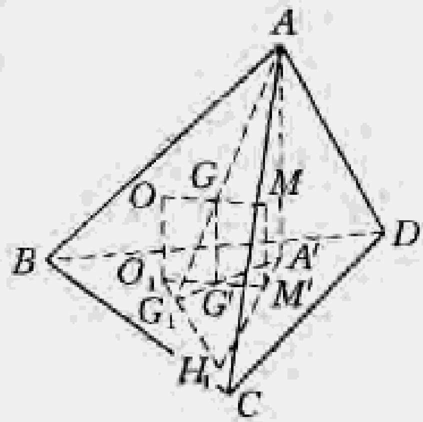


图 4－229

又 $O_1G_1H_1$ 是 $\triangle BCD$ 的欧拉线，且

$$\frac{O_1G_1}{G_1H_1}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \frac{O_1M'}{M'G'}\cdot\frac{G'A'}{A'G_1}\cdot\frac{G_1H_1}{H_1O_1}=\left(-\frac{2}{1}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1.$$

根据梅内劳斯定理的逆定理，A'、M'、H_1 三点共线. 又因 MM' 和 AA' 同垂直于平面 BCD，所以 $MM'\parallel AA'$，因此由 AA'（即 h_1）和 H_1 所确定的平面必包含 MM'，也即它通过 M 点.

同样可证，h_2 与 H_2、h_3 与 H_3、h_4 与 H_4 所确定的三个平面也都通过 M 点.

参考文献　[25，p. 141]，[13，p. 434].

（郑君文）

Durrunde 定理（Durrunde's theorem）　四面体的各棱与一球相切的充要条件是三双对棱的和相等.

该定理是 Durrunde 在 *Annales de Math.* 5（1814～5）中给出的. 它可看做平面几何中“四边形内切于一圆的充要条件是其两双对边的和相等”这一定理的推广.

如图 4－230，若四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD、DA、AC、BD 与一球相切于点 P、Q、R、S、M、L，则

$$AP=AM=AS=p,$$

$$BP=BL=BQ=q,$$

$CQ = CM = CR = r,$

$DR = DL = DS = s,$

$\therefore AB + CD = p + q + r + s,$

$AC + BD = p + r + q + s,$

$AD + BC = p + s + r + q,$

即三双对棱的和相等.

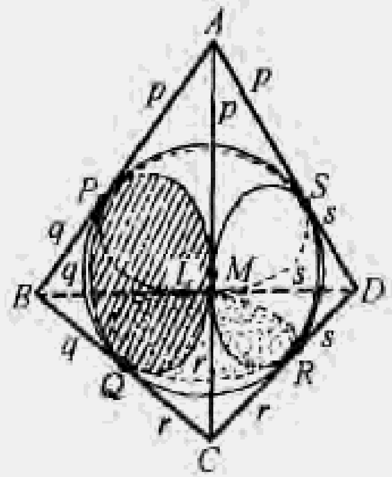


图 4-230

反之,若四面体 $ABCD$ 中,$AB + CD = AC + BD = AD + BC$,则 $AB - AC = BD - CD$. 现设$\triangle ABC$ 的内切圆切 BC 于 X,于是有 $BX = \frac{1}{2}(BC + AB - AC)$,所以 $BX = \frac{1}{2}(BC + BD - CD)$. 这样点 X 又是$\triangle BCD$ 内切圆的切点. 同样可证,切于其余各棱的切点也是相邻的面的内切圆的切点.

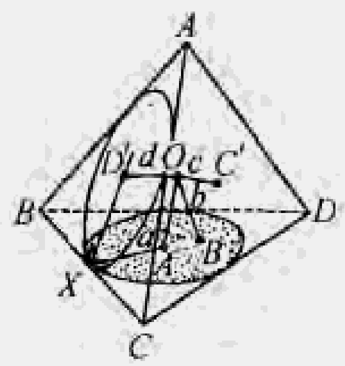


图 4-231

如图 4-231,过点 X 分别在面 ABC 与面 BCD 作 BC 的垂线,则各通过其内心 D' 与 A',于是 $BC \perp$ 平面 $A'XD'$,所以平面 $A'XD'$ 垂直于平面 ABC 和平面 BCD. 各过点 D' 和 A' 分别作平面 ABC 与平面 BCD 的垂线 d 与 a,则直线 d 与 a 都在平面 $A'XD'$ 内,所以它们必相交.

同样可证,过$\triangle ABD$ 的内心 C' 作平面 ABD 的垂线 c,必与 a 及 d 相交. 这就是说,a、d、c 是不在同一平面上且两两相交的三直线,所以它们必交于同一点 O. 同样可证,过$\triangle ACD$ 的内心 B' 作平面 ACD 的垂线 b,也必与 a、d 交于同一点 O,即直线 a、b、c、d 交于同一点 O. 易知点 O 到各面内切圆的切点的距离都相等,可见各切点都在球面 O 上. 又 $OX \perp BC$,所以 BC 是球 O 的切线,从而可推得四面体 $ABCD$ 的各棱

都与以 O 为球心、OX 为半径的球相切.

参考文献 [25,pp.180~181].

(郑君文)

Bang 定理(Bang's theorem) 四面体内切球切于各面的切点,对着每双对棱所张的角相等.

该定理是 Bang 于 1897 年得到的,见 *Tidsskrift for Math.* p.48及 S. White, *Bulletin of A.M.S.* 14(1907~8).

设四面体 $ABCD$ 的内切球,分别切面 BCD、ACD、ABD 和 ABC 于点 T_a、T_b、T_c 和 T_d,则 $AT_d = AT_c$, $BT_d = BT_c$,

$\therefore \triangle ABT_d \cong \triangle ABT_c$,

$\therefore \angle AT_dB = \angle AT_cB = u$.

同样可证

$\angle CT_aD = \angle CT_bD = u'$,

$\angle BT_aC = \angle BT_dC = v$,

$\angle AT_bD = \angle AT_cD = v'$,

$\angle AT_bC = \angle AT_dC = w$,

$\angle BT_aD = \angle BT_cD = w'$.

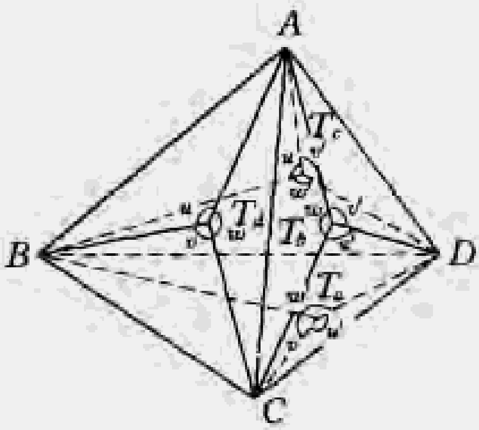


图 4-232

又 $u + v + w = u + v' + w' = u' + v + w'$

$= u' + v' + w = 360°$,

$\therefore v + w = v' + w'$, $u + v' = u' + v$, $v + w' = v' + w$,

$\therefore v = v'$, $w = w'$, $u = u'$.

参考文献 [25,p.180].

(郑君文)

Roberts 定理(Roberts' theorem) 在四面体各棱上任取一点,再过一顶点和通过这一顶点的三棱上所取的点作球,则所作的四个球交于一点.

该定理是 S. Roberts 在以 *On certain tetrahedron specially related to four spheres* 为题的一文中给出的,它载于 *Proceedings*

of the London Math. Sos. 12(1880～1881),p. 117 上. 本定理是平面几何中相应的定理“在三角形各边上任取一点,过一顶点与通过这顶点的两边上所取的点作圆,则所作的三个圆交于一点”(见 **Miquel 点**),在空间的推广.

下面的证明出自 Roberts 本人. 这之后,Neuberg 给出解析证明,刊载在 *Messenger of Math.* 13(1884)上. 1903 年,Haskel 又对该定理作了推广.

如图 4－233,设 B_{ij}(即 B_{ji})是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱 A_iA_j 上的一点(i、$j=1,2,3,4$),过 A_1、B_{12}、B_{13}、B_{14}四点的球记为 C_1 等,即

$$C_1\equiv(A_1,B_{12},B_{13},B_{14}),$$
$$C_2\equiv(A_2,B_{21},B_{23},B_{24}),$$
$$C_3\equiv(A_3,B_{31},B_{32},B_{34}),$$
$$C_4\equiv(A_4,B_{41},B_{42},B_{43}),$$

则面 $A_1A_2A_3$ 与球 C_1、C_2、C_3 相交于圆(A_1,B_{12},B_{13})、(A_2,B_{21},B_{23})、(A_3,B_{32},B_{31}). 据平面几何中与其相应的定理知,这三个圆交于一点 D_4,也即这三个球 C_1、C_2、C_3 交于点 D_4. 同样 C_2、C_3、C_4 三个球交于一点 D_1,C_3、C_4、C_1 三个球交于一点 D_2,C_4、C_1、C_2 三个球交于一点 D_3. 考察通过 A_4 的球 C_4,它与三个面各相交于一个圆,这三个圆有一公共点 A_4,且两两还有一公共点 B_{41}、B_{42}、B_{43},并且分别通过点 D_2、D_3、D_1.

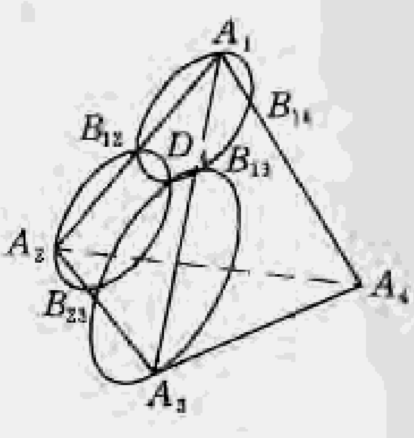


图 4－233

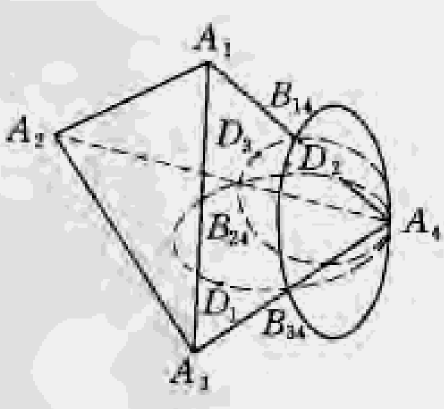


图 4－234

如图 4-234，以 A_4 为极点建立球极射影，则球 C_4 上的点，就变换成过 A_4 的直径另一端点且切于球 C_4 的平面 π 上的点，而分别过 D_2、D_3、D_1 的圆 (A_4, B_{14}, B_{34})、(A_4, B_{14}, B_{24})、(A_4, B_{24}, B_{34}) 则变换成直线 $B_{14}'D_2'B'_{34}$、$B_{14}'D_3'B_{24}'$、$B_{24}'D_1'B_{34}'$，球 C_4 上不过 A_4 的圆 (D_2, B_{14}, D_3)、(D_3, B_{24}, D_1)、(D_1, B_{34}, D_2) 仍变成 π 上的圆 (D_2', B_{14}', D_3')、(D_3', B_{24}', D_1')、(D_1', B_{34}', D_2')，据平面几何中与其相应的定理知，这三个圆相交于一点 E'，于是它在球 C_4 上的对应点 E 也是三个圆 (D_2, B_{14}, D_3)、(D_3, B_{24}, D_1)、(D_1, B_{34}, D_2) 的交点. 但这三个圆又各在球 C_1、C_2、C_3 上，所以 E 是球 C_1、C_2、C_3 的公共点，因此 C_1、C_2、C_3、C_4 四个球相交于点 E.

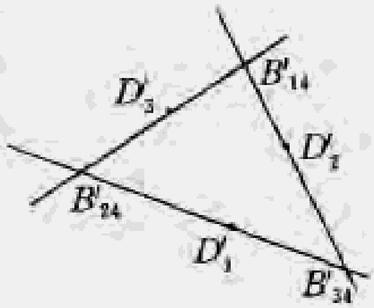


图 4-235

参考文献 [25, pp. 194～196].

（郑君文）

Ferriot 定理（Ferriot's theorem） 垂心四面体每组对棱的公垂线都通过它的垂心.（两组对棱互相垂直的四面体叫做垂心四面体或正交四面体. 垂心四面体的四条高线交于一点，这点叫做该四面体的垂心. 值得注意的是，一般四面体的四条高线不交于一点. 就是说，它不能从三角形的三条高线交于一点直接推广得到）

该定理是 Ferriot 于 1811 年得到的，雅可比于 1834 年再次发现了它.

在四面体 $ABCD$ 中，设棱 AB 与 CD 互相垂直，棱 AC 与 BD 互相垂直，则棱 AD 与 BC 也互相垂直.

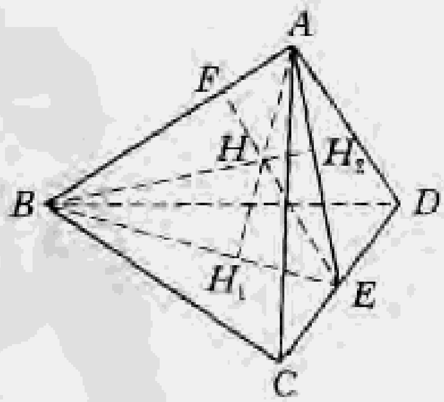


图 4-236

过 A 作平面 BCD 的垂线 AH_1，H_1 为垂足，则 H_1 为 $\triangle BCD$ 的垂心. 设

BH_1 与 CD 相交于E，则 $CD\perp$平面 ABE，所以平面 $ABE\perp$平面 ACD. 在平面 ABE 内作 $BH_2\perp AE$ 于 H_2，交 AH_1 于 H，则 $BH_2\perp$平面 ACD，所以 H 为垂心四面体 $ABCD$ 的垂心，它也是 $\triangle ABE$ 的垂心. 设 EH 与 AB 交于 F，则 $EF\perp AB$，又 $EF\perp CD$，所以 EF 是棱 AB 与 CD 的公垂线，它通过该四面体的垂心 H.

同理可证，其余各组对棱的公垂线也通过该四面体的垂心 H.

参考文献 [25，p. 155].

（郑君文）

Temperley 定理（Temperley's theorem） 垂心四面体的垂心和蒙日点重合，且其外心、重心和垂心共线. 该线称为四面体的欧拉线.

垂心四面体的外心、重心和垂心共线，是由 Temperley 于 1881 年得到的.

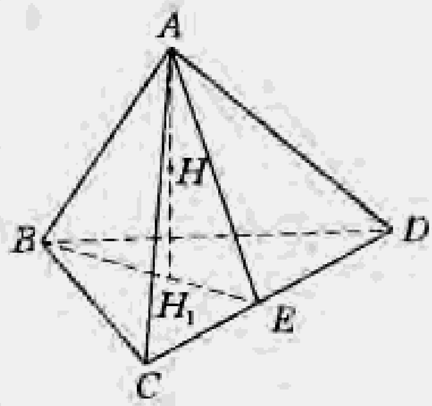


图 4－237

设 H 是垂心四面体 $ABCD$ 的垂心，平面 ABH 与棱 CD 相交于 E，则 $CD\perp$平面 ABE，从而可知过 H 的平面 ABE 也就是过棱 AB 的中点且垂直于它的对棱 CD 的平面. 因此，这样六个平面的交点 M 即为蒙日点. 又这六个平面都包含 H，可见这交点 M 也就是这垂心四面体的垂心 H. 所以该四面体的蒙日点与垂心重合.

从四面体的蒙日点的证明中得知，垂心四面体的外心、重心和垂心共线.

如果利用 Mannheim 定理，则垂心四面体的垂心与蒙日点重合是显然的. 这是因为蒙日点是自该四面体各顶点引的高线与其各自对面上的垂心所确定的四个平面的交点，而这四个平面当然

各包含高线，其交点 H 与 M 重合.

参考文献[25,p.155].

（郑君文）

十二点球(Twelve points sphere) 在垂心四面体中，

(1) 各棱中点和各组对棱公垂线的垂足，共十二个点在同一个球面上，这个球称为第一种十二点球；

(2) 四条高线足、各个面的重心以及把顶点与该四面体垂心的连结线段分成 2∶1 的四个分点，共十二个点同在一个球面上，这个球称为第二种十二点球.

第一种十二点球是 Lewis 和 Temperley 于 1881 年发现的，第二种十二点球是 Prouhet 于 1863 年得到的，后者是平面几何中九点圆在空间的推广.

(1) 设 K、L、M、N 是垂心四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD、DA 的中点，据四面体的蒙日定理，KM 与 LN 的交点 G 是这四面体的重心.

因为 $KL /\!/ AC$，$LM /\!/ BD$，又 AC 与 BD 互相垂直，所以 $KL \perp LM$，从而四边形 $KLMN$ 为矩形，因此 K、L、M、N 在以 G 为球心、GK 为半径的球面上. 同样 AC 与 BD 的中点 P 与 Q 也在该球面上.

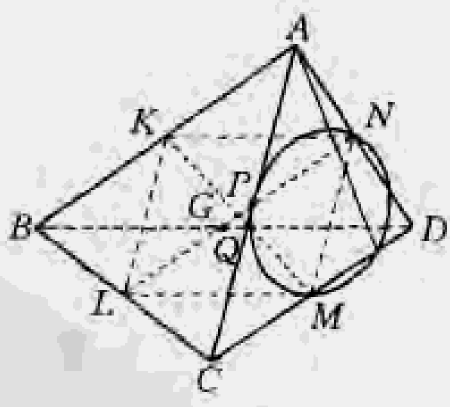


图 4-238

垂心四面体 $ABCD$ 各面上的九点圆，就是它与球 G 的交线，因此各面的九点圆与棱的第二个交点即为其高线足，它们都在该球面上.

但从 Ferriot 定理的证明中可知，垂心四面体各组对棱公垂线的垂足就是各面上的高线足，所以每组对棱公垂线的垂足在球 G 上.

(2) 设 O、G 和 H 是垂心四面体 $ABCD$ 的外心、重心和垂心，

O_1、G_1 和 H_1 是 $\triangle BCD$ 的外心、重心和垂心，则 O_1、G_1、H_1 同在一直线上，$G_1H_1=2O_1G_1$，且该直线是垂心四面体 $ABCD$ 的欧拉线在平面 BCD 上的射影.

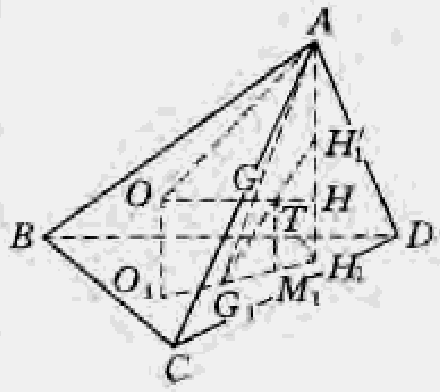


图 4－239

过 G_1H_1 的中点 M_1 作平面 BCD 的垂线，交 OH 于 T，则由 $OG=GH$，$GT=\frac{1}{3}GH$，得 $GT=\frac{1}{3}OG$.

又 $AG:GG_1=3:1$，所以 $G_1T/\!/OA$，因此 $G_1T=\frac{1}{3}OA=\frac{1}{3}R$（$R$ 为四面体 $ABCD$ 外接球的半径）.

设 G_1T 与 AH_1 交于 H_1'，则 $G_1T=H_1T=H_1'T=\frac{1}{3}R$，而 $AH'_1:H'_1H=OT:TH=2:1$，所以 G_1、H_1、H'_1 在以 T 为球心、$\frac{1}{3}R$ 为半径的球面上.

同样可证把四面体 $ABCD$ 的其余三个面上的重心，它的高线足以及各自顶点和四面体垂心 H 所连结的线段分为 $2:1$ 的分点，都在以 T 为球心、$\frac{1}{3}R$ 为半径的球面上.

由上可知，第二种十二点球的球心 T，在垂心四面体的欧拉线上，且 $OG:GT:TH=3:1:2$.

参考文献　[25,pp.182～184].

（郑君文）

阳马求积　今有阳马，广五尺，袤七尺，高八尺.问积几何？

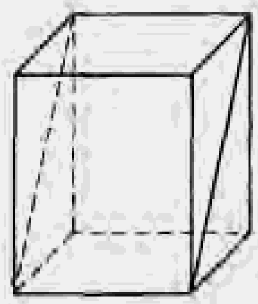
这是《九章算术》卷五"商功"的第 15 题.

阳马是底面为矩形，一条侧棱垂直于底面的四棱锥.

因为四棱锥的体积是等底等高四棱柱体积的三分之一，所以阳马的体积公式是："广（宽）袤（长）相乘，以高乘之，三而一."本题

答案是 $93\frac{1}{3}$ 立方尺.

这个公式是怎样得来的？数学家刘徽在本题的注释中给出了创造性的推导证明.



长方体

图 4－240

首先介绍几个概念：将长方体以对角面为截面，斜剖成两个全等的几何体称为堑堵(如图 4－240)；将堑堵再次斜剖得到的两个几何体一个称为阳马，另一个称为鳖臑(音 nào)(如图 4－241)：

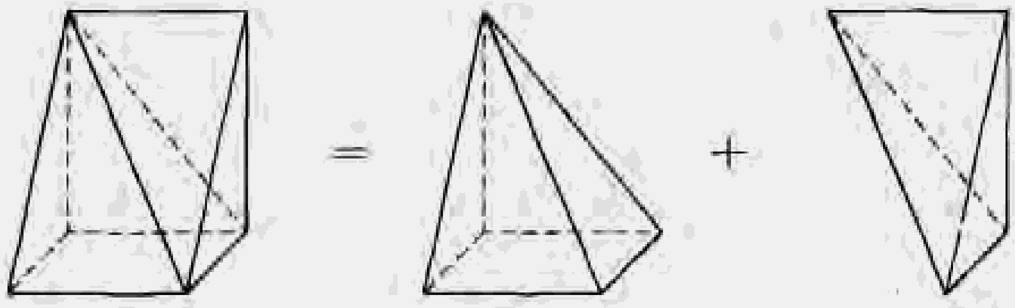


图 4－241

其实，堑堵是三棱柱，阳马是四棱锥，而鳖臑是个四面体，它的表面是四个直角三角形.

刘徽从立方体出发，将立方体斜剖得堑堵后，就在一个堑堵里斜剖得一个阳马和一个鳖臑. 由此出发，过堑堵各条棱的中点纵横剖分，因而所属的阳马和鳖臑也就随着被剖分(如图 4－242).

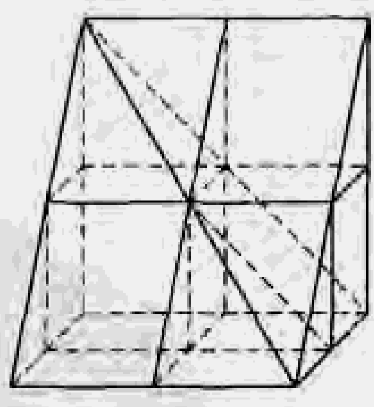


图 4－242

这时可以看到：阳马中包含着两个小阳马以及一个小立方体和两个小堑堵. 而两个小堑堵可以合成一个小立方体. 就是说，阳马剖分后包含着两个小阳马和两个小立方体；而鳖臑里包含着两个小鳖臑以及两个小堑堵，两个小堑堵同样可以合成一

个小立方体，就是说，鳖臑剖分后包含着两个小鳖臑和一个小立方体．当然，这时的一个小阳马和一个小鳖臑合起来还是一个小堑堵（如图 4－242 的左上角和右下角）．如果暂不考虑小阳马和小鳖臑，那么阳马的体积与鳖臑的体积之比就是 2∶1．刘徽指出，这种剖分可以在左上角和右下角的相关小堑堵里继续进行下去，阳马与鳖臑的体积之比仍是 2∶1．如果将这种剖分无限进行下去，直至“弥细”，“至细曰微，微则无形”，细微的阳马和鳖臑都到可以忽略不计的时候，阳马与鳖臑的体积之比仍是 2∶1，是“不易之率也”．于是

$$V_{阳马}=2V_{鳖臑},V_{堑堵}=3V_{鳖臑},$$
$$V_{立方}=2V_{堑堵}=6V_{鳖臑},$$
$$V_{阳马}=\frac{1}{3}V_{立方}.$$

从而可以得到一般公式：同（等）底同（等）高的锥体是柱体体积的$\frac{1}{3}$．

刘徽用极限的思想方法推证出阳马的体积，是个了不起的数学贡献，他的这个方法被称为“阳马术”．

参考文献 ［1，p．167］．

（眭秋生）

刍甍求积 今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈，问积几何？

本题是《九章算术》卷五“商功”的第 18 题．

甍（méng），屋脊．刍甍，是屋脊形的草堆，是我国古算中研究的一种几何体（如图 4－243）：下底是矩形，上是一条脊线，侧面分别是两个全等的等腰梯

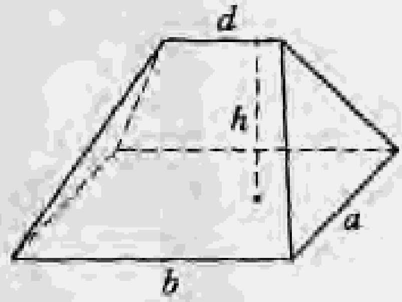


图 4－243

形和两个全等的等腰三角形.

刍甍的体积公式是：$V=\frac{1}{6}(2b+d)ah$. 其中 a、b、d、h 分别是下广、下袤、上袤和高.

这个公式可以通过平行于高的截面将刍甍分解为两个堑堵和四个阳马求积来推证(参见阳马求积).

本题答案是 $V=5\,000$ 立方尺.

参考文献　[1,p.169].

(睦秋生)

刍童求积　今有刍童下广二丈，袤三丈，上广三丈，袤四丈，高三丈. 问积几何？

本题是《九章算术》卷五"商功"的第19题.

刍童是我国古算中常研究的一类几何体. 它是上、下底均为矩形，四面都是等腰梯形的草堆(四条侧棱延长后不交于一点)(如图 4-244)，是拟柱体.

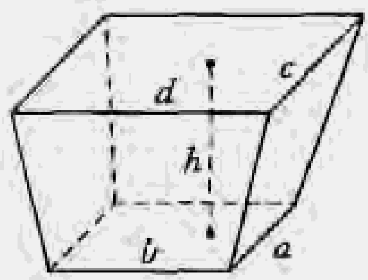


图 4-244

刍童的体积公式是

$$V=\frac{1}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]h.$$

其中 c、d、a、b 和 h 分别是刍童的上下广、袤和高.

这个公式可以通过用平行于高的截面将刍童分解成几个长方体、堑堵及阳马求积来推证.

本题答案是 26 500 立方尺.

参考文献　[1,p.170].

(睦秋生)

羡除求积　今有羡除，下广六尺，上广一丈，深三尺，末广八尺，无深，袤七尺. 问积几何？

本题是《九章算术》卷五“商功”的第16题.

羡除是一种墓道形体，是我国古代土建工程中常用的一种五面体：三面是等腰梯形，两侧面是直角三角形(如图4-245).



图4-245

羡除的体积计算公式是：“并三广，以深乘之，又以袤乘之，六而一.”即

$$羡除体积=\frac{1}{6}(上广+下广+末广)\times深\times袤.$$

本题所求答案是84立方尺.

欧洲曾把羡除体积公式当做是法国数学家勒让德发现的(见勒让德定理).实际上，我国最迟在1世纪就正确应用了.

参考文献 [1,p.168].

(眭秋生)

四面体体积的欧拉定理1(Euler theorem 1 for volume of tetrahedron) 四面体 $ABCD$ 中，设 $\angle BAC=\alpha$、$\angle CAD=\beta$，$\angle DAB=\gamma$，$S=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$，并设

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ &=4\sin S\sin(S-\alpha)\sin(S-\beta)\sin(S-\gamma),\end{aligned}$$

则该四面体的体积 V 为

$$V=\frac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD\sin A.$$

该定理是欧拉于1752年(*Novi*, *Comm.* Peter., 4)给出的.

在四面体 $ABCD$ 中，自 D 向对面 ABC 作高 DH，设 DH 为 h，则

$$V=\frac{1}{3}hS_{\triangle ABC}.$$

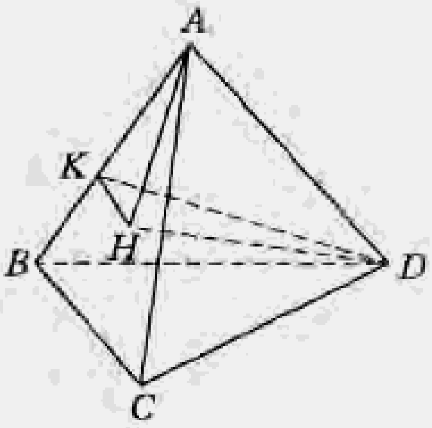


图 4-246

设 $\angle HAD=\theta$,则 $h=AD\sin\theta$. 又

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha$,

$$\therefore V=\frac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD\sin\alpha\sin\theta. \quad ①$$

过 H 作 AB 的垂线 HK,垂足为 K,连结 DK,则 $DK\perp AB$.

$\therefore AK=AD\cos\gamma$.

设 $\angle HAK=\omega$,则

$AK=AH\cos\omega=AD\cos\theta\cos\omega$,

$$\therefore \cos\gamma=\cos\theta\cos\omega. \quad ②$$

设 $\angle HAC=\omega'$,同样可得

$$\cos\beta=\cos\theta\cos\omega',\text{这里 }\omega+\omega'=\alpha. \quad ③$$

$$\because \sin^2\alpha\sin^2\theta=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\theta)$$
$$=1-\cos^2\alpha-\cos^2\theta\sin^2\alpha,$$

而据 ② 和 ③,有

$$\cos^2\theta\sin^2\alpha=\cos^2\theta\sin^2(\omega+\omega')$$
$$=\cos^2\theta(\cos^2\omega'+\cos^2\omega-2\cos^2\omega\cos^2\omega'+2\sin\omega\cos\omega'\sin\omega'\cos\omega)$$
$$=\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos^2\theta\cos\omega\cos\omega'(\cos\omega\cos\omega'-\sin\omega\sin\omega')$$
$$=\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha.$$

$$\therefore \sin^2\alpha\sin^2\theta=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=-\frac{1}{2}[(1+\cos 2\alpha)+(\cos 2\beta+\cos 2\gamma)]+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=-[\cos^2\alpha+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)]+\cos\alpha[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)]$$
$$=-[\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)][\cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)]$$

$$= -4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2}$$

$$= 4\sin S\sin(S-\alpha)\sin(S-\beta)\sin(S-\gamma).$$

即 $\sin^2 A = \sin^2\alpha\sin^2\theta$，或 $\sin A = \sin\alpha\sin\theta$.

把上式代入①，得

$$V = \frac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD\sin A.$$

该定理也可以利用向量来证.

取 A 为坐标原点，设 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 上的单位向量分别为 $\vec{l}$、$\vec{m}$、$\vec{n}$，则

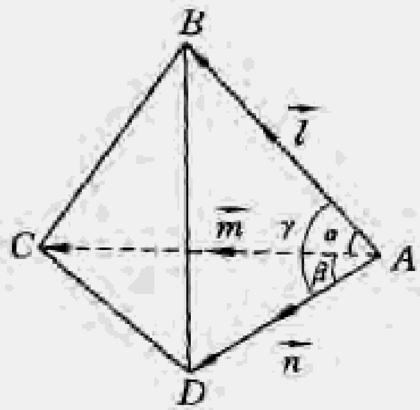


图 4-247

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$$

$$= \frac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD\left|(\vec{l},\vec{m},\vec{n})\right|.$$

记 $\vec{l}$、$\vec{m}$、$\vec{n}$ 的方向余弦各为 $\cos\alpha_1$、$\cos\alpha_2$、$\cos\alpha_3$，$\cos\beta_1$、$\cos\beta_2$、$\cos\beta_3$，$\cos\gamma_1$、$\cos\gamma_2$、$\cos\gamma_3$，于是有

$$\left|(\vec{l},\vec{m},\vec{n})\right|^2 = \begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3 & \cos\alpha_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cos\gamma_3\\ \cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3 & \cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3 & \cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3\\ \cos\alpha_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cos\gamma_3 & \cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3 & \cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$$

$=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$

$=4\sin S\sin(S-\alpha)\sin(S-\beta)\sin(S-\gamma)$.

$\therefore V=\dfrac{1}{6}AB\cdot AC\cdot AD\sin A$.

参考文献 [25,pp.142~143].

（郑君文）

四面体体积的欧拉定理 2（Euler theorem 2 for volume of tetrahedron） 用四面体的六条棱长表示它的体积.

该定理是欧拉提出并解决了的，见 *Memoires de petersbourg* (1758)，但给出的体积公式没有使用行列式. 为简便起见，下面对这四面体体积公式还介绍用行列式表达的形式和证明.

设四面体 $DABC$ 的六条棱长为 $DA=l,DB=m,DC=n,BC=a,CA=b,AB=c$，高 $DH=h$，则

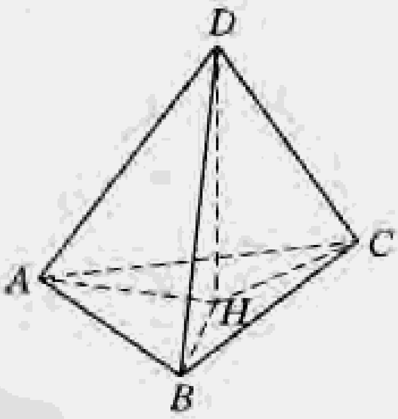


图 4-248

$$V=\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle ABC}.$$

据三斜求积公式，得

$$V^2=\frac{1}{9}h^2\cdot\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{9}h^2\cdot\frac{1}{16}[4c^2a^2-(c^2+a^2-b^2)^2].$$

因此，用六条棱长表示四面体的体积，只要设法用六条棱长来表示高 h.

连结 HA、HB、HC，设 $HA=x,HB=y,HC=z$，则

$$x^2 = l^2 - h^2, y^2 = m^2 - h^2, z^2 = n^2 - h^2.$$

这里 H、A、B、C 是同一平面上的四点，且它们之间的距离存在着一定关系，从而就可利用它消去 x、y、z，求出 h 的表达式.

设 $\angle BHC = \alpha, \angle CHA = \beta$, $\angle AHB = \gamma, \alpha + \beta + \gamma = 360°$，则

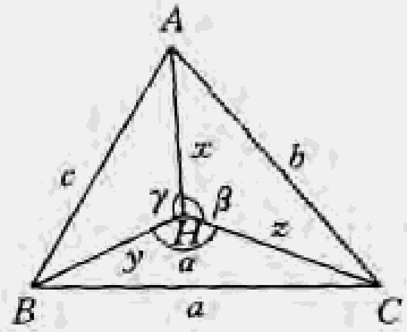


图 4-249

$$\cos\alpha = \frac{y^2 + z^2 - a^2}{2yz},$$

$$\cos\beta = \frac{z^2 + x^2 - b^2}{2zx},$$

$$\cos\gamma = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2xy}.$$

而 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma$$

$$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma$$

$$= 1 + \cos\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$\therefore \sum \frac{(y^2+z^2-a^2)^2}{4y^2z^2}$$

$$= 1 + \frac{(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)}{4x^2y^2z^2},$$

再化成 $\sum a^2(x^2-y^2)(x^2-z^2) - \sum a^2(b^2+c^2-a^2)x^2 + a^2b^2c^2 = 0$. 这里 $\sum a^2(x^2-y^2)(x^2-z^2) = a^2(x^2-y^2)(x^2-z^2) + b^2(y^2-z^2)(y^2-x^2) + c^2(z^2-x^2)(z^2-y^2)$ 等.

将 $x^2 = l^2 - h^2$ 等代入上式，得

$$h^2 = \frac{\sum a^2(b^2+c^2-a^2)l^2 - \sum a^2(l^2-m^2)(l^2-n^2) - a^2b^2c^2}{\sum a^2(b^2+c^2-a^2)},$$

$$\therefore V^2=\frac{1}{9\times16}\Big[\sum a^2(b^2+c^2-a^2)l^2-$$
$$\sum a^2(l^2-m^2)(l^2-n^2)-a^2b^2c^2\Big],$$

即 $$288V^2=2\Big[\sum a^2(b^2+c^2-a^2)l^2-$$
$$\sum a^2(l^2-m^2)(l^2-n^2)-a^2b^2c^2\Big].$$

上述等式的右边可用行列式表示，于是得

$$288V^2=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&l^2&m^2&n^2\\1&l^2&0&c^2&b^2\\1&m^2&c^2&0&a^2\\1&n^2&b^2&a^2&0\end{vmatrix}.$$

利用行列式来求，可设(x_i,y_i,z_i)为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 的坐标，棱 A_iA_j 的长用 $d_{ij}(i、j=1,2,3,4,d_{ij}=d_{ji})$表示，则

$$6^2V^2=\begin{vmatrix}1&x_1&y_1&z_1\\1&x_2&y_2&z_2\\1&x_3&y_3&z_3\\1&x_4&y_4&z_4\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&x_1&y_1&z_1\\0&1&x_2&y_2&z_2\\0&1&x_3&y_3&z_3\\0&1&x_4&y_4&z_4\end{vmatrix}^2$$

$$=-\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&x_1&y_1&z_1\\0&1&x_2&y_2&z_2\\0&1&x_3&y_3&z_3\\0&1&x_4&y_4&z_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&y_1&y_2&y_3&y_4\\0&z_1&z_2&z_3&z_4\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 & \sum x_1x_3 & \sum x_1x_4 \\ 1 & \sum x_2x_1 & \sum x_2^2 & \sum x_2x_3 & \sum x_2x_4 \\ 1 & \sum x_3x_1 & \sum x_3x_2 & \sum x_3^2 & \sum x_3x_4 \\ 1 & \sum x_4x_1 & \sum x_4x_2 & \sum x_4x_3 & \sum x_4^2 \end{vmatrix}.$$

这里 $\sum x_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$，$\sum x_1x_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ 等.

把上面行列式的第 2、3、4、5 行各乘以 -2，再把第一列乘以 $-\frac{1}{2}$，得

$$36V^2 = -\frac{1}{(-2)^4}\cdot(-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2\sum x_1^2 & -2\sum x_1x_2 & -2\sum x_1x_3 & -2\sum x_1x_4 \\ 1 & -2\sum x_2x_1 & -2\sum x_2^2 & -2\sum x_2x_3 & -2\sum x_2x_4 \\ 1 & -2\sum x_3x_1 & -2\sum x_3x_2 & -2\sum x_3^2 & -2\sum x_3x_4 \\ 1 & -2\sum x_4x_1 & -2\sum x_4x_2 & -2\sum x_4x_3 & -2\sum x_4^2 \end{vmatrix}.$$

把上面行列式的第一行分别乘以 $\sum x_1^2$、$\sum x_2^2$、$\sum x_3^2$、$\sum x_4^2$，各加到第 2、3、4、5 行，再把第一列分别乘以 $\sum x_1^2$、$\sum x_2^2$、$\sum x_3^2$、$\sum x_4^2$，各加到第 2、3、4、5 列，并注意到

$\sum x_i^2 - 2\sum x_ix_j + \sum x_j^2 = \sum (x_i - x_j)^2 = d_{ij}^2$ $(i、j = 1, 2, 3, 4)$，于是就得到

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

这就是所要求的结果.

当然也可根据四面体体积的欧拉定理 1 来求,即在四面体 $DABC$ 中,设 $\angle ADB=\theta$,$\angle BDC=\varphi$,$\angle CDA=\omega$,则

$$V=\frac{1}{6}lmn\cdot\sqrt{1-\sum\cos^2\theta+2\cos\theta\cos\varphi\cos\omega},$$

即 $$36V^2=l^2m^2n^2(1-\sum\cos^2\theta+2\cos\theta\cos\varphi\cos\omega).$$

把 $\cos\theta=\dfrac{l^2+m^2-c^2}{2lm}$、$\cos\varphi=\dfrac{m^2+n^2-a^2}{2mn}$ 和 $\cos\omega=\dfrac{n^2+l^2-b^2}{2nl}$ 代入上式,再通过复杂的计算也可得到所求的结果.

当 $V=0$ 时,就成为平面上四点间距离的关系式,它和空间五点间距离关系的拉格朗日定理的形式是一致的.

再者使用同样的方法,可以得到相当于海伦公式或三斜求积公式的 $\triangle ABC$ 的面积公式

$$16S^2=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&c^2&b^2\\1&c^2&0&a^2\\1&b^2&a^2&0\end{vmatrix}.$$

参考文献 [25,pp. 247~248],[16,p. 282],[21,pp. 312~316].

(郑君文)

四面体体积的 Servois 定理(Servois' theorem for volume of a tetrahedron) 设四面体的一组对棱的长为 a 与 a',它们之间的距离为 d,所成的角为 θ,则该四面体的体积为:

$$V=\frac{1}{6}aa'd\sin\theta.$$

该定理是法国数学家 F. J. Servois(1767~1847)于 1810 年发

现的.

四面体 $ABCD$ 中，对棱 AB 和 CD 的长各为 a 与 a'. 分别过 C、D 作 AB 的平行线 CE、DF，取 $CE=DF=AB$，则 A 到平面 CDE 的距离等于异面直线 AB 与 CD 之间的距离 d；$\angle ECD$ 为 AB 与 CD 所成的角，即 $\angle ECD=\theta$.

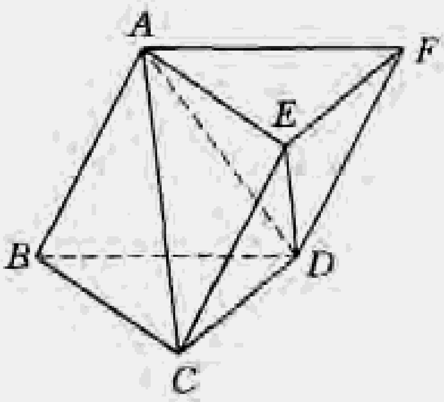


图 4-250

因为四面体 $ABCD$ 与四面体 $ACDE$ 的底 ABC 和 AEC 的面积相等，高又相同，所以它们的体积相等，而四面体 $ACDE$ 的体积等于 $\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle CDE}$，所以

$$V=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle CDE}=\frac{1}{3}d\cdot\frac{1}{2}aa'\sin\theta$$
$$=\frac{1}{6}aa'd\sin\theta.$$

推论 定长线段 AB、CD 分别在异面直线 l、m 上移动，则其所构成的四面体 $ABCD$ 的体积为定值.

该推论为施泰纳于 1810 年所发现.

参考文献 [25，p. 142].

（郑君文）

Lévy 定理(Lévy's theorem) 若 M、N 各是四面体一双对棱上按同一比 $m:n$ 的分点，则过 MN 的平面也把该四面体分成体积为 $m:n$ 的两部分.

该定理是 Lévy 于 1828 年得到的，见 *Correspondance Math. et Physique* Vol. 4.

在四面体 $ABCD$ 中，设 M、N 各是对棱 AD、BC 上的点，且 $AM:MD=BN:NC=m:n$.

过 MN 的平面截四面体 $ABCD$，设其截面为 $MQNP$，所分成的两部分的体积各为 V_1 与 V_2，则

$$V_1 = V_{ABNQ} + V_{A\text{-}QNPM},$$
$$V_2 = V_{DCNP} + V_{D\text{-}QNPM}.$$

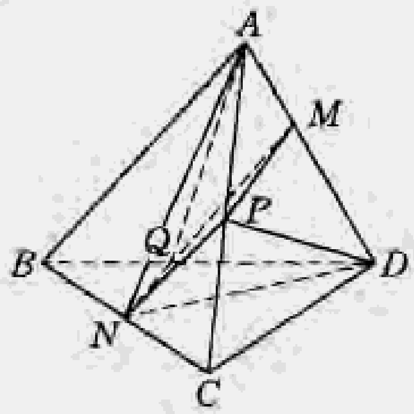


图 4-251

因为 $$\frac{V_{A\text{-}QNPM}}{V_{D\text{-}QNPM}} = \frac{m}{n}, \qquad ①$$

又据四面体体积的欧拉定理 1，得

$$\frac{V_{ABNQ}}{V_{ABCD}} = \frac{BA \cdot BN \cdot BQ}{BA \cdot BC \cdot BD} = \frac{mBQ}{(m+n)BD}.$$

同样可得

$$\frac{V_{DCNP}}{V_{DCBA}} = \frac{nCP}{(m+n)CA}.$$

于是 $$\frac{V_{ABNQ}}{V_{DCNP}} = \frac{m \cdot BQ \cdot CA}{n \cdot BD \cdot CP}.$$

在空间四边形 $BCAD$ 中，据塞瓦—卡诺定理的推论 2 之逆定理，得

$$\frac{BQ}{QD} = \frac{CP}{PA}, \qquad \therefore \frac{BQ}{BD} = \frac{CP}{CA}.$$

因此 $$\frac{V_{ABNQ}}{V_{DCNP}} = \frac{m}{n}. \qquad ②$$

由①与②，得 $V_1 : V_2 = m : n$.

参考文献 [25，p. 145].

（郑君文）

Mention 定理（Mention's theorem） 四面体 $ABCD$ 中，以 AB 为棱的二面角记为 $\widehat{AB}$ 等，面 BCD 上的高记为 h_a 等，它的体积记为 V，则

(1) $\dfrac{AB}{\sin\widehat{AB}}=\dfrac{2S_{\triangle ABD}\cdot S_{\triangle ABC}}{3V}=\dfrac{6V}{h_ch_d}$ 等；

(2) $\dfrac{BC\cdot AD}{\sin\widehat{BC}\sin\widehat{AD}}=\dfrac{AB\cdot CD}{\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}}$

$=\dfrac{AC\cdot BD}{\sin\widehat{AC}\sin\widehat{BD}}$

$=\dfrac{36V^2}{h_ah_bh_ch_d}.$

该定理是 Mention 于 1859 年得到的，见 *Nouvelles Annales de Math.*

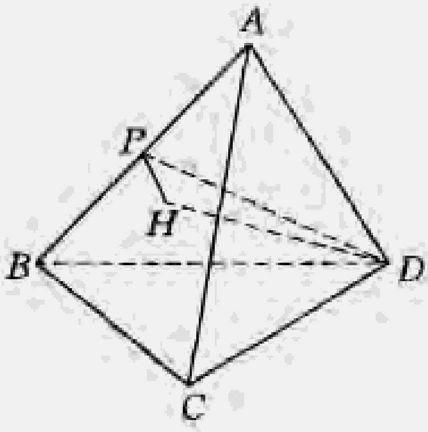


图 4-252

(1) 从 D 点向平面 ABC 作垂线 DH，H 为垂足，于是 $DH=h_d$. 过 H 作 AB 的垂线 HP，P 为垂足，连结 PD，则 $\angle HPD$ 为二面角 AB 的平面角.

$$\therefore \sin\widehat{AB}=\frac{HD}{PD}=\frac{HD\cdot AB}{PD\cdot AB}=\frac{HD\cdot AB}{2S_{\triangle ABD}}.$$

$$\because S_{\triangle ABD}=\frac{3V}{h_c},S_{\triangle ABC}=\frac{3V}{h_d},$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin\widehat{AB}}=\frac{2S_{\triangle ABD}\cdot S_{\triangle ABC}}{3V}=\frac{6V}{h_ch_d}.$$

(2) 据(1)

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BC}}\cdot\frac{AD}{\sin\widehat{AD}}=\frac{4S_{\triangle ABC}S_{\triangle BCD}S_{\triangle ADB}S_{\triangle ADC}}{9V^2}$$

$$=\frac{4S_{\triangle ABC}S_{\triangle BCD}S_{\triangle ADB}S_{\triangle ADC}\cdot h_ah_bh_ch_d}{9V^2\cdot h_ah_bh_ch_d}=\frac{36V^2}{h_ah_bh_ch_d}.$$

同样可证

$$\frac{AB\cdot CD}{\sin\widehat{AB}\sin\widehat{CD}}=\frac{36V^2}{h_ah_bh_ch_d},$$

$$\frac{AC\cdot BD}{\sin\widehat{AC}\sin\widehat{BD}}=\frac{36V^2}{h_ah_bh_ch_d}.$$

参考文献 [25. pp. 145～146].

（郑君文）

Crelle 定理（Crelle's theorem） 设 a 和 a'、b 和 b'、c 和 c' 各是四面体 $ABCD$ 三双对棱的长，它的外接球半径为 R，体积为 V. 若 T 表示以 aa'、bb'、cc' 为三边的三角形面积，则 $T=6RV$.

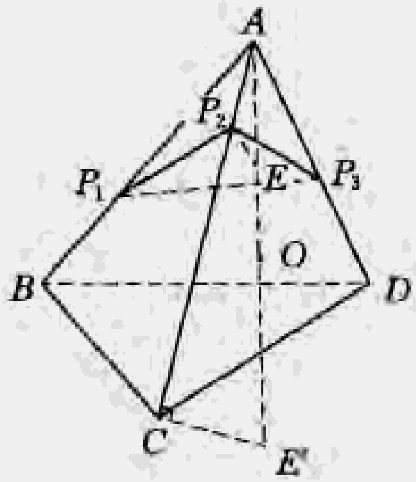


图 4-253

该定理是德国数学家 A. L. Crelle (1780～1855)给出的，它发表在 1821 年出版的 *Sammlung Math.* Aufsätze 上. 下面的证明出自德国数学家 K. G. C. von Staudt (1798～1867)，见 *Crelle's Jour.* 57(1860).

设 $BC=a, AD=a', AC=b, BD=b', AB=c, CD=c'$. 过 B、C、D 作一球，设与 AB、AC、AD 各交于 P_1、P_2、P_3，记 p 为点 A 对于这球的幂，则

$$p=AP_2\cdot AC=AP_3\cdot AD=AP_1\cdot AB.$$

设 O 为四面体外接球的球心，AO 与平面 $P_1P_2P_3$ 交于点 E，与球 O 交于另一点 E'，则 $AO\perp$ 平面 $P_1P_2P_3$，所以

$$p=AP_2\cdot AC=2R\cdot AE. \tag{①}$$

再设四面体 $AP_1P_2P_3$ 的体积为 V'，则据四面体体积的欧拉定理 1，得

$$\frac{V'}{V}=\frac{AP_1\cdot AP_2\cdot AP_3}{AB\cdot AC\cdot AD}.$$

而
$$AP_1\cdot c=AP_2\cdot b=AP_3\cdot a'=p, \tag{②}$$

$$\therefore \frac{V'}{V}=\frac{p^3}{c^2b^2a'^2}. \tag{③}$$

又 $\triangle AP_1P_2\backsim\triangle ACB$，$\triangle AP_2P_3\backsim\triangle ADC$，$\triangle AP_3P_1\backsim\triangle ABD$，

$\therefore \frac{P_1P_2}{a}=\frac{AP_1}{b},\frac{P_2P_3}{c'}=\frac{AP_2}{a'},\frac{P_3P_1}{b'}=\frac{AP_3}{c}.$

再由 ② 得

$$\frac{P_1P_2}{aa'}=\frac{P_2P_3}{cc'}=\frac{P_3P_1}{bb'}=\frac{p}{cba'}.$$

由此可知，$\triangle P_1P_2P_3$ 与以 aa'、cc'、bb' 为三边的三角形相似，

$\therefore S_{\triangle P_1P_2P_3}=T\cdot\frac{p^2}{c^2b^2a'^2}.$

但因 $AE\perp$ 平面 $P_1P_2P_3$，

$\therefore V'=\frac{1}{3}AE\cdot S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{AE\cdot p^2}{3c^2b^2a'^2}\cdot T.$

把它代入③，得

$$\frac{p^3V}{c^2b^2a'^2}=\frac{p^2\cdot AE}{3c^2b^2a'^2}\cdot T\text{，即 }3pV=AE\cdot T.$$

再把 ① 代入上式，得

$$6R\cdot AE\cdot V=AE\cdot T,\therefore T=6RV.$$

参考文献 [25,pp.143~144].

（郑君文）

勒让德定理（Legendre's theorem） 截三棱柱的体积，等于以其下底为公共底，上底各顶点为顶点的 3 个三棱锥的体积之和.

该定理是勒让德于 1784 年得到的.

把截三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 分割成 3 个三棱锥 $B'-ABC$、$B'-A'AC$ 和 $B'-A'CC'$.

$\because BB'\parallel AA'$，$\therefore BB'\parallel$ 平面 $A'AC$，

$\therefore V_{B'-A'AC}=V_{B-A'AC}$，

$V_{B'-A'CC'}=V_{B-A'CC'}$.

而三棱锥 $B-A'AC$ 即为三棱锥 $A'-ABC$，三棱锥 $B-A'CC'$ 即为三棱锥 $A'-BCC'$.

$\because AA'\parallel CC'$，$\therefore AA'\parallel$ 平面 $B'CC'$，

$\therefore V_{A'-BCC'}=V_{A-BCC'}$.

又三棱锥 $A-BCC'$ 即为三棱锥 $C'-ABC$，因此

$$V_{ABC-A'B'C'}=V_{A'-ABC}+V_{B'-ABC}+V_{C'-ABC}.$$

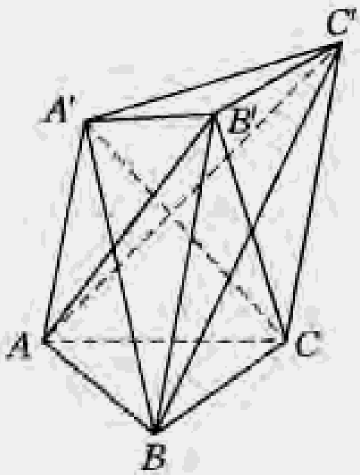


图 4-254

三棱柱为截三棱柱的特殊情形(即平面 $A'B'C'$ // 平面 ABC)，所以三棱柱的体积，等于以其下底为底，上底一顶点为顶点的三棱锥体积的 3 倍. 由此就可从三棱柱的体积公式导出三棱锥的体积公式.

推论 截三棱柱的体积，等于直截面的面积和侧棱的算术平均数的乘积.

截三棱柱(羡除)的体积公式，早就载于我国《九章算术》中，并广泛应用于实际. 见**羡除求积**.

参考文献 [25，pp. 161～162]，[16，pp. 92～93].

(郑君文)

Blondat 定理(Blondat's theorem) 截棱柱的体积，等于其直截面的面积与两底面重心间距离的乘积.

该定理是 Blondat 于 1811 年得到的.

把截棱柱 $A_1A_2\cdots A_n-A_1'A_2'\cdots A_n'$ 分成截三棱柱 $A_1A_2A_3-A_1'A_2'A_3'$、$A_1A_3A_4-A_1'A_3'A_4'$、…、$A_1A_{n-1}A_n-A_1'A_{n-1}'A_n'$，设 G 和 G' 分别是该 n 截棱柱两底面的重心，G_1、G_2、…、G_{n-2} 和 G_1'、G_2'、…、G'_{n-2} 各是两底面所分成的三角形的重心，则 GG'、G_1G_1'、…、$G_{n-2}G_{n-2}'$ 都与它的侧棱平行.

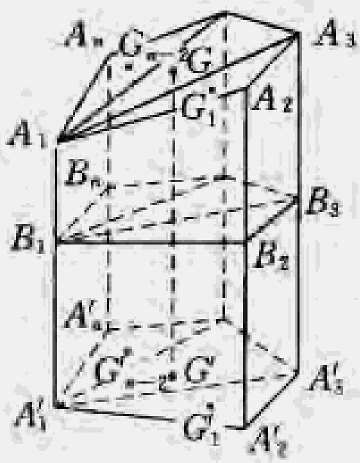


图 4-255

作该截棱柱的直截面 $B_1B_2\cdots B_n$，它被分成了 $\triangle B_1B_2B_3$、…、$\triangle B_1B_{n-1}B_n$，设截三棱柱 $A_1A_2A_3-A_1'A_2'A_3'$ 的体积为 V_1、…、截三棱柱 $A_1A_{n-1}A_n-A_1'A_{n-1}'A_n'$ 的体积为 V_{n-2}，则

$$V_1=\frac{1}{3}(A_1A_1'+A_2A_2'+A_3A_3')\cdot S_{\triangle B_1B_2B_3},$$

……

$$V_{n-2}=\frac{1}{3}(A_1A_1'+A_{n-1}A_{n-1}'+A_nA_n')\cdot S_{\triangle B_1B_{n-1}B_n}.$$

而 $\frac{1}{3}(A_1A_1'+A_2A_2'+A_3A_3')=G_1G_1'$,

……

$$\frac{1}{3}(A_1A_1'+A_{n-1}A_{n-1}'+A_nA_n')=G_{n-2}G_{n-2}',$$

所以截棱柱 $A_1A_2\cdots A_n\text{-}A'_1A_2'\cdots A_n'$ 的体积为

$$V=G_1G_1'\cdot S_{\triangle B_1B_2B_3}+\cdots+G_{n-2}G_{n-2}'\cdot S_{\triangle B_1B_{n-1}B_n}.$$

又 $$GG'=\frac{G_1G_1'\cdot S_{\triangle B_1B_2B_3}+\cdots+G_{n-2}G_{n-2}'\cdot S_{\triangle B_1B_{n-1}B_n}}{S_{\triangle B_1B_2B_3}+\cdots+S_{\triangle B_1B_{n-1}B_n}},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad V&=GG'\cdot(S_{\triangle B_1B_2B_3}+\cdots+S_{\triangle B_1B_{n-1}B_n})\\&=GG'\cdot S.\end{aligned}$$

这里 S 是截棱柱的直截面的面积.

推论 截棱柱的体积,等于其一底面的面积与另一底面的重心到这底面的距离之乘积.

参考文献 [25,p.162],[16,pp.274～275].

(郑君文)

多面体的欧拉定理(Euler's theorem of polyhedron) 设多面体的面数为 F,顶点数为 V,棱数为 E,则

$$F+V=E+2.$$

欧拉于1750年发表了上述结果,第二年给出了一个证明.他原来的问题是要给多面体分类,由于要用该定理,从而引起了他的注意.实际上在1639年笛卡尔就知道了该定理,这是由莱布尼茨于1675～1676抄自笛卡尔一份未发表的手稿为世人所知的,但笛卡尔没有给出证明.

下面介绍柯西和勒让德对本定理所给出的证明.

柯西于1811年给出了该定理的证明,大意如下:

设想多面体是空心的,其表面由薄橡皮做成.把它切掉一个面,再将剩下的表面进行形变,直至使它铺在一个平面上.于是由这些顶点与棱构成的平面网络中,它所包含的顶点数与棱数(即边数)与原来多面体所包含的相同,而多边形的数目则比原多面体的面数少一个,所以只要证明$V+F=E+1$就好了.

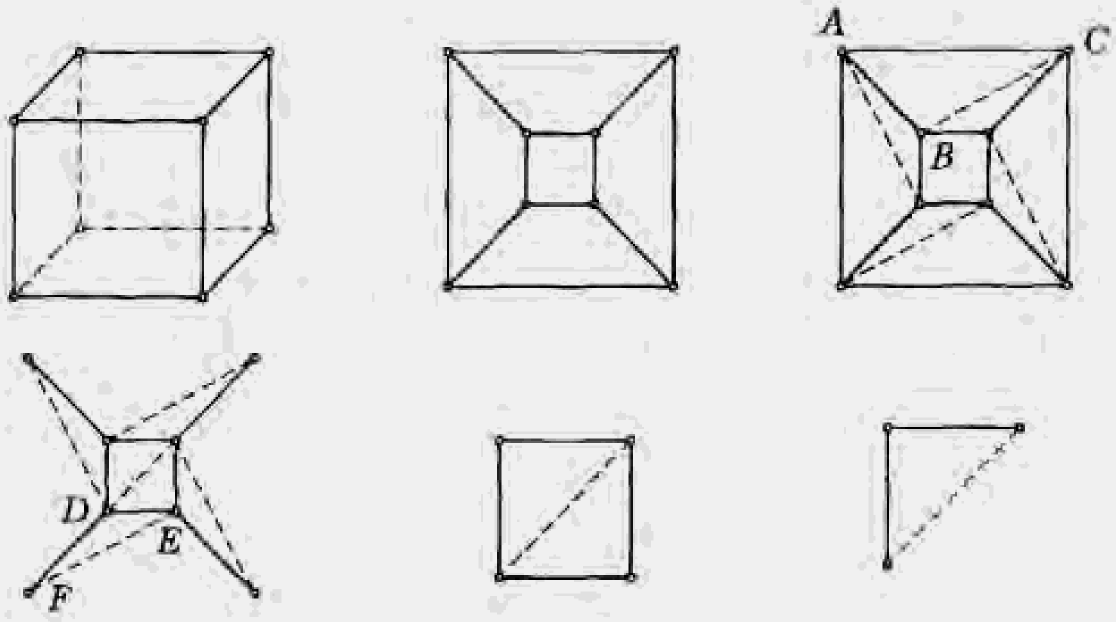


图 4-256

把这个平面网络剖分为三角形网络,即若是多边形的就添置对角线,直至都是三角形为止.由于添一条对角线,就增加一个面和一条边(棱),而顶点数保持不变,所以$V+F-E$的值在剖分前后相同.

再看这个三角形网络,有些三角形只有一条边(棱)在边界上(如$\triangle ABC$中的AC),则去掉这条边就减少一个面和一条棱,而顶点数没有改变,所以$V+F-E$的值与原来未去掉边前的相同;有些三角形有两条边位于边界上(如$\triangle DEF$中的FD、FE),则去掉这两条边,就减少两条棱、一个面和一个顶点,这样$V+F-E$的值仍保持与原来的相同.按照这样逐次去掉边界上的三角形的边,

直到最后剩下一个三角形为止. 这时它具有三条棱、三个顶点和一个面,所以 $V+F-E$ 的值与 $3+1-3$ 相同,即 $V+F-E=3+1-3=1$,也就是 $V+F=E+1$.

勒让德于 1794 年利用向径投影证明了该定理,大意是:

在凸多面体的内部任取一点 O 为球心,取单位长为半径作一球面,则用向径投影将多面体表面映射到球面上,即以 O 为端点和多面体上任一点 x 作成的射线 Ox,与球面有且只有一个交点 y,这里 y 就是 x 的像,于是多面体所有面的像,就不重叠地盖满整个球面,每个面的像就是该球面上的一个球面多边形. 因此该多面体就投影成这球面上的 F 个球面多边形、E 条棱(球面多边形的边)和 V 个顶点.

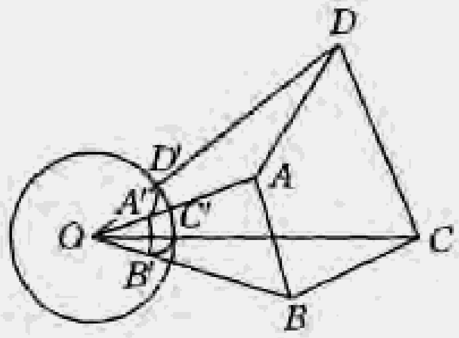


图 4-257

设第 j 个球面多边形为 n_j 边形,它的内角是 $\alpha_{ji}(i=1,2,\cdots,n_j)$,面积为 Q_j,则据球面多边形的面积公式得

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}-(n_j-2)\pi,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{j=1}^{F}Q_j&=\sum_{j=1}^{F}\left[\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}-(n_j-2)\pi\right]\\&=\sum_{j=1}^{F}\left(\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}\right)-\pi\sum_{j=1}^{F}n_j+2\pi F.\end{aligned}$$

这里 $\sum_{j=1}^{F}Q_j$ 是 F 个球面多边形的面积和,因为它们不重叠地盖满整个球面,所以 $\sum_{j=1}^{F}Q_j=4\pi$. $\sum_{j=1}^{F}\left(\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji}\right)$ 是所有球面多边形的内角和,也就是围绕V个顶点所有那些角的和,而围绕一个顶点的各

个角的和为 2π,所以 $\sum_{j=1}^{F}(\sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ji})=2\pi V$. $\sum_{j=1}^{F}n_j$ 是所有球面多边形的边数之和,它是多面体棱数的两倍,所以 $\pi\sum_{j=1}^{F}n_j=2\pi E$. 因此得

$$4\pi=2\pi V-2\pi E+2\pi F,$$

即 $V+F=E+2$.

在该定理中,欧拉没有对所给的多面体加以任何限制,但他的证明仅适用于凸多面体的情形. 勒让德曾对多面体下过相当一般的定义,然而他给出的证明也不适用于一般的多面体,但又不仅适用于凸多面体. 后来他在 1809 年《几何要义》(法文)精装本的补注里,就把该定理限制于凸多面体. 所以猜想他曾碰到过 $V+F\neq E+2$ 的多面体,为"安全"起见,把它撤退到了凸多面体. 首先注意到这个问题的是瑞士数学家 S. A. J. Lhuilier (1750～1840),他在 1813 年发表了如图4-258的反例等(注意,中间小立方体是空心的,即仅计其 4 个内表面),这里 $V+F-E=0$. 由此可见,欧拉定理只适用于某一类多面体.

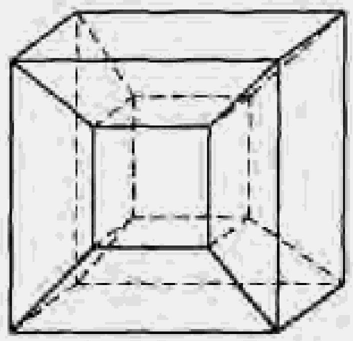


图 4-258

一个多面体的表面,如果能连续变形为一个球面,那么该多面体称为零类多面体,否则就称为非零类多面体. 欧拉定理仅适用于零类多面体.

欧拉定理可推广如下:

$$V+F-E=2-2p.$$

对于零类多面体,就是在 $p=0$ 的情形;而对于可连续变形(即拓扑变换)为环面的多面体(如上所举反例的那种多面体),就是 $p=1$. 这里 $2-2p$ 称为欧拉示性数.

参考文献 [12, p. 267], [17, pp. 305～308], [23, p. 2, 10,

17,28],[20,p.3,9].

（郑君文）

正多面体的种类(type of regular polyhedron) 正多面体最多只有五种.

关于正多面体不能多于五种的证明,见于欧几里得《几何原本》第十三篇的命题18的推论.一般认为五种正多面体已为毕达哥拉斯学派所知,而柏拉图学派知道了正多面体最多只有五种,但关于正多面体不能多于五种的证明,最先可能是由Theaetetus(约前415～前369)给出的.由于柏拉图在他的哲学中把五种正多面体放到很重要的地位,因此正多面体又有“柏拉图体”之名.

《几何原本》中的证明,是运用了“多面角的各个内角之和小于四个直角”这一定理.由于组成多面角至少要三个面,这样都用正三角形来构成多面角,它的面只可能是三个、四个或五个,此时正多面体只可能是每个顶点处由三个正三角形拼成的正四面体,或四个正三角形拼成的正八面体,或五个正三角形拼成的正二十面体.但用六个或六个以上正三角形不可能构成多面角,否则将与“多面角的各个面角之和小于四直角”这一定理相矛盾.再有每个顶点处用三个正方形拼成的正六面体(即正方体),而用四个或四个以上正方形就不可能构成多面角.还有每个顶点处用三个正五边形拼成的正十二面体,而用四个或四个以上正五边形则不可能构成多面角.显然,除此之外多面体不可能都由其他的正多边形构成.因此正多面体最多只有五种.

这里正多面体是仅就凸多面体而言的,并且两个相似的正多面体属于同一类.

该定理也可仅用多面体的欧拉定理来证明.设正多面体的顶点数为V,面数为F,棱数为E,它的每个面为正n边形,每个顶点发出m条棱,则$nF=2E$,$mV=2E$,又$V+F=E+2$,这样根据上述三式,即可得

$$F=\frac{4m}{2(m+n)-mn}.$$

注意到 m、n 都是大于或等于 3 的整数，F 是大于或等于 4 的整数，于是有

(1) 当 $n=3$ 时，$F=\frac{4m}{6-m}$，这里 m 至多取 3、4、5，所以可能有正四面体、正八面体和正二十面体.

(2) 当 $n=4$ 时，$F=\frac{2m}{4-m}$，而 m 只可能取 3，所以可能有正六面体.

(3) 当 $n=5$ 时，$F=\frac{4m}{10-3m}$，而 m 只可能取 3，所以可能有正十二面体.

当 $n\geqslant 6$ 时，m 不存在，也就是不可能再有其他正多面体.

参考文献　[25, pp. 167～168]，[11, p. 54, p. 96]，[14, p. 674]，[17, pp. 308～309]，[15, p. 90].

（郑君文）

多面体面的欧拉定理（Euler's theorem for face of a polyhedron）　不存在所有的面都是五边以上多边形的零类多面体.

该定理是欧拉于 1788 年得到的.

设一零类多面体有 V 个顶点、F 个面和 E 条棱，如果它有 F_3 个三角形的面，F_4 个四边形的面，…，F_n 个 n 边形的面，以及有 A_3 个三面角，A_4 个四面角，…，A_m 个 m 面角（$n, m\in\{0\}\cup\mathbf{N}$），则

$$F=F_3+F_4+F_5+\cdots+F_n,$$

$$2E=3F_3+4F_4+5F_5+\cdots+nF_n, \quad ①$$

$$V=A_3+A_4+A_5+\cdots+A_m,$$

$$2E=3A_3+4A_4+5A_5+\cdots+mA_m, \quad ②$$

且

$$2E\geqslant 3F, \quad ①'$$

$$2E \geqslant 3V. \qquad ②'$$

因为该多面体是零类多面体，所以有 $F+V=E+2$. 把它的两边同乘以 2，再用①代入，得

$$2(F_3+F_4+\cdots+F_n)+2V$$
$$=3F_3+4F_4+5F_5+\cdots+nF_n+4.$$

$$\therefore 2V=4+F_3+2F_4+3F_5+\cdots+(n-2)F_n.$$

把②′的两边同乘以 2，再将①与上式代入，得

$$2(3F_3+4F_4+5F_5+\cdots+nF_n)$$
$$\geqslant 3[4+F_3+2F_4+3F_5+\cdots+(n-2)F_n],$$

$$\therefore 3F_3+2F_4+F_5 \geqslant 12+F_7+2F_8+\cdots+(n-6)F_n. \quad ③$$

假设 $F_3=F_4=F_5=0$，则据③就得到一个矛盾的结果，因此各面都超过五边的多边形的多面体是不存在的.

据③还可得到下列结论：

零类多面体如果没有四边形的面与五边形的面，那么至少有 4 个三角形的面；如果没有三角形的面与五边形的面，那么至少有 6 个四边形的面；如果没有三角形与四边形的面，那么至少有 12 个五边形的面.

参考文献　[25，p. 166]，[18，p. 215].

（郑君文）

凸多面体的柯西定理（Cauchy theorem on polyhedron）　两个凸多面体，如果它们的各对应面全等并且同样安置着，那么这两个凸多面体或者全等或者对称.

该定理是柯西在拉格朗日建议下研究多面体时得到的，并于 1812 年向巴黎科学院递交了相应的论文，定理的证明以三个引理为基础，其中引理 1 和引理 2 是关于凸多面角的，也就是关于球面凸多边形的，而引理 3 则是关于零类多面体的，它的正确的证明由

勒贝格完成．本定理可看做平面几何中“三双边对应相等的两个三角形全等”这一定理在空间的推广．

引理 1 设一球面凸多边形(以下简称为凸多边形)，除去一边外其余各边均保持不变，如果变动的边不是它的一边的各角中，除了保持不变的外都增大或都减小，且其多边形始终为凸的，则该变动的一边也随着角而增大或减小．

可就凸多边形中变动角的个数，进行数学归纳法证明．设变动的角只有一个，这时原凸多边形 $AB\cdots M\cdots ST$ 与变动后的凸多边形 $A'B'\cdots M'\cdots S'T'$ 中，有 $A'B'=AB, B'C'=BC, \cdots, S'T'=ST, \angle B'=\angle B, \angle C'=\angle C, \cdots, \angle S'=\angle S$，若 $\angle M'>\angle M(\angle M'<\angle M)$，则 $A'T'>AT(A'T'<AT)$．引大圆劣弧 AM、TM 和 $A'M'$、$T'M'$，由于 $A'B'=AB, \cdots, \angle B'=\angle B, \cdots$，所以凸多边形 $A'B'\cdots M'$ 与凸多边形 $AB\cdots M$ 全等，从而 $A'M'=AM$，$\angle A'M'L'=\angle AML$．同样可推出 $T'M'=TM$，$\angle T'M'N'=\angle TMN$．这样两个凸多边形 $A'B'\cdots T'$ 与 $AB\cdots T$ 中边角之间的关系，就化归为两个三角形 $\triangle A'M'T'$ 与 $\triangle AMT$ 中边角之间的关系．由已知 $\angle M'>\angle M$ $(\angle M'<\angle M)$，从而有 $\angle A'M'T'>\angle AMT(\angle A'M'T'<\angle AMT)$，所以 $A'T'>AT(A'T'<AT)$．

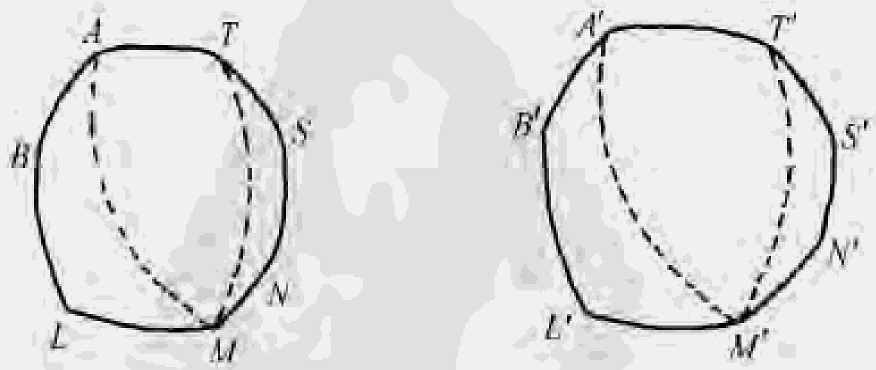


图 4－259

仿照上述方法处理，对于有两个变动角的多边形，总可以把它化归为有两个变动角的四边形即对四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$

来考察．这里假设 $A'B'=AB, B'C'=BC, C'D'=CD, \angle B'>\angle B, \angle C'>\angle C$（$\angle B'<\angle B, \angle C'<\angle C$），且这两个四边形都是凸的，则 $A'D'>AD$（$A'D'<AD$）（图 4－259 中只画出四边形 $ABCD$）．

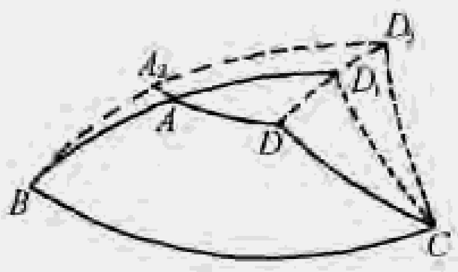


图 4－260

将边 CD 绕着顶点 C 向其形外旋转，如果（1）当 CD 处于 CD_0 的位置时，$\angle B$ 保持不变，$\angle BCD_0=\angle C'$，且四边形 $ABCD_0$ 为凸的（CD_0 图 4－260 中未画出），则 $AD_0>AD$．又在凸四边形 $ABCD_0$ 与 $A'B'C'D'$ 中，因为 $\angle B'>\angle ABC$，所以 $A'D'>AD_0$，因此 $A'D'>AD$．

（2）当 CD 绕顶点 C 旋转，在未达到 CD_0（$\angle BCD_0=\angle C'$）的位置时，它所形成的四边形就不是凸的，在这过程中设 BA 的延长线与 CD 的某一新位置相交于点 D_1，这里点 D_1 满足 $CD_1=CD=C'D'$ 和 $\angle BCD_1<\angle C'$．设 $CD_2=CD$，且和 CB 组成任意一个满足下式的$\angle BCD_2$：

$$\angle BCD_1<\angle BCD_2\leqslant\angle C', \quad ①$$

则 $BD_2>BD_1$，所以 $BD_2>BA$．在 BD_2 上截取 $BA_2=BA=B'A'$，则有

$$A_2D_2>AD_1>AD. \quad ②$$

1° 如果$\angle BCD_2$ 满足①且 $\angle CBD_2=\angle B'$，则所构作的四边形 A_2BCD_2 处于凸图形的边缘上，并有

$$BD_2\leqslant B'D'<B'A'+A'D'. \quad ③$$

③式两端各减去 $BA_2=B'A'$，得 $A'D'>A_2D_2$，据②有 $A'D'>AD$．

2° 如果满足①的任意一个角$\angle BCD_2$，都有 $\angle CBD_2 \neq \angle B'$，则取 D_0 为 D_2，即 $\angle BCD_2 = \angle C'$，这时 $\angle CBD_2 < \angle B'$，于是同样可得 $A'D' > AD$.

注意，上述推理中对于所构作的四边形处于凸图形的边缘上(极限位置)时，可用常态凸四边形代替它们，即对于去掉等号的不等式②和③将是相同的.

假设变动角小于 $n(n\in\mathbf{N})$ 时该引理成立，现证变动角为 n 时也成立，即若在凸多边形 $AB\cdots ST$ 和 $A'B'\cdots S'T'$（各记为 P 和 P'）中，除 AT 和 $A'T'$ 外其余各边顺次相等，且除$\angle A$和$\angle A'$、$\angle T$ 和$\angle T'$以及相等的角外，其余 n 个角前者都小于或都大于后者，则 $AT < A'T'$ 或 $AT > A'T'$. 仿照上面方法处理，不失普遍性，可设 $\angle B < \angle B'$，$\angle S < \angle S'$，连结 BS 和 $B'S'$，则将多边形 P 和 P' 各分为两部分，其中一部分是凸四边形 $ABST$ 和 $A'B'S'T'$，另一部分是凸多边形 $BC\cdots RS$ 与 $B'C'\cdots R'S'$. 因为 $\angle ABS < \angle B' - \angle SBC = \alpha$，$\angle TSB < \angle S' - \angle BSR = \beta$，所以可按照上述的一种情形处理，即不改变边 AB 和 ST 的长度而增大顶点在 B 和 S 的角，用另一个凸四边形 Q_1(或在凸图形边缘上的图形)代替四边形 $ABST$，使得这个四边形在点 B 和 S 处的角分别取小于或等于 α 和 β，且其中至少有一处等式成立，于是 $A_1T_1 > AT$. 由于凸四边形 Q_1 与凸多边形 $BC\cdots RS$ 一起构成一个新的凸多边形 $A_1BC\cdots RST_1$，且它与 P' 除 A_1T_1 和 $A'T'$ 外其余各边顺次相等，又 $\angle B = \angle B'$ 和 $\angle S = \angle S'$ 之中至少有一个成立，这样除$\angle A_1$ 和$\angle A'$、$\angle T_1$ 和$\angle T'$以及相等的角外，其余至多只有 $n-1$ 个角前者小于后者，所以据归纳假设有 $A_1T_1 < A'T'$，因此 $AT < A'T'$.

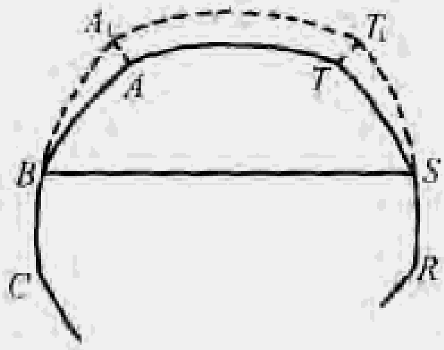


图 4-261

引理 2 设一凸多面角的各面角都保持不变，且对于这多面

角的两个不同位置，凡二面角增大的，它的棱记以"＋"号，减小的记以"－"号．若按一定方向绕多面角一周，则至少有4次变号．

因为球面多边形的边和角之间的性质，可推得相应的多面角的面角和二面角之间的性质，反之亦然，所以据引理1就可推得："如果多面角中除一面角外其余各面角都保持不变，与变动的一面角不相邻接的各二面角中，除相等的外都增大或都减小，且多面角始终保持为凸的，则该变动的面角也随着增大或减小．"因此，按一定方向绕多面角一周，必有一些变号，否则由于它的各二面角都增大或都减小，且除一面角外其余各面角都保持不变，于是这一面角也必增大或减小，显然这与已知相矛盾．其次，变号的次数必为偶数，这是由于计数完毕时，绕多面角一周又回到了起始的符号的缘故．最后，变号的次数不能为2，就是说，相应于这多面角的球面多边形 $ABCDEF$ 不能把它分为两组（如 ABC、DEF），使得前面一组互相连结都没有符号（指角相等）或带"＋"号，后一组都没有符号或带"－"号，否则将第一次发生变号的两顶点 C、D 之一与第二次发生变号的两顶点 A、F 之一相连结（如连结 DA），据引理1，AD 作为多边形 $ABCD$ 的边是应该增大，而作为多边形 $DEFA$ 的边它又应该减小，于是自相矛盾．因此变号的次数至少为4.

设想把一个零类多面体任意拿掉一些棱，如果顶点不属于被保留下来的任何一条棱，则认为它也是被去掉了，这样保留下来的棱把多面体的表面分成若干区域．所谓区域就是由一面或几个面组成，如果所有的面能从一个到达另一个而不穿过保留下来的棱，则看做属于同一区域，否则就认为属于不同区域．注意，一条保留下来的棱可以不是两个区域的界线，如当一条棱至少具有一个自由端点（即没有别的被保留的棱以这点为端点）时，都是这种情形．

下面的引理，是多面体欧拉定理的推广．

引理3　设一零类多面体取消掉一些棱，若被保留的棱数为

E'，被保留的顶点数为 V'，区域数为 F'，则 $F'+V'-E'\geqslant 2$.

例如，在正方体中，把互相平行的四条棱取消，则保留的棱数为 8，顶点数为 8，区域数为 3，所以 $3+8-8=3>2$.

我们逐一恢复被取消的各棱，并注意每次不去穿过其中的一条．这样每当增加一条棱时，E'增加 1．由于每增加一条棱，它至多有一个自由端点，所以 V'至多增加 1．这时，如果 V'增加 1，即增加一个自由端点，则区域数不变仍为 F'；如果 V'没有增加，即增加的棱无自由端点，则 F'至多增加 1．所以 $F'+V'-E'$ 保持不变或减小，由于最后恢复到零类多面体，它的值为 2，因此开始时 $F'+V'-E'$ 必为等于或大于 2.

设 E'表示被保留的棱数，$F_3{}'$和 $F_4{}'$等分别表示围线由 3 条棱和 4 条棱等组成的区域数．这里组成围线的棱可以不是边界的棱，就是说，这样的棱有一个自由端点（甚至两端都是自由的），或两端点在两条被保留的棱上，而包含它的一些面可以由别处相互通联．区域 R 的围线可以这样画出：设 f 是 R 的一个面，ab 是跑过的第一条被保留且属于 f 的棱，接着绕着在点 b 的多面角走，直到重新遇到一条被保留的棱 bc，于是使得介于 ba 和 bc 之间的一切面都属于 R，而围线上继承 ab 棱的就是棱 bc；如果 bc 不是边界的棱，则绕着点 c 的多面角走，再这样继续下去，直到遇到一条被保留的边界棱并把它画出才停下．如果还剩下一些属于 R 的被保留的棱，则重新从其中的一条出发，仿照如上处理．按照这样的方法画出的围线，任何一条被保留的非边界棱都画过两次，而方向则相反．这里对于有一个自由端点的棱两次是相继画出的，而两端点在被保留的棱上的则不然．又按照各区域数边界的棱，正好都数了两次，所以

$$2E'=3F_3{}'+4F_4{}'+5F_5{}'+\cdots+pF_p{}'.$$

显然 $F'=F_3{}'+F_4{}'+F_5{}'+\cdots+F_p{}'$,

因此　$2(E'-F')=F_3'+2F_4'+3F_5'+\cdots+(p-2)F_p'$. ④

现来证明柯西定理本身．设 P 和 P' 是两个凸多面体，它们的对应面全等且同样安置着．如果能证得对应的二面角都相等，则当相等二面角同向时便全等，而在相反的情形下便对称．

由于凸多面体 P 与 P' 的对应面都全等，所以它们对应的三面角的面角和多面角的面角都分别相等，从而所有对应三面角的二面角都分别对应相等．进而可证对于所有对应多面角的二面角，也都分别对应相等．假设这样对应的二面角不都相等，仿照以上凡 P' 的二面角大于 P 的，其棱给以"＋"号，小于 P 的给以"－"号，取消掉其余各棱（包括所有三面角的对应二面角的棱），并设被保留的棱数为 E'（其中没有自由端点的棱），被保留的顶点数为 V'，区域数为 F'（其中三角形区域数、四边形区域数各记为 F_3'、F_4'等）．在相邻的棱间数出变号的次数，且设变号总数为 N，则据引理 2 有

$$N\geqslant 4V'. \quad ⑤$$

但还可用另一种方式计算变号数，这是由于变号实际发生在属于同一区域的围线的相邻两棱之间，当跑遍这些围线，便可得到变号数了．又因三角形区域至多有 2 个变号，四边形区域至多有 4 个变号，五边形区域至多有 4 个变号，…，p 边形区域至多是 p 个或 $p-1$ 个变号，它由 p 是偶数或奇数而定，于是有

$$N\leqslant 2F_3'+4F_4'+4F_5'+6F_6'+6F_7'+\cdots$$

这个不等式的右端小于或等于④右端的两倍，所以

$$N\leqslant 4(E'-F').$$

据引理 3 又得

$$N\leqslant 4(V'-2)=4V'-8.$$

但这与⑤矛盾，因此假设有二面角不相等是不能成立的，从而定理

得证.

参考文献 [16,pp. 514~522],[5,p. 82].

(郑君文)

Pohlke-Schwarz 定理(Pohlke-Schwarz theorem) 一个平面上与任意已知四边形相似的四边形,都可看成为已知四面体的平行投影.

将空间形体连同确定它的空间直角坐标系一起平行投影到投影面上,所得到的投影图就是轴测图,其坐标轴在投影平面上的投影就是轴测轴.这样,就产生轴测轴之间的角及其单位的长度与原空间直角坐标系存在什么关系的问题.该问题是由 Pohlke (1810~1876)于 1853 年作了回答,他提出了轴测投影的基本定理(Pohlke 定理):"在平面上从一点任意引 3 条不重合的直线段,都可看做是空间直角坐标轴上从原点量取的 3 条相等线段的平行投影."由于 Pohlke 所采用的证明较为复杂,从而促使人们去寻求它的更简单的证明.1864 年,H. A. Schwarz(1843~1921)给出了该定理较简单的证明,并推广了上述 Pohlke 提出的定理(见 *Crelle's Journul*,Vol. 63 及 *Gesammelte Abhandlugen*),即 Pohlke-Schwarz 定理.在一些证明这定理的方法中,以运用 S. A. J. Lhuilier (1750~1840)于 1811 年提出的一条辅助定理较为基本,其内容为"任意一个三棱柱的任意截面包含着三角形的所有的形状",就是说,"每个三角形都可看做任意一个已知形状的三角形的正投影".即任给一个三角形,总存在与其相似的三棱柱的一个截面三角形.因此,只要找到满足上述条件作三棱柱的截面或形状已知的三角形的正投影的方法就好了.

假设满足这样条件的截面$\triangle ABC$已经作出,即$\triangle ABC$的形状为已知,现过 C 作该三棱柱的直截面$\triangle A_0B_0C$,它就是$\triangle ABC$及平行于平面 ABC 的截面三角形的正投影.设平面 ABC 与平面 A_0B_0C 相交于过 C 点的直线 l,直线 AB 和 A_0B_0 相交于直线 l

上的点 S. 过 A_0、B_0 分别作 l 的垂线 A_0D、B_0E，D、E 为垂足. 以直线 l 为旋转轴，把平面 ABC 旋转到平面 A_0B_0C 上，则点 A、B 分别落在垂线 A_0D、B_0E 上(如图4-262). 过 C 作 l 的垂线各交 AB、A_0B_0 于 T、T_0，设平面 ABC 与平面 A_0B_0C 所成的二面角的平面角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{CT_0}{CT},$$

又

$$\frac{SA}{SA_0}=\frac{AT}{A_0T_0}=\frac{TB}{T_0B_0}=\frac{SB}{SB_0},$$

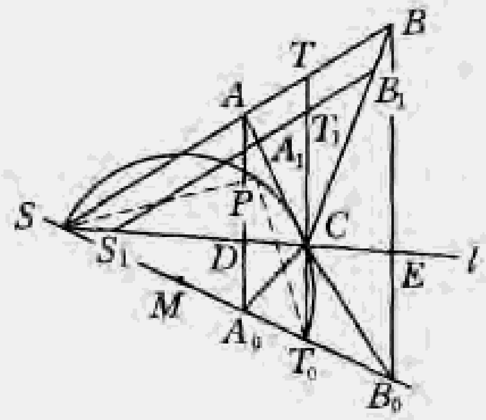


图 4-262

所以可作直线 S_1B_1 平行于 SB，各交 CS、CA、CT、CB 于 S_1、A_1、T_1、B_1，且使得 $S_1B_1=SB_0$，$S_1A_1=SA_0$，$A_1T_1=A_0T_0$，$T_1B_1=T_0B_0$，把 $\triangle S_1CB_1$ 移到 $\triangle SPB_0$，则 $S_1C=SP$，$B_1C=B_0P$，$CT_1=PT_0$，$A_1B_1=A_0B_0$，所以 $\triangle A_1CB_1\cong\triangle A_0PB_0$，$P$ 和 C 都落在以 ST_0 为直径的半圆上，故 $\triangle A_0PB_0\backsim\triangle ABC$. 这样当 $\triangle A_0B_0C$ 与 $\triangle ABC$ 的形状已知时，便可作出截面 $\triangle ABC$. 其作法是先以 $\triangle A_0B_0C$ 的 A_0B_0 为一边，作一个与形状已知的 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A_0B_0P$；设线段 CP 的垂直平分线与直线 A_0B_0 相交于 M，以 M 为圆心、MP 为半径作半圆，交 A_0B_0 于 S 和 T_0，且使得 ST_0CP 为其内接四边形；然后连结 CS 和 CT_0，并在其上各截取 $CS_1=PS$、$CT_1=PT_0$；进而连结 S_1T_1，并连续截取 $S_1A_1=SA_0$、$A_1B_1=A_0B_0$；再过 S 作 S_1T_1 的平行线，各交 CA_1、CT_1 和 CB_1 于 A、T 和 B，从而得 $\triangle ABC$；最后以 CS 为旋转轴，把 $\triangle ABC$ 旋转 θ 角 $\left(\cos\theta=\dfrac{CT_0}{CT}\right)$，则 $\triangle A_0B_0C$ 就是经过旋转且形状已知的三角形 ABC 的正投影. 此处 $\dfrac{CT_0}{CT}$ 为真分数，这是因为 $\dfrac{CT_1}{CT}=\dfrac{CS_1}{CS}$，$CS_1=$

SP，$CT_1=PT_0$，所以 $CT=\dfrac{PT_0\cdot CS}{SP}$，即 $\dfrac{CT_0}{CT}=\dfrac{CT_0\cdot SP}{PT_0\cdot CS}$，据托勒密定理知，它是一个真分数，可作为一个余弦的值．

由辅助定理可得，"一个四棱柱的截面包含着平面四边形所有的形状"，也就是说，"一个平面四边形都可以看成为与已知任意一个平面四边形相似的平面四边形的正投影"．

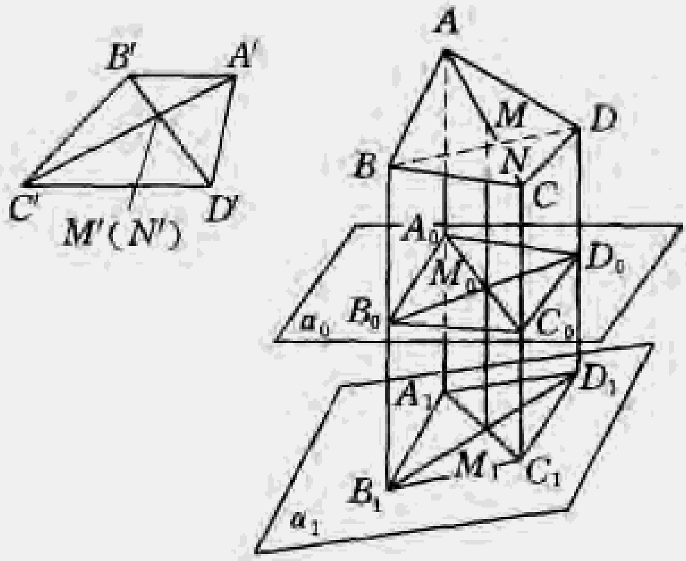


图 4－263

设四面体 $ABCD$ 和平面四边形 $A'B'C'D'$．如果把四面体 $ABCD$ 的平行投影看成为一个与四边形 $A'B'C'D'$ 相似的四边形的话，则其对角线 $A'C'$ 和 $C'D'$ 的交点 $M'(N')$ 就对应于 AC 和 BD 上两个点的重合投影．因为平行投影和图形相似中，线段间仍成定比，所以可在 AC 和 BD 上各作一点 M 和 N，使 $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{A'M'}{M'C'}$ 和 $\dfrac{BN}{ND}=\dfrac{B'N'}{N'D'}$．这样以 MN 为投影方向，在任何投影面上 M、N 的投影相重合．分别过 A、B、C、D 作 MN 的平行线，形成一个四棱柱，并作垂直于侧棱的平面 α_0 得四边形 $A_0B_0C_0D_0$，它就是四面体 $ABCD$ 的正投影，这样就有一个相似于平面四边形 $A'B'C'D'$ 的四边形 $A_1B_1C_1D_1$，而它的正投影是四边形 $A_0B_0C_0D_0$，

也就是用平面 $\alpha_1(A_1B_1C_1)$ 去截这四棱柱而得，因此四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是四面体 $ABCD$ 的平行投影．显然，当四面体是由空间直角坐标系诸轴上取相等线段形成时，就是 Pohlke 定理，所以 Pohlke 定理是它的特例．

参考文献 [21, pp. 333～337]，[10, pp. 437～438]．

（郑君文）

高斯定理（Gauss' theorem） 设以投影平面为复平面，直三面角的顶在其上的正投影为原点，则当各棱上一点的正投影作为复数时，这三个复数的平方和等于零．

据 Pohlke 定理，从平面上一点任意引三条不重合的直线段，都可认为是空间直角坐标系的各轴上取相等线段的平行投影，但对于正投影来说，轴测轴上长度之间与其夹角之间不能是任意的，它们存在着一定的关系，这些关系就归结为高斯定理及由此直接导出的 Weisbach 定理：直三面角各棱上所取线段的正投影的平方与投影间的夹角的两倍的正弦成比例．高斯定理见高斯著作第二卷（1844），而在 Weisbach 关于轴测法的论文中则载有相应的定理．

设直三面角的顶点 S 在投影平面上的正投影为点 O，以 OS 为 z 轴，投影平面为 xy 平面建立空间直角坐标系．A、B、C 为这直三面角各边上同取单位长度的一点，设矢量 SA、SB 和 SC 的方向余弦分别为 a_1、a_2、a_3，b_1、b_2、b_3 和 c_1、c_2、c_3，则当 xy 平面作为复平面，A、B、C 的正投影为复数 z_1、z_2、z_3 时，就有 $z_1 = a_1 + a_2\mathrm{i}$，$z_2 = b_1 + b_2\mathrm{i}$，$z_3 = c_1 + c_2\mathrm{i}$，于是

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + 2\mathrm{i}(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2).$$

据方向余弦的意义和矢量 SA、SB、SC 两两互相垂直可得

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1,\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1,$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0,$$
$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0,\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0,$$

从而有

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1,$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0,$$

所以 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

如果取这三个复数的模

$$p = |z_1|, q = |z_2|, r = |z_3|,$$

则 $$p^2 + q^2 + r^2 = 2.$$

这就是正轴测投影的变形系数之间的关系式或轴向变化率公式.

因为一个复数平方的辐角为其原辐角的两倍,所以两个复数平方所表示的矢量的夹角为原两个复数的矢量夹角的两倍. 设 z_1^2、z_2^2、z_3^2 的矢量两两的夹角为 2γ、2α、2β,则由 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ 知,它们组成了一个三边为 p^2、q^2、r^2 和外角各为 2α、2β、2γ 的三角形,所以有

$$\frac{p^2}{\sin 2\alpha} = \frac{q^2}{\sin 2\beta} = \frac{r^2}{\sin 2\gamma}.$$

这就是 Weisbach 定理.

易知,以 p^2、q^2、r^2 为边组成的三角形 PQR 与 z_1、z_2、z_3 这三点构成的三角形的垂足三角形相似,所以$\triangle PQR$ 的内角平分线就可作为轴测轴.

应用高斯定理可解决正轴测法基本问题,即已知直三面角两边的正投影,求作它的第三边的正投影.

设直三面角两边的正投影为 OA、OB,并设 OA 的方向为正实轴的方向.

因为 $z_1+\frac{z_2^2}{z_1}=-\frac{z_3^2}{z_1}$，所以可先作出 $z_4=\frac{z_2^2}{z_1}$. 这只要以 O 为顶点、OB 为一边，作 $\angle BOM=\angle AOB$，再以 B 为顶点、BO 为一边，作 $\angle OBN=\angle OAB$. 设 OM 与 BN 交于 D，则 D 点所对应的复数为 z_4. 其次以 OA、OD 为边作平行四边形 $OAED$，则 E 点所对应的复数为 $z_5=z_1+\frac{z_2^2}{z_1}$. 最后延长 EO 至 F，使 $OF=EO$，则 F 点所对应的复数为 $z_6=-\left(z_1+\frac{z_2^2}{z_1}\right)$；由于 $z_6=\frac{z_3^2}{z_1}$，从而 z_3 的模 $|z_3|$ 可由作 $|z_1|$ 和 $|z_6|$ 的比例中项而得到，而其方向为 OA、OF 构成的角平分线的方向，但这里有两个方向，它可以是构成的凸角的平分线的方向，也可以是凹角平分线的方向. 事实上，从 z_1z_6 的平方根有两个值就可得知. 这样作出了第三边的投影 OC，就有两个可能位置.

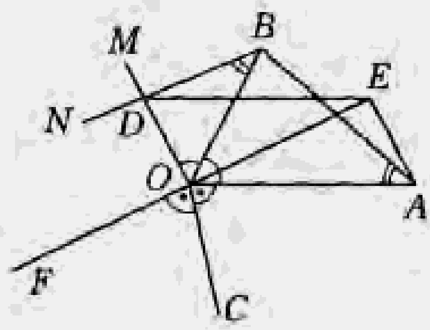


图 4-264

参考文献 [21，pp. 337～340].

（郑君文）

（三）旋转体

牟合方盖 我国古代认为"圆出于方"，总是借助方形来计算圆，不仅平面上如此，立体也是如此，因而往往不准确.《九章算术》"少广"章中的"开立圆"术将球的体积公式定为 $V=\frac{9}{16}D^3$（D 为球的直径）.

刘徽在给《九章算术》作注时指出这个公式不准确. 他说古人取 $\pi=3$，于是得出正方形的内切圆的面积是正方形面积的 $\frac{3}{4}$，立方体的内切圆柱的体积是立方体体积的 $\frac{3}{4}$，这是不错的. 可是，把

圆柱的内切球的体积也定为是圆柱体体积的$\frac{3}{4}$，从而得出球体积是立方体体积(D^3)的$\frac{9}{16}$，那就不准确了.

刘徽取一个立方体模型，从纵、横两个方向作其内切圆柱，他把这两个圆柱的公共部分称为“牟合方盖”(如图 4-265，像上下两把各 4 根撑骨的伞，对合着)，并指出内切球体积是“牟合方盖”体积的$\frac{3}{4}$，实即$V_{牟合方盖}:V_{内切球}=4:\pi$. 可是，刘徽没能准确地算出“牟合方盖”的体积，从而未能得出球体积的准确公式. 但是，他坚信今后一定会有人算出来.

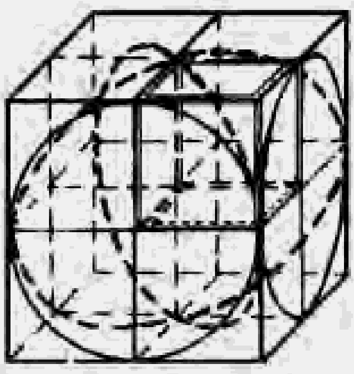


图 4-265

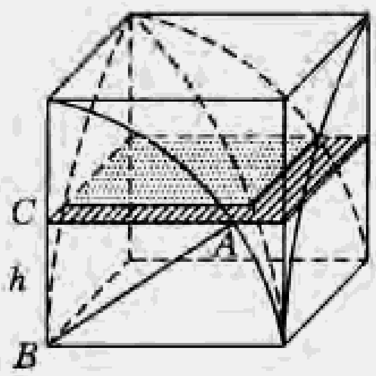


图 4-266

果然，300 年后祖冲之和他的儿子祖暅完成了这项工作.

祖暅是从计算立方体里去掉“牟合方盖”后剩余部分体积着手的. 假设立方体棱长为 $2R$，在各棱中点处相截，分成 8 个相等的小立方体，与此同时，它所含的“牟合方盖”也分成 8 个全等的部分. 取一个小立方体(不妨取右上方的一块，并放大成图 4-266)来研究它及与它相关的“牟合方盖”部分的体积. 这时小立方体除包含$\frac{1}{8}$“牟合方盖”外，还包含着甲、乙、丙三部分(图 4-267). 如果能求得甲、乙、丙的体积，那么就很容易求得$\frac{1}{8}$“牟合方盖”的体积了. 由于立方体可以看做是由无限个平行平面堆积而成的，这就像书

本是由书页装订成一样，所以可以通过有关平行截面来研究体积．

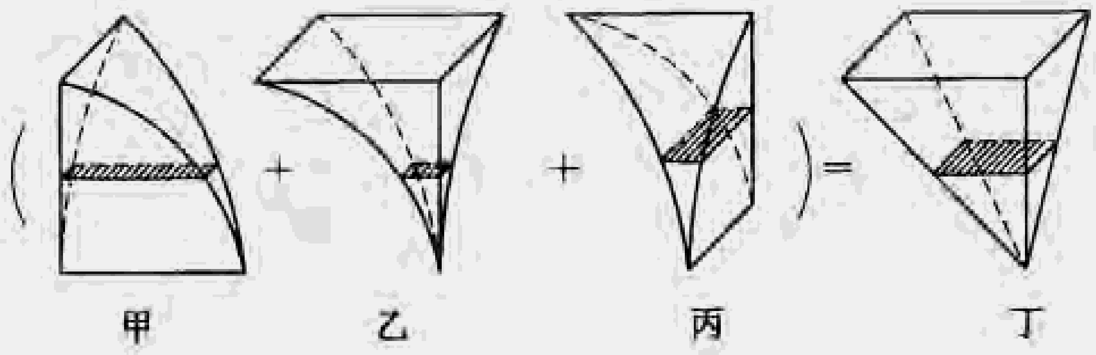


图 4－267

设以高为 h 的平行于底的平面截小立方体(图 4－266)，即 $BC=h$．在直角三角形 ABC 中，$AC^2=AB^2-BC^2$，而 $AB=R$，$BC=h$，故 $AC^2=R^2-h^2$．

再看截面．整个截面是以 R 为边的正方形(其面积是 R^2)，它被分成一个小正方形和一个角尺 L 形．小正方形正是“牟合方盖”部分的截面．它的边长等于 AC，即“牟合方盖”部分截面的面积等于 AC^2．于是小立方体除去“牟合方盖”部分后余下的立体部分(可分解成甲、乙、丙三部分)的截面角尺 L 形的面积是 $R^2-AC^2=h^2$．

设想作一个倒置的四棱锥(图 4－267 丁)，使它的底为以 R 为边的正方形，有一条棱垂直于底且长为 R．对于任何 h，在以 h 为高处平行于底截四棱锥时的截面面积都等于 h^2．这就是说，尽管甲、乙、丙合起来的形状与丁的形状不一样，但是它们同在高 h 处的截面面积总是相等的．这时祖暅指出：“缘幂势既同，则积不容异．”就是说，“等高处的截面积总相等的两个立体的体积相等”．(这个结论称为“祖暅原理”或“刘-祖原理”)于是祖暅断定甲、乙、丙的体积和等于丁的体积(图 4－267)．

由于等底等高的四棱锥的体积是立方体体积的 $\frac{1}{3}$，所以“牟合

方盖"的体积就应该是立方体体积的$\frac{2}{3}$,即$V_{牟}=\frac{2}{3}V_{方}=\frac{2}{3}D^3$.

于是刘徽的求球体积的工作就完成了:

$$V_{球}:V_{牟}=\pi:4,$$

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟}=\frac{2\pi}{12}D^3=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

这是完全正确的.

在西方,"祖暅原理"被称作"卡瓦列里原理".意大利数学家卡瓦列里于1629年也提出了内容相同的原理,曾对微积分的产生有影响重大.

参考文献 [7,p.175].

(睦秋生)

刘-祖原理 见牟合方盖.

祖暅原理 见牟合方盖.

委菽依垣 今有委菽依垣,下周三丈,高七尺.问积及为菽各几何?

本题是《九章算术》卷五"商功"的第24题.

"委菽依垣",指靠着墙根堆豆子,堆成的豆堆是半个圆锥形.可以通过量得豆堆底面圆周长及堆高来计算体积,以及折算用容器斛表示豆子的数量(2 430 寸^{3}的豆子为1斛).具体计算时取$\pi=3$,下周$=\pi R=300$寸,$R=100$寸,$h=70$寸.

$$菽积=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{3}\cdot\pi R^2=350\,000\ 寸^3,$$

计菽$144\frac{8}{243}$斛.

此外,还有把粮食堆在墙的拐角处,所谓"依垣内角"、"依垣外角"的堆法(如图4-268).其实不过分别是圆锥的$\frac{1}{4}$、$\frac{3}{4}$罢了.《九章算术》把这一类型题的解法称为"委粟术".只有"委粟平地"才是指整个圆锥.



图 4－268

参考文献　[1,p.174].

（陆秋生）

委粟术　见委菽依垣.

阿基米德定理(Archimedes' theorem)　以球的大圆为底、球的直径为高的圆柱，它的体积和表面积分别是这球的体积和表面积的$\frac{3}{2}$.

该定理是阿基米德所著《论球和圆柱》一书中命题 34 的推论，是阿基米德所发现的许多定理中他最喜爱的一个，曾留下遗愿把它刻在死后的墓碑上．公元前 212 年，罗马军攻入阿基米德的故乡叙拉古(Syracuse)，据传说，当时阿基米德正在沙地上画数学图形，一个罗马士兵闯入了他的住宅，而他却仍在出神地搞他的数学，以至于没有听见那个士兵的喝问，不幸被这个士兵杀死．罗马主将马塞勒斯(Marcus Claudius Marcellus，前 268～前 208 年)曾下令不许杀害阿基米德，为表示对他的敬意，特给他造了一个墓，墓碑上刻了上述这个著名定理.

设球 O 的半径为 r，则它的外切圆柱的高为 $2r$，底面半径为 r. 记球 O 与其外切圆柱的体积和表面积各为 V、S 和 V'、S'，则

$$V' = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3,$$

$$S' = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r$$

$= 6\pi r^2$,

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

$S = 4\pi r^2$,

$\therefore V' = \frac{3}{2}V, S' = \frac{3}{2}S.$

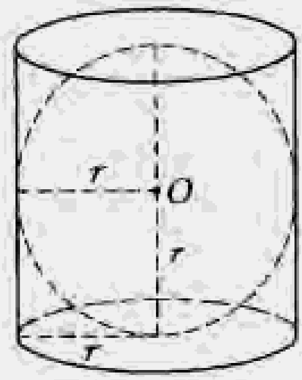


图 4－269

参考文献 [25,p.185],[11,pp.120～122],[3,pp.129～131],[22,p.4,p.63].

（郑君文）

帕波斯-古尔丁定理(Pappus-Guldin theorem) 平面封闭曲线图形,绕其所在平面上的一条不与此图形相交的轴旋转,则它所形成的旋转体的体积,等于这图形的面积和它的重心所转过的圆周长的乘积.

该定理载于帕波斯所著的《数学汇编》第七篇里,但他没有给出证明.后来瑞士数学家古尔丁于1635年重新独立发现了这个定理,并且还提出另一个定理,即若一条平面弧,绕其所在平面上一条不与该弧相交的轴旋转,则它所形成的旋转面的面积,等于弧长与这弧的重心所转过的圆周长的乘积,但他也没有作出实质性的证明,严格的证明是由卡瓦列里给出的.通常把后者称为古尔丁第一定理,前者称为古尔丁第二定理.

下面先对平面多边形的情形进行考察.

在平面多边形绕 l 轴旋转形成旋转体时,设在某个瞬间相邻的两个平面多边形,例如图中的 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$,它们必对称于各自所在的平面构成的二面角的平分面,所以对应顶点的连线(如 AA')都垂直于该平分面,这样

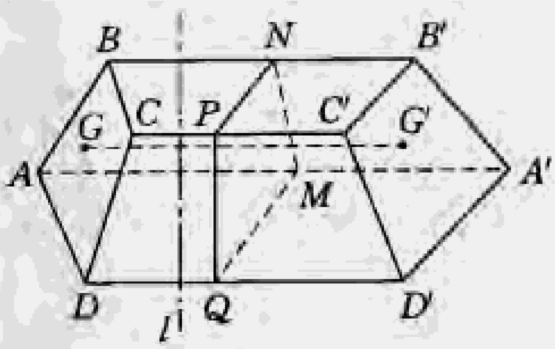


图 4－270

$A'B'C'D'$—$ABCD$ 就是一截棱柱．设 G 为多边形 $ABCD$ 的重心，G' 为其下一个位置 $A'B'C'D'$ 的重心，则该截棱柱 $ABCD$—$A'B'C'D'$ 的体积等于它的直截面 $MNPQ$ 的面积与 GG' 的乘积．因此该旋转体的体积，就是这样的截棱柱的体积之和当其相邻两平面多边形趋于同一个时的极限．

因为直截面就是该截棱柱被其由两底所在平面形成的二面角的平分面所截的截面，所以当多边形 $A'B'C'D'$ 趋于多边形 $ABCD$ 时，直截面也就趋于多边形 $ABCD$，也即该平面多边形本身，而所有如 GG' 这样长度之和又趋于平面多边形重心所转过的圆周长，因此平面多边形绕轴 l 旋转形成的旋转体的体积，等于这个平面多边形的面积和它的重心所转过的圆周长之积．

现再对平面封闭曲线图形进行考察，这只要作其内接或外切多边形，当各边趋于零时重心的极限位置为封闭曲线图形的重心，多边形面积的极限即为封闭曲线图形的面积，而封闭曲线图形绕轴旋转形成的旋转体的体积为内接或外切多边形绕轴旋转形成的这些旋转体的体积的极限，所以结论仍成立．

参考文献　[11，p. 144]，[16，pp. 494～495]，[13，p. 197]，[3，p. 258].

（郑君文）

古尔丁定理（Guldin's theorem）　见帕波斯-古尔丁定理．

四球的相似面（Plane of similitude of four spheres）　设四个球各不相等，且球心不共面，则其六个外位似中心共面（称为外相似面），三个外位似中心和另三个内位似中心共面（称为混相似面），两个外位似中心和另四个内位似中心共面（称为内相似面），这些平面都称为这四球的相似面．

该定理是蒙日于 1799 年得到的，它是平面几何中三圆的相似轴在空间的推广．

设四个球的球心各为 O_1、O_2、O_3、O_4，球 O_1 与球 O_2 的外位似

中心记为S_{12}，内位似中心记为S_{12}'，其余仿此．由于两个不等的球有一个外位似中心和一个内位似中心，所以它们共有六个外位似中心S_{12}、S_{13}、S_{14}、S_{23}、S_{24}、S_{34}和六个内位似中心S_{12}'、S_{13}'、S_{14}'、S_{23}'、S_{24}'、S_{34}'，且各分布在$O_1O_2O_3$、$O_1O_2O_4$、$O_1O_3O_4$和$O_2O_3O_4$平面上，每个平面包含四条位似轴，共计十六条位似轴．

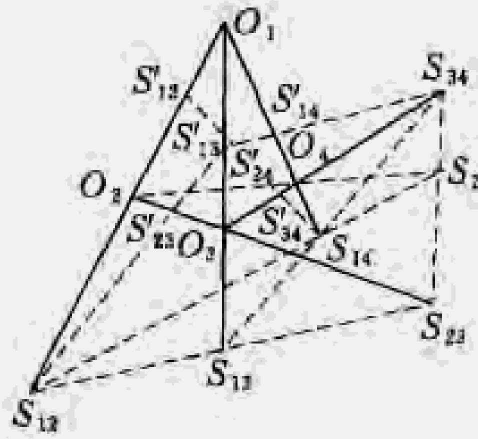


图 4－271

根据位似变换，四个球除了六个都是外位似中心（即都是顺位似图形）外，只可能是三个内位似中心与另三个外位似中心（即三个是逆位似图形与另三个是顺位似图形），或四个内位似中心与另两个外位似中心（即四个是逆位似图形与另两个是顺位似图形）这两种情形．又据四个图形彼此位似，它们的六个位似中心共面（称为位似面），所以六个外位似中心S_{12}、S_{13}、S_{14}、S_{23}、S_{24}、S_{34}共面．对于三个内位似中心与另三个外位似中心共面的情形，则有四个位似面，即下列各六个点共面：

$$S_{12}', S_{13}', S_{14}', S_{23}, S_{24}, S_{34},$$
$$S_{12}', S_{23}', S_{24}', S_{13}, S_{14}, S_{34},$$
$$S_{13}', S_{23}', S_{34}', S_{12}, S_{14}, S_{24},$$
$$S_{14}', S_{24}', S_{34}', S_{12}, S_{13}, S_{23}.$$

对于四个内位似中心与另两个外位似中心共面，这种情形有三个位似面，即下列各六个点共面：

$$S_{12}, S_{13}', S_{14}', S_{23}', S_{24}', S_{34},$$
$$S_{23}, S_{12}', S_{24}', S_{13}', S_{34}', S_{14},$$
$$S_{13}, S_{12}', S_{14}', S_{23}', S_{34}', S_{24}.$$

因此，四个球共有八个相似面．

参考文献 [25，p.186]，[16，p.141]，[18，pp.189～190]．

（郑君文）

（四）轨迹和作图

等幂面或根面（Radical plane） 对于两个不同心的球有等幂的点的轨迹，是垂直于这两球的连心线的一个平面．该平面称为这两球的等幂面或根面．

等幂面是 Gautier 于 1812 年得到的．

设球 O 与球 O' 是两个定球，通过连心线 OO' 的任一平面 α 截这两球于两个大圆 C 和 C'，则所求轨迹在平面 α 内的部分就是这两个大圆的根轴．

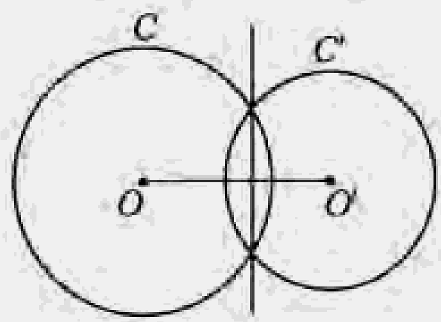


图 4－272

当平面 α 绕着连心线旋转一周，它上面的根轴就形成一个垂直于连心线的平面，该平面就是对球 O 和球 O' 有等幂的点的轨迹．

如果两球相交，则等幂面就是交线圆所在的平面．这时交线圆上的每一点对两球的幂都等于零，而位于这平面上的其他的点，对每一个球的幂都等于这点对交线圆的幂．如果两球相切，则等幂面就是过这切点的公切面．如果一个球在另一个球的外部，则等幂面与这两球连心线的交点位于这两球心之间．如果两球不同心且一个球在另一个球的内部，则等幂面与连心线的交点位于这两球的外部．如果两球同心，则等幂面不存在．

根据等幂面可得到如下的推论和轨迹：

（1）三个球的球心如果不共线，则每取两球所得的三个等幂面通过同一条直线，该直线称为这三球的等幂轴或根轴．如果三个球的球心共线，则三个等幂面互相平行或重合．

由此可得下面的轨迹：

对于三个球心不共线的球有等幂的点的轨迹，是这三球的等幂轴．

(2) 四个球的球心如果不共面，则每取两球所得的六个等幂面相交于同一点，该点叫做这四个球的等幂心或根心．如果四个球心共面，则六个等幂面平行于同一条直线．

参考文献　[25,p.210],[16,pp.138～140].

（郑君文）

阿波罗尼奥斯轨迹问题（Apollonius problem of locus）　求到若干已知点距离的平方分别乘以给定的数（正或负），其代数和为常数的点的轨迹．

阿波罗尼奥斯在他所著的《平面轨迹》一书中，载有“如果 A、B、…是一些固定点，a、b、…、k 是一些给定的常数，则使得 $a(AP)^2+b(BP)^2+\cdots=k$ 的点 P 的轨迹是一个圆”．上述问题是这个平面轨迹在空间的推广．

设 A、B、C、…为已知点，p、q、r、…为给定的常数，M 为动点，下面分 $p+q+r+\cdots$ 不等于零和等于零两种情况进行研究．

(1) $p+q+r+\cdots\neq 0$．设已知各点 A、B、C、…在常数 p、q、r、…影响下的比例距离中心为 O，连结 OM 与 OA、OB、OC、…并取 OM 作为正向．再设 A'、B'、C'、…为 A、B、C、…在 OM 上的射影，OA'、OB'、OC'、…为其相应的有向线段 $\overline{OA'}$、$\overline{OB'}$、$\overline{OC'}$、…的数量，则

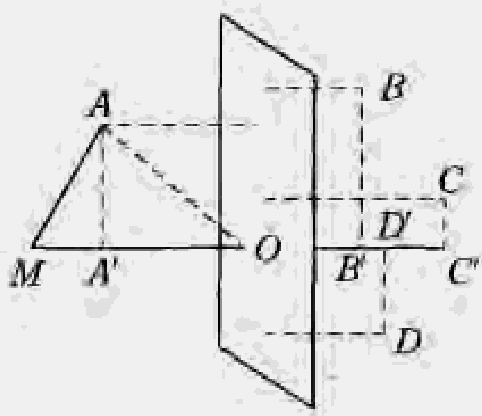


图 4-273

$$MA^2=OM^2+OA^2-2OM\cdot OA',$$
$$MB^2=OM^2+OB^2-2OM\cdot OB',$$

$$MC^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM \cdot OC',$$

$$\cdots\cdots$$

把上面各等式分别乘以 p、q、r、…再相加得

$$\begin{aligned} & p \cdot MA^2 + q \cdot MB^2 + r \cdot MC^2 + \cdots \\ = & (p+q+r+\cdots)OM^2 + p \cdot OA^2 + q \cdot OB^2 + r \cdot OC^2 \\ & + \cdots - 2OM(p \cdot OA' + q \cdot OB' + r \cdot OC' + \cdots). \end{aligned}$$

由于 OA'、OB'、OC'、…可看做点 A、B、C、…到通过 O 且垂直于 OM 的同一个平面的距离(假设具有大小及方向),所以由点 O 的选择知,$p \cdot OA' + q \cdot OB' + r \cdot OC' + \cdots = 0$. 因为 $p \cdot OA^2 + q \cdot OB^2 + r \cdot OC^2 + \cdots = l$,$l$ 是与点 M 的位置无关的常数,所以 $p \cdot MA^2 + q \cdot MB^2 + r \cdot MC^2 + \cdots$ 等于常数 k 的充要条件是 OM^2 为常数,故到已知点 A、B、C、…的距离平方分别乘以给定的数 p、q、r、…其代数和为常数的点 M 的轨迹,当 $f>0$ 时是以 O 为球心、$\sqrt{f}$ 为半径的一个球面;当 $f=0$ 时为一点即点球;当 $f<0$ 时,则满足条件的点不存在,即为空集,这里 $f=(k-l)/(p+q+r+\cdots)$.

(2) $p+q+r+\cdots=0$,这时将已知点分成两组 A_1、B_1、C_1、…和 A_2、B_2、C_2、…使其每组所给定的数之和不为零(如果为零,就无需研究了),即 $p_1+q_1+r_1+\cdots \neq 0$,$p_2+q_2+r_2+\cdots \neq 0$,设两组的比例距离中心各为 O 和 O',则

$$\begin{aligned} & p_1 \cdot MA_1^2 + q_1 \cdot MB_1^2 + r_1 \cdot MC_1^2 + \cdots \\ = & (p_1+q_1+r_1+\cdots)OM^2 + l_1, \\ & p_2 \cdot MA_2^2 + q_2 \cdot MB_2^2 + r_2 \cdot MC_2^2 + \cdots \\ = & (p_2+q_2+r_2+\cdots)O'M^2 + l_2, \end{aligned}$$

这里 $l_1 = p_1 \cdot OA_1^2 + q_1 \cdot OB_1^2 + r_1 \cdot OC_1^2 + \cdots$ 和 $l_2 = p_2 \cdot O'A_2^2 + q_2 \cdot O'B_2^2 + r_2 \cdot O'C_2^2 + \cdots$ 都与点 M 的位置无关,且

$$p_1+q_1+r_1+\cdots+p_2+q_2+r_2+\cdots$$
$$=p+q+r+\cdots=0,$$

即 $p_2+q_2+r_2+\cdots=-(p_1+q_1+r_1+\cdots)$,

$\therefore p\cdot MA^2+q\cdot MB^2+r\cdot MC^2+\cdots$

$=p_1\cdot MA_1{}^2+q_1\cdot MB_1{}^2+r_1\cdot MC_1{}^2+\cdots+p_2\cdot MA_2{}^2$
$\quad+q_2\cdot MB_2{}^2+r_2\cdot MC_2{}^2+\cdots$

$=(p_1+q_1+r_1+\cdots)OM^2+l_1-(p_1+q_1+r_1$
$\quad+\cdots)O'M^2+l_2$

$=(p_1+q_1+r_1+\cdots)(OM^2-O'M^2)+l_1+l_2.$

于是 $p\cdot MA^2+q\cdot MB^2+r\cdot MC^2+\cdots$ 等于常数 k 的充要条件是 $OM^2-O'M^2$ 为常数,因此它的轨迹是一个平面,称之为定差幂面,这实际上是平面几何中定差幂线在空间的推广.

本题用坐标法来解较为简捷.为便于书写,记 A_i 为定点,p_i、k 为常数($i=1,2,\cdots,n$),设点 A_i 的坐标为(x_i,y_i,z_i),动点 M 的坐标为(x,y,z),则由 $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i\cdot MA_i{}^2)=k$,得

$$\sum_{i=1}^{n}p_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]=k,$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}[p_i(x^2+y^2+z^2)-2p_ix_ix-2p_iy_iy-2p_iz_iz+p_i(x_i{}^2+y_i{}^2+z_i{}^2)]=k.$$

令 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=a,\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i=b,\sum\limits_{i=1}^{n}p_iy_i=c,\sum\limits_{i=1}^{n}p_iz_i=d,$

$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(x_i{}^2+y_i{}^2+z_i{}^2)=e$,则得

$a(x^2+y^2+z^2)-2bx-2cy-2dz+e=k.$

(1) 如果 $a\neq 0$,得

$$a\left(x-\frac{b}{a}\right)^2+a\left(y-\frac{c}{a}\right)^2+a\left(z-\frac{d}{a}\right)^2+e-\frac{b^2+c^2+d^2}{a}=k,$$

设 $e-\frac{b^2+c^2+d^2}{a}=l,\frac{k-l}{a}=f$，则当 $f>0$ 时，所求轨迹为以 $O\left(\frac{b}{a},\frac{c}{a},\frac{d}{a}\right)$ 为球心、$\sqrt{f}$ 为半径的一个球面；当 $f=0$ 时，轨迹为点球；当 $f<0$ 时，轨迹为空集．容易验证 l 等于 $\sum_{i=1}^{n}(p_i\cdot OA_i^2)$．

(2) 如果 $a=0$，得 $bx+cy+dz+\frac{1}{2}(k-e)=0$，则当 $b^2+c^2+d^2\neq 0$ 时，轨迹为一平面；当 $b=c=d=k-e=0$ 时，轨迹为整个空间；当 $b=c=d=0,k-e\neq 0$ 时，轨迹为空集．

现考察上述轨迹定理的特殊情形.

(1) 当已知点为两个且给定系数均为 1 时，它就成为“到两个定点距离的平方之和等于常数的点的轨迹是一个球面”，这就是平面几何中定和幂圆在空间的推广，称之为定和幂球面．

(2) 当已知点为两点 A、B，给定系数是 n^2 和 $-m^2(n,m>0,n^2-m^2\neq 0)$，且常数 k 为零，即 $n^2\cdot MA^2-m^2\cdot MB^2=0$，亦即 $\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n}\neq 1$，它就成为“到两个定点距离之比为不等于 1 的常数的点的轨迹是一个球面”．这是平面几何中阿波罗尼奥斯圆在空间的推广，称之为阿波罗尼奥斯球．实际上，该轨迹就是以 CD (C、D 为分线段 AB 为定比 $\frac{m}{n}$ 的内、外分点)为直径的圆绕直线 AB 旋转所形成的球面．

参考文献 [13,pp.167～168]，[16,pp.275～277]．

（郑君文）

阿波罗尼奥斯球(Apollonius sphere) 见阿波罗尼奥斯轨迹问题.

求作正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体(construct regular tetrahedron, regular hexahedron, regular octahedron, regular dodecahedron and regular icosahedron) 求作球的内接正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体,并求出球的半径与它的各内接正多面体棱长之间的关系式.

上述作图题相应于欧几里得《几何原本》第 XIII 卷中的命题 13、15、14、17、16. 从该作图题得知,正多面体不仅至多有五种,而且确实存在五种. 关于正多面体的作图,历来的一些数学家都曾对此作过研究,例如帕波斯在他的《数学汇编》卷 III 的第 4 节中,论述了如何作球的内接正多面体,但他所用的方法不同于《几何原本》中的方法. 另还有其他一些数学家给出各异的多种作法. 我国数学家梅文鼎(1633～1721)曾深入研究过正多面体的一些性质,例如论述了球的直径与其各内接正多面体的棱长之比,提出正六面体和正八面体、正十二面体和正二十面体各为对偶图形,从而给出有关正多面体的作图方法. 他还进而研究了称之为"方灯"和"圆灯"的两种半正多面体的性质.

先介绍已知棱长 a,作各正多面体的方法.

(1) 正四面体. 如图 4-274,作边长为 a 的正三角形 BCD,过它的重心 G 作平面 BCD 的垂线,并截取 $GA=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,连结 AB、AC、AD,则四面体 $ABCD$ 就是所求作的正四面体.

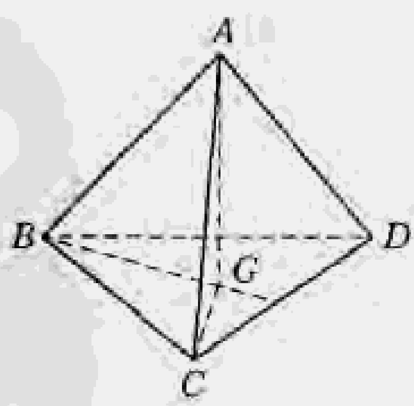


图 4-274

(2) 正六面体. 先作边长为 a 的正方形 $ABCD$,再过各顶点作这正方形所

在平面的垂线，并在其同侧各截取长为 a 的线段 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1，进而就可得到所求作的正六面体(图略).

(3) 正八面体. 如图 4－275，作边长为 a 的正方形 $ABCD$，过其中心 O 作平面 ABC 的垂线，并在它的两侧各截取 $OE=OF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，则 A、B、C、D、E、F 就是所求作正八面体的六个顶点.

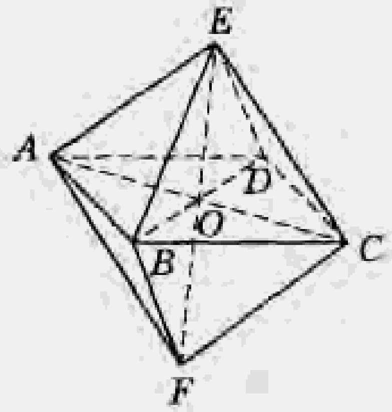


图 4－275

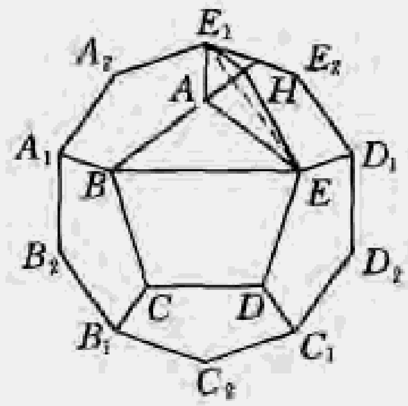


图 4－276

(4) 正十二面体. 如图 4－276，先作边长为 a 的正五边形 $ABCDE$，接着作 $EH\perp BA$ 于 H，再过 H 作 BA 的垂面，并在这垂面上作 $\triangle EHE_1$，使得 $EE_1=BE$，$HE_1=EH$，然后在平面 ABE_1 上以 $\triangle ABE_1$ 为基础完成正五边形 $ABA_1A_2E_1$ 的作图(正五边形 $ABA_1A_2E_1$ 与正五边形 $ABCDE$ 为对称图形). 同样可作出其余各面，从而得到所求作的正十二面体.

(5) 正二十面体. 如图 4－277，作边长为 a 的正五边形 $ABCDE$，过它的中心 O 作平面 ABC 的垂线，在这垂线与 OA 所确定的平面内，作以 A 为圆心、a 为半径的圆，必交该垂线于 S(因为 $OA=$

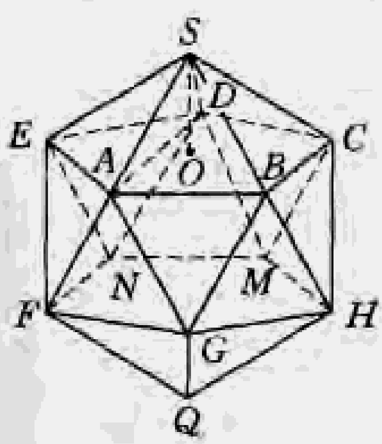


图 4－277

$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}a<a$),从而就可作出五棱锥 $S-ABCDE$,进而作出与它合同的五棱锥 $A-BSEFG$ 等,这样就得到所求作的正二十面体.

再来求正多面体的棱长关于它的外接球半径的表达式.设正多面体的各多面角为正 m 面角,各面为正 n 边形,各二面角为 α 弧度,它的内切球的半径为 r,外接球的半径为 R,并设含棱 AB(长为 a)的两个面切内切球于 O_1 和 O_2,M 为 AB 的中点,则 $\angle O_1MO_2$ 为该正多面体的二面角的平面角,$AM\perp$ 平面 OO_1M,所以 $\angle O_1MO=\frac{\alpha}{2}$,平面 $OAB\perp$ 平面 OO_1M.以 O 为球心、单位 1 为半径作一球面,各交 OM、OB、OO_1、OO_2 于 A'、B'、C'、D',则在球面三角形 $A'B'C'$ 中,有 $\angle B'A'C'=\frac{\pi}{2}$,故据角的余弦定律得 $\cos B'=\sin C'\cos\overset{\frown}{A'C'}$.又 $\overset{\frown}{A'C'}=\angle A'OC'=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$,$\angle C'=\angle BO_1M=\frac{\pi}{n}$,$\angle B'=\frac{1}{2}\angle C'B'D'=\frac{\pi}{m}$,所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \qquad ①$$

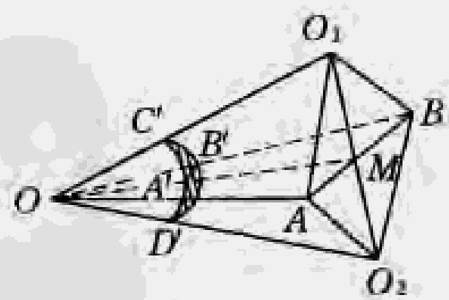


图 4-278

因为 $OO_1=r$,$OA=R$,所以 $r=O_1M\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,$r=R\cos\angle BOO_1$,而 $O_1M=\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$,故 $r=\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.在球面三角形 $A'B'C'$ 中,据角的余弦定律,得 $\cos B'\cos C'=\sin B'\sin C'\cos\overset{\frown}{B'C'}$,即 $\cos\angle BOO_1=\cot B'\cot C'$,所以 $r=R\cot B'\cot C'$,因此 $R=$

$r\text{tg}\frac{\pi}{m}\text{tg}\frac{\pi}{n}=\frac{a}{2}\text{tg}\frac{\pi}{m}\text{tg}\frac{\alpha}{2}$，即

$$a=2R\cot\frac{\pi}{m}\cot\frac{\alpha}{2}. \qquad ②$$

最后，根据①和②求出内接于球的正多面体的棱长，并考察用球的半径 R 或直径 d 的表达式作图．当棱长作出后，就归于上面介绍过的已知棱长作正多面体的问题了．

对于正四面体，它的棱长为 a，通过计算得 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}d$，即 $a^2=\frac{2}{3}d^2$，于是通过作线段 $\frac{d}{3}$ 与 $2d$ 的比例中项就得到棱长 a.

正六面体的棱长为 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}d$，即 $a^2=\frac{1}{3}d^2$，这是容易作出的．

正八面体的棱长为 $a=\sqrt{2}R$，即 $a^2=2R^2$，这也是容易作出的．

正十二面体的棱长为 $a=\frac{(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}}R=\frac{\sqrt{5R^2}-R}{\sqrt{3}}$，它可先作出 $e=\sqrt{5R^2}$（作 $5R$ 与 R 的比例中项，或作两直角边各为 R 和 $2R$ 的直角三角形而得），从而得 $f=e-R$，于是 $a=\frac{f}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{f^2}{3}}$，至此 a 就容易作出了．

对于正二十面体，它的棱长为 $a=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}d$，即 $a^2=\frac{5-\sqrt{5}}{10}d^2=\frac{5d-\sqrt{5d^2}}{10}d$，这可先作出 $p=\sqrt{5d^2}$，再作出 $q=5d-\sqrt{5d^2}$，最后作 $\frac{q}{10}$ 与 d 的比例中项，就得到所求作的棱长 a.

参考文献　[25，pp. 224～225]，[14，pp. 652～669]，[15，

pp. 91～92],[3,p. 252],[2,pp. 193～201].

（郑君文）

费马问题(Fermat's problem) 求作一球使与已知的四个球各相切.

该问题是平面几何中的阿波罗尼奥斯切圆问题在空间的推广,最初由费马给出,后又为葛尔刚、庞斯莱等数学家给出多种解法.

在已知的四个球 O_1、O_2、O_3、O_4 中,不妨设球 O_1 的半球为最小. 现各作与球 O_2、O_3、O_4 同球心,半径分别为球 O_2、O_3、O_4 的半径减去(或加上)球 O_1 的半径的三个球(记为球 O_2'、O_3'、O_4'),这样把求作一球与已知四个球相切,归结为过一点 O_1 求作一球,使与三个球 O_2'、O_3'、O_4' 各相切.

以点 O_1 为反演中心,任取常数 $k(k\neq 0)$ 为反演幂(为简单起见,可取点 O_1 对球 O_2' 的幂为反演幂)作反演变换,设球 O_2'、O_3'、O_4' 的反形(反像)各为球 Q_2、Q_3、Q_4,而所求作的球过反演中心 O_1,它的反形为不过反演中心的平面 α,且与球 Q_2、Q_3、Q_4 相切. 所以又把它归结为求作已知三个球的公切面.

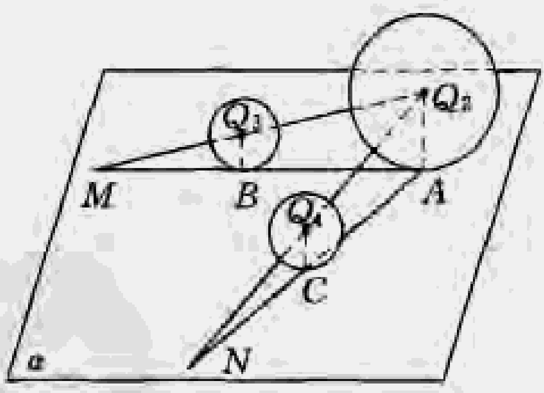


图 4-279

假定球 Q_2、Q_3、Q_4 的公切面 α 已经作出,设它们与 α 相切于点 A、B、C,则 Q_2A、Q_3B、Q_4C 都垂直于平面 α,所以 $Q_2A /\!/ Q_3B /\!/ Q_4C$. 如果 Q_2Q_3、Q_2Q_4 分别与平面 α 相交于点 M、N,则点 M、N 各在直线 AB、AC 上. 因为 $\frac{MQ_2}{MQ_3}=\frac{Q_2A}{Q_3B}$,而 $\frac{Q_2A}{Q_3B}$ 是已知的,所以 M 点可以确定,即 M 点为定点. 同样点 N 也是定点. 因此 MN 是定直线. 这样只要过直线 MN 作

三个已知球中的任一个球的切平面，即为所求的平面 α 了．

线段 Q_2Q_3 可按比 $\frac{Q_2A}{Q_3B}$ 内分与外分，得内、外分点 M'、M，线段 Q_2Q_4 可按比 $\frac{Q_2A}{Q_4C}$ 内分与外分，得内、外分点 N'、N，于是最多有四条定直线 MN、MN'、$M'N$、$M'N'$，而过一直线作一球的切平面最多有两解，所以最多有八解．由于反演变换是一对一的，而把点 O_1 还原为球 O_1 有两种情形，因此求作一球使与已知的四个球各相切，最多有十六解．

参考文献 [25，p. 228]，[16，pp. 338～339]，[18，pp. 254～256].

（郑君文）

拉格朗日-施泰纳定理（Lagrange-Steiner theorem） 切于四面体四个面（所在平面）的球，至少有五个，至多有八个．

这个定理是由拉格朗日（1773）和施泰纳（1828）发现（Steiner，*Crelles Journal*. 2(1828)）的，并被多人研究过（Hermary，*Bulletin de Société Math. de France*. 7（1879）；Neuberg，*Nouvelle Correspondance Math*. 6(1880)）．

将四面体 $ABCD$ 的各面无限伸展，就把空间分为十五个区域．除了四面体的内部区域外，还有十四个区域，其中各以四面体的一个面为界，其余各面无限伸展构成的区域有四个，称为临面区；与每个四面体的三面角成对顶三面角的有四个区域，称为临顶区；其余六个紧抵着四面体的一条棱，称为临棱区．图 4－280 中各表示了这些区域中的一个．

设二面角 AB 与 AC 的内、外平分面相交于过 A 点的四条直线 l、l_1、l_2、l_3，其中 l 是在三面角 $A-BCD$ 内部（图中仅画出 l 这一条）．又 l 与二面角 CD 的内、外平分面各相交于点 I 与 I_1，点 I 在四面体的内部，I_1 在面 BCD 为界的临面区内，它们到四面体的四个面的距离相等，且都唯一存在，由此可见有一个内切球和一个旁

切球.

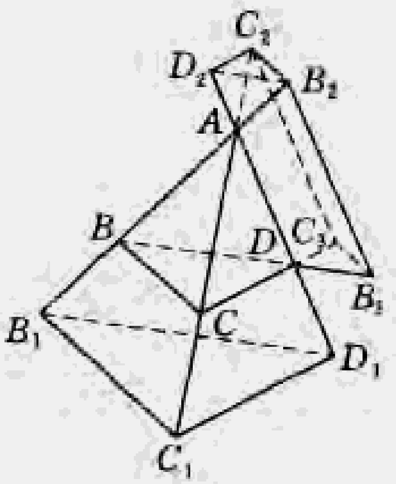


图 4-280

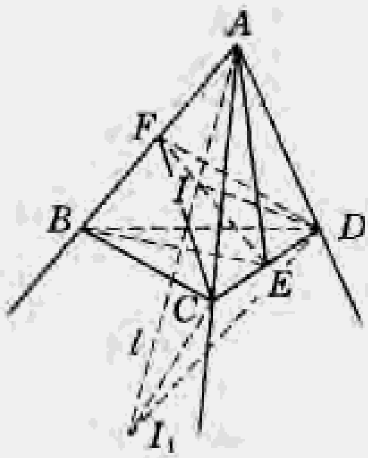


图 4-281

同样二面角 CD 的内、外平分面与 l_1、l_2、l_3 各交于点 I_2、I_3、I_4，且它们分别在其余的三个临面区内都唯一存在，所以各有一个旁切球；另有三个交点 I'、I''、I''' 可能存在或不存在. 现对它们作些考察.

如图 4-281，设二面角 AB 的内平分面交 CD 于 E，二面角 CD 的内平分面交 AB 于 F，则 E、I、F 都在这两个二面角的内平分面上，所以这三点共线. 据葛尔刚定理有

$$\frac{EI}{IF}=\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BCF}},\frac{EI}{IF}=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}},$$

$$\frac{EI}{IF}=\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ACF}},\frac{EI}{IF}=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BDF}}.$$

利用等比定理得

$$\begin{aligned}\frac{EI}{IF}&=\frac{S_{\triangle BCE}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ACE}+S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BCF}+S_{\triangle ACF}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle BDF}}\\&=\frac{S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}}.\end{aligned}$$

上式右边分子是四面体以 CD 为棱的两个面的面积之和，分母是以 AB 为棱的两个面的面积之和.

如果点 I 关于线段 EF 的调和共轭点 I' 存在，则当 $\frac{EI}{IF}>1$ 时，I' 唯一存在于紧抵着棱 AB 的临棱区内；当 $\frac{EI}{IF}<1$ 时，I' 唯一存在于紧抵着棱 CD 的临棱区内；当 $\frac{EI}{IF}=1$，即 I 为 EF 的中点时，I' 不存在．而当 I' 存在时，它就是以 AC 为棱的二面角的外平分面与直线 EF 的交点，所以它到四面体各面的距离相等，即有一个旁切球．

由此可知，一对对棱的临棱区内，至多有一个旁切球，这样三双对棱的临棱区内至多有三个旁切球，又四个临顶区内显然没有旁切球，所以切于四面体四个面的球，至少有五个，至多有八个．

参考文献 [25,pp.179～180],[9,pp.227～229].

（郑君文）

（五）极值

Regiomontanus 问题（Regiomontanus' problem） 在地球表面上看一根垂直于地面的悬杆，站在什么地方时视角最大？

这个问题是德国数学家 Johannas Müller（又叫 Regiomontanus）于 1471 年向 Christain Roder 提出的，以后在他的诞生地哥尼斯堡被命名为 Regiomontanus 问题．这是载入古代数学史的第一个极值问题．

下面给出的简明解法，其指导思想出自 Ad. Losch.

设 XY 是地平线，AB 是悬杆，它延长后垂直地面于 F，于是原问题可表述为在 XY 上找一点 P，使 $\angle APB$ 最大．

Losch提出，使 $\angle APB$ 最大的点必使 $\triangle ABP$ 的外接圆与 XY 相切于点 P．这可从反面来说明：若过 AB 的圆与 XY 相交于 P_1、P_2 两点的话，对于线段 P_1P_2 内的点，其对 AB 的视角必大于 $\angle AP_1B(=\angle AP_2B)$；对于线段 P_1P_2 外的点，其对

AB 的视角必小于$\angle AP_1B$，因此在交点 P_1、P_2 处，视角$\angle AP_1B$（$\angle AP_2B$）不可能达到最大值.

因此，要找的点必是过 A、B 两点且与直线 XY 相切的圆在 XY 上的切点. 此时 $FP^2 = FA \cdot FB$，即 FP 是 FA 和 FB 的比例中项.

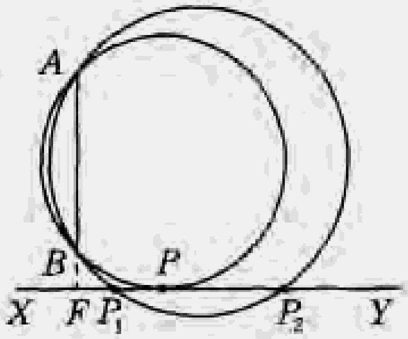


图 4-282

对于原题而言，地平面上所有与 F 点距离等于 $\sqrt{FA \cdot FB}$的点都满足要求.

参考文献 [21，pp.401～402].

（张文华）

四面体的极值问题（Extreme value problem of tetrahedron） 给定四面体 $A_1A_2A_3A_4$，试在其内部求一点 P，使

(1) $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4$ 最小；

(2) $m_1PA_1^2 + m_2PA_2^2 + m_3PA_3^2 + m_4PA_4^2$ 最小（m_1、m_2、m_3、m_4 是正常数）；

(3) P 点到各面的距离之积最大；

(4) P 点到各面的距离平方和最小.

本题引自岩田至康编的《几何学大辞典》第二卷. 在 G. 波利亚的《数学与猜想》一书中，提到了问题(1). 并称之为"空间四点交通问题"，并用物理方法阐述了这一有趣问题.

(1) 如图 4-283，在 A_1、A_2、A_3、A_4 处各置一个滑轮，把四条绳子的一端结在一起（此端记为 P），让每条绳子通过一个滑轮，并在另一端挂 1kg 重的物件，然后让四个重物在重力的作用下自由运动，最后趋于静止，此时的 P 点位置，就是到 A_1、A_2、A_3、A_4 四点距离之和最小的点.

设四根绳子有相同的长度 l，即 $PA_1 + A_1W_1 = PA_2 + A_2W_2 = PA_3 + A_3W_3 = PA_4 + A_4W_4 = l$. 当该力学系统趋于静止时，其势能

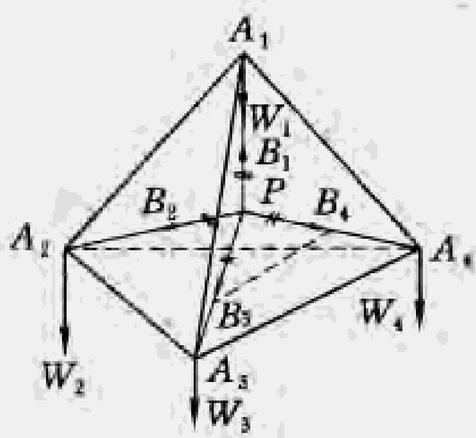


图 4-283

必最小，此时 $A_1W_1+A_2W_2+A_3W_3+A_4W_4$ 必最大，从而 $PA_1+PA_2+PA_3+PA_4$ 最小．

下面分析这个静止时的力学系统．若在 PA_1、PA_2、PA_3、PA_4 上分别取单位向量 $\overrightarrow{PB_1}$、$\overrightarrow{PB_2}$、$\overrightarrow{PB_3}$、$\overrightarrow{PB_4}$，则必有 $\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PB_2}=\overrightarrow{PB_3}+\overrightarrow{PB_4}$，即两个合向量大小相等、方向相反．由此可知，$\angle B_1PB_2=\angle B_3PB_4$．同样的分析可以得到结论：$\angle B_1PB_4=\angle B_2PB_3$，$\angle B_2PB_4=\angle B_3PB_1$．从而 P 点对四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的各面所张的立体角相等（而四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 的对棱相等，因而该四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 是一个等面四面体，P 是它的外心）．

上述 P 点应满足的条件也可以用微分方法求得．设 $A_i(a_i,b_i,c_i)$，$i=1,2,3,4$， $P(x,y,z)$，则

$$F(x,y,z)=PA_1+PA_2+PA_3+PA_4$$
$$=\sum_{i=1}^{4}\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}.$$

$$F'_x(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\frac{x-a_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}},$$

$$F'_y(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\frac{y-b_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}},$$

$$F'_z(x,y,z)=\sum_{i=1}^{4}\frac{z-c_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}}.$$

令 $F'_x=F'_y=F'_z=0$，则得 P 点必须满足的条件：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{4}\frac{x-a_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}}=0,\\ \sum_{i=1}^{4}\frac{y-b_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}}=0,\\ \sum_{i=1}^{4}\frac{z-c_i}{\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}}=0.\end{cases}$$

若记 $\overrightarrow{OP}=\vec{r},\overrightarrow{OA_i}=\vec{a_i}$，则上述条件可简记为

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{(\vec{r}-\vec{a_i})}{|\vec{r}-\vec{a_i}|}=0.$$

(2) 设 $P(x,y,z),A_i(a_i,b_i,c_i),i=1,2,3,4$，则

$$\sum_{i=1}^{4}m_iPA_i^2=\sum_{i=1}^{4}m_i[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2]$$

$$=\sum_{i=1}^{4}m_i(x-a_i)^2+\sum_{i=1}^{4}m_i(y-b_i)^2+\sum_{i=1}^{4}m_i(z-c_i)^2.$$

由于 $$\sum_{i=1}^{4}m_i(x-a_i)^2=\sum_{i=1}^{4}m_i(x^2-2a_ix+a_i^2)$$

$$=(\sum_i m_i)x^2-2(\sum_i m_ia_i)x+\sum_i a_i^2$$

$$=(\sum_i m_i)\left[x^2-\frac{2\sum_i m_ia_i}{\sum_i m_i}x+\left[\frac{\sum_i m_ia_i}{\sum_i m_i}\right]^2\right]+\sum_i a_i^2-\frac{(\sum_i m_ia_i)^2}{\sum_i m_i}$$

$$=(\sum_i m_i)\left[x-\frac{\sum_i m_ia_i}{\sum_i m_i}\right]^2+\sum_i a_i^2-\frac{(\sum_i m_ia_i)^2}{\sum_i m_i}.$$

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{\sum\limits_i m_i a_i}{\sum\limits_i m_i}$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{4} m_i(x-a_i)^2$ 有最小值 $\sum\limits_i a_i^2-\dfrac{(\sum\limits_i m_i a_i)^2}{\sum\limits_i m_i}$.

同理，当 $y=\dfrac{\sum\limits_i m_i b_i}{\sum\limits_i m_i}$ 时，$\sum\limits_i m_i(y-b_i)^2$ 有最小值 $\sum\limits_i b_i^2-\dfrac{(\sum\limits_i m_i b_i)^2}{\sum\limits_i m_i}$；当 $z=\dfrac{\sum\limits_i m_i c_i}{\sum\limits_i m_i}$ 时，$\sum\limits_i m_i(z-c_i)^2$ 有最小值 $\sum\limits_i c_i^2-\dfrac{(\sum\limits_i m_i c_i)^2}{\sum\limits_i m_i}$.

故在点 $P_0\left(\dfrac{\sum\limits_i m_i a_i}{\sum\limits_i m_i},\dfrac{\sum\limits_i m_i b_i}{\sum\limits_i m_i},\dfrac{\sum\limits_i m_i c_i}{\sum\limits_i m_i}\right)$，$\sum\limits_{i=1}^{4} m_i PA_i^2$ 有最小值 $\sum\limits_i (a_i^2+b_i^2+c_i^2)-\dfrac{1}{\sum\limits_i m_i}\left[(\sum\limits_i m_i a_i)^2+(\sum\limits_i m_i b_i)^2+(\sum\limits_i m_i c_i)^2\right]$.

点 P_0 是 A_1、A_2、A_3、A_4 的加权平均中心.

(3) 设四面体的各面面积为 S_1、S_2、S_3、S_4，体积为 V，点 P 到各面的距离为 d_1、d_2、d_3、d_4，则 $S_1d_1+S_2d_2+S_3d_3+S_4d_4=3V$.

$\therefore S_1d_1\cdot S_2d_2\cdot S_3d_3\cdot S_4d_4\leqslant\left[\dfrac{1}{4}(S_1d_1+S_2d_2+S_3d_3+S_4d_4)\right]^4$.

即 $\quad d_1d_2d_3d_4\cdot S_1S_2S_3S_4\leqslant\left(\dfrac{3V}{4}\right)^4$.

当 $S_1d_1=S_2d_2=S_3d_3=S_4d_4$ 时，$d_1d_2d_3d_4$ 有最大值

$$\max(d_1d_2d_3d_4)=\frac{81V^4}{256S_1S_2S_3S_4}.$$

(4) 由柯西不等式，有

$$(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2)$$
$$\geqslant(S_1d_1+S_2d_2+S_3d_3+S_4d_4)^2,$$

当且仅当 $\frac{d_1}{S_1}=\frac{d_2}{S_2}=\frac{d_3}{S_3}=\frac{d_4}{S_4}$ 时等号成立. 即，满足此条件时，

$$\min\left(\sum_{i=1}^{4}d_i^2\right)=\frac{\left(\sum\limits_i S_id_i\right)^2}{\sum\limits_i S_i^2}=\frac{9V^2}{\sum\limits_i S_i^2}.$$

参考文献 [25，p. 234].

(张文华)

空间等周问题(Isoperimetric problem in space) 在体积相等的所有立体中，球具有最小的表面积；在表面积相等的所有立体中，球具有最小的体积.

空间等周问题是平面等周问题在空间的推广(见**平面等周问题**)，施泰纳用综合几何的方法证明了它(因此有人把它称为施泰纳球)，而且还提出了好几种方法. 但施泰纳的证明却预先假定了等体积立体中表面积最小者的存在性. 1884 年，Schwarz(1843～1921)给出了空间等周问题的一个严格证明.

空间等周问题可用如下等周不等式表示：设卵形面 S 的表面积为 F，所包围的区域的体积为 V，则有 $F^3\geqslant36\pi V^2$，当且仅当 S 为球面时等号成立.

下面这种基于对称原理的几何证明方法源于施泰纳.

(1) 如图 4-284，若 C、C' 是两定点，直线 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ CC'$，CC' 的中垂面 E 分别交 l_1、l_2 于 P'、Q'，则对于任意动点 $P\in l_1$、$Q\in l_2$，恒有

$$S_{\triangle CPQ}+S_{\triangle C'PQ}\geqslant S_{\triangle CP'Q'}+S_{\triangle C'P'Q'}.$$

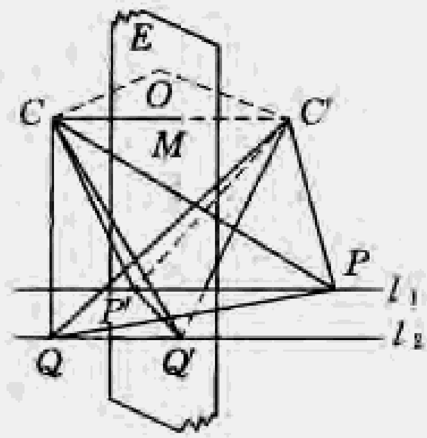


图 4-284

自 C、C' 分别作 $\triangle CP'Q'$、$\triangle C'P'Q'$ 所在平面的垂线，由对称性知它们必与平面 E 交于同一点 O. 设 $OC=OC'=1$. 再自 O 点分别作平面 CPQ、$C'PQ$、$CC'P(CC'P')$、$CC'Q(CC'Q')$ 的垂线，设其有向距离分别为 t、t'、m、n（这里说的"有向距离"，是与所考察的四面体 $CC'PQ$ 及 $CC'P'Q'$ 有关的，例如对于四面体 $CC'PQ$ 而言，O 到平面 CPQ 的有向距离 t，其绝对值等于垂直线段的长，其正负号取决于 O 与 C' 点是否在平面 CPQ 的同侧）.

计算四面体 $CC'P'Q'$ 及 $CC'PQ$ 的体积，有

$$V_{CC'P'Q'}=\frac{1}{3}(1\cdot S_{\triangle CP'Q'}+1\cdot S_{\triangle C'P'Q'}+m\cdot S_{\triangle CC'P'}+n\cdot S_{\triangle CC'Q'}),$$

$$V_{CC'PQ}=\frac{1}{3}(t\cdot S_{\triangle CPQ}+t'\cdot S_{\triangle C'PQ}+m\cdot S_{\triangle CC'P}+n\cdot S_{\triangle CC'Q}).$$

由于　$V_{CC'P'Q'}=V_{CC'PQ}$，$S_{\triangle CC'P'}=S_{\triangle CC'P}$，$S_{\triangle CC'Q'}=S_{\triangle CC'Q}$，

$\therefore t\cdot S_{\triangle CPQ}+t'\cdot S_{\triangle C'PQ}=S_{\triangle CP'Q'}+S_{\triangle C'P'Q'}$.

由于 t、t' 不可能全为负，$|t|\leqslant 1$，$|t'|\leqslant 1$，故

$$S_{\triangle CP'Q'}+S_{\triangle C'P'Q'}=t\cdot S_{\triangle CPQ}+t'\cdot S_{\triangle C'PQ}\leqslant S_{\triangle CPQ}+S_{\triangle C'PQ}.$$

(2) 如图 4-285，侧棱 AA'、BB'、CC' 分别在给定的三条平行直线 l、m、n 上，且棱长 $AA'=a$、$BB'=b$、$CC'=c$ 一定的所有三棱柱中（这里的"棱柱"不要求两底面平行），有正交于侧棱的对称

平面的三棱柱的两底面积之和(即 $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}$)最小.

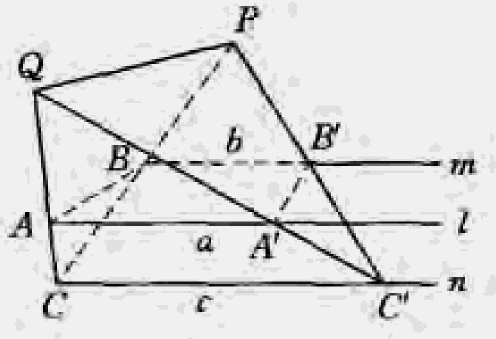


图 4-285

设 CA 与 $C'A'$ 交于 Q,CB 与 $C'B'$ 交于 P.

$\because \dfrac{CP}{BP}=\dfrac{C'P}{B'P}=\dfrac{c}{b},\dfrac{CQ}{AQ}=\dfrac{C'Q}{A'Q}=\dfrac{c}{a}$,

$\therefore \dfrac{CP}{CB}=\dfrac{C'P}{C'B'}=\dfrac{c}{c-b},\dfrac{CQ}{CA}=\dfrac{C'Q}{C'A'}=\dfrac{c}{c-a}$.

故 $\dfrac{S_{\triangle PCC'}}{S_{\triangle PCC'}-S_{BB'C'C}}=\dfrac{c^2}{b^2},\dfrac{S_{\triangle QCC'}}{S_{\triangle QCC'}-S_{CC'A'A}}=\dfrac{c^2}{a^2}$.

从而 $S_{\triangle PCC'}=\dfrac{c^2}{c^2-b^2}\cdot S_{BB'C'C}=$ 定值,

$S_{\triangle QCC'}=\dfrac{c^2}{c^2-a^2}\cdot S_{CC'A'A}=$ 定值.

可见,不管 AA'、BB'、CC' 在三条定平行线上怎样移动,P、Q 必分别在平行于 l 的两定直线上.

另一方面,易得

$$\frac{S_{\triangle CPQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CP\cdot CQ}{CB\cdot CA}=\frac{c}{c-b}\cdot\frac{c}{c-a},$$

$$\frac{S_{\triangle C'PQ}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{C'P\cdot C'Q}{C'B'\cdot C'A'}=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)},$$

即有

$$S_{\triangle CPQ}=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle C'PQ}=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}S_{\triangle A'B'C'}.$$

$$\therefore S_{\triangle CPQ}+S_{\triangle C'PQ}=\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}).$$

可见,$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}$ 和 $S_{\triangle CPQ}+S_{\triangle C'PQ}$ 同时达到最小值. 但是由(1)知,要 $S_{\triangle CPQ}+S_{\triangle C'PQ}$ 取得最小值,P、Q 应在 CC' 的中垂面 E 上,而此时$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$ 关于平面 E 对称.

(3) 体积 V 一定的立体中，表面积最小的立体 Ω 必是球.(这里预先假定了 Ω 的存在性)

显然，Ω 是有界的. 任取一个平面 E，用垂直于平面 E 的直线把立体 Ω 分割成一系列三棱柱 $ABC—A'B'C'$，使得这些三棱柱如此之狭小，以至于 Ω 的表面上的界面(曲面)三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 可以看成为平面三角形而不致影响三棱柱的体积. 对于每一个这样的三棱柱 $ABC—A'B'C'$，在直线 AA'、BB'、CC' 上分别取 $A_1A_1'=AA'$，$B_1B_1'=BB'$，$C_1C_1'=CC'$，且它们的中点都在平面 E 上. 这样得到的新棱柱 $A_1B_1C_1—A_1'B_1'C_1'$ 具有垂直于棱的对称平面. 由(2)知，

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}+S_{\triangle A_1'B_1'C_1'}\leqslant S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}.$$

利用上述方法，我们可以从立体 Ω 出发，得到一个新立体 Ω'，它和 Ω 有相同的体积，但具有对称平面 E. 从而 Ω' 的表面积 σ' 不大于 Ω 的表面积 σ. 但根据原假定，应有 $\sigma\leqslant\sigma'$，故必有 $\sigma'=\sigma$. 这说明，Ω 必有一个与平面 E 平行的对称平面.

由于平面 E 是任意取的，故 Ω 应有任意方向的对称平面. 设 π_1、π_2、π_3 是 Ω 的互相正交的三个对称平面，其交点为 O，则 O 是 Ω 的对称中心.

今设 A 为 Ω 表面上的一个固定的点，P 为 Ω 表面上异于 A 的任意点，记 AP 的中垂面为 π，则 π 必为 Ω 的对称平面，它必过 O 点，于是 $OP=OA$. 即 Ω 的表面上的任意点到定点 O 的距离都等于定长 OA，故 Ω 必是一个球.

参考文献 [21，pp. 418～423].

(张文华)

蜂巢问题(Honeycomb problem) 一个蜂巢，其外形如图 4-286 所示的正六棱柱的一部分，一端是正六边形 $A'P'B'Q'C'R'$，另一端是由三个全等的菱形 $SAPB$、$SBQC$、$SCRA$ 所组成的顶

盖.问：如果这一立体的容积一定，如何安置这三个全等的菱形盖面，使该立体的表面积最小？

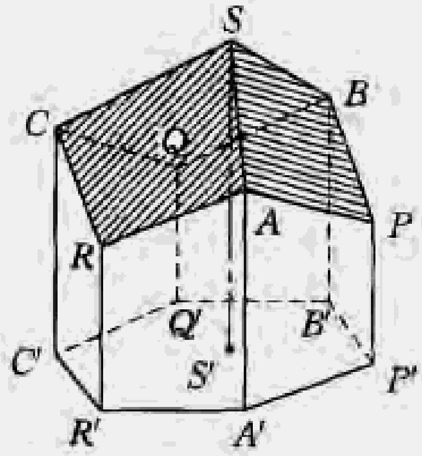


图 4-286

历史上不少学者都注意到了蜂巢的奇妙结构.早在公元 300 年前后，帕波斯就研究过蜂房的形状，认为在其他条件相同的情况下，六棱柱形的蜂巢的容积最大.著名天文学家开普勒说，蜂巢的菱形面的角应该和菱形十二面体（即各面都是菱形的十二面体）的角一样.法国天文学家 Maraldi 经过详细的观察研究后指出，蜂巢菱形面的一个角等于 109°28′，另一个角是 70°32′.法国自然哲学家 Reaumur（1683～1757）则作出猜想：用这样的角度来建造蜂房，在相同的容积下最节省材料.他又向瑞士数学家 Samuel Koenig 请教，Koenig 证实了这一猜想，但计算的结果是 109°26′和 70°34′，和实测数据有 2′之差.1743 年，马克劳林在爱丁堡重新研究蜂巢问题，得到了更惊人的结果，他完全用初等方法计算出菱形的钝角应为 109°28′16″，锐角为 70°31′44″，和实测数值完全一致.原来，2′之差不是由于蜂巢造的不准，而是 Koenig 算错了，因为他所用的对数表印错了.

马克思在《资本论》中也提到过这个问题.

1964 年，华罗庚教授曾用此题考过高中生.

如图 4-286 所示，设 SS' 是正六棱柱的轴线，S' 是底面正六边形的中心，底面边长为 $2a$，侧棱 $AA' = BB' = CC' = b$（如图 4-287），又设 $SS' = b + x$，$PP' = QQ' = RR' = b - x$，菱形的对角线 $SP = SQ = SR = 2y(y > x)$，则蜂巢的底面积 $S_{底} = 6\sqrt{3}a^2$，侧面积 $S_{侧} = 6 \times \dfrac{b + (b - x)}{2} \times 2a = 6a(2b - x)$，上面三个菱形盖面的面积 $S_{盖} = 3 \times 2\sqrt{3}a \times y = 6\sqrt{3}ay$，蜂巢的

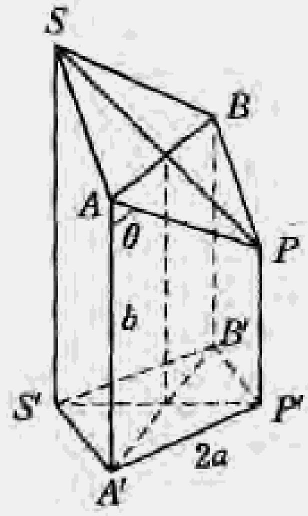


图 4－287

表面积 $S = 6\sqrt{3}a^2 + 12ab + 6a(\sqrt{3}y - x)$.

又，在梯形 $SS'P'P$ 中，$SP^2 = S'P'^2 + (SS' - PP')^2$，即 $y^2 = a^2 + x^2$.

注意到 $(\sqrt{3}y - x)^2 = (\sqrt{3}y - x)^2 + 2(a^2 + x^2 - y^2) = 2a^2 + 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 2a^2 + (\sqrt{3}x - y)^2$，可知，当 $y = \sqrt{3}x$ 时，$(\sqrt{3}y - x)$ 有最小值，从而表面积 S 有最小值. 此时，$x = \frac{\sqrt{2}}{2}a, y = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

在菱形 $SAPB$ 中，记 $\angle ASB = 2\alpha$，则 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{SP} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{6}a} = \sqrt{2}$. 于是，$\alpha = 54°44'$，$2\alpha = 109°28'$，即蜂巢在顶点 S 处的三个面角均为 $109°28'$.

记 $\angle A'AP = \theta$，则 $\operatorname{tg}\theta = \frac{A'P'}{AA' - PP'} = \frac{2a}{x} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = 2\sqrt{2}$，$\theta = 70°32'$. 于是，$\angle APP' = 180° - 70°32' = 109°28'$. 可见，蜂巢在点 P（Q、R 处亦一样）的三个面角也都是 $109°28'$.

由于三面角 $S - ABC$ 与三面角 $P - AP'B$ 的各个面角都是 $109°28'$，所以两个三面角全等. 又因为以 PP' 为棱的二面角等于 $120°$，可见，蜂巢的三个菱形面之间以及菱形面与侧面之间所成的二面角都是 $120°$. 上述计算结果与实测数据完全一致.

参考文献　[6, pp. 500～502], [21, pp. 398～400].

（张文华）

（六）球面三角形与球面四边形

球面三角形的梅内劳斯公式（Menelaus formula for a spherical

triangle） 若一大圆弧截球面三角形 ABC 的三边 CA、AB、BC（或其延长线）于点 P_1、P_2、P_3（如图 4-288），则

$$\sin \overset{\frown}{P_1A} \sin \overset{\frown}{P_2B} \sin \overset{\frown}{P_3C} = \sin \overset{\frown}{P_1C} \sin \overset{\frown}{P_2A} \sin \overset{\frown}{P_3B}.$$

这是梅内劳斯在他的《球面论》一书的第三卷中提出的一个定理. 梅内劳斯是第一个使三角学脱离天文学而成为一门独立学科的人，被尊为“三角学的奠基者”. 在平面几何中也有被称之为梅内劳斯定理的类似公式，但那个定理不是梅内劳斯发现的，它早为前人所知，梅内劳斯只是拿来运用并推广到球面上去而已.

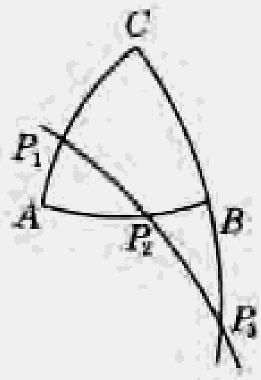


图 4-288

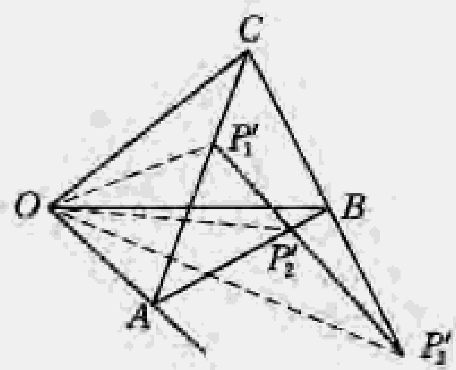


图 4-289

如图 4-289，作球心三面角 $O-ABC$，连 AB、BC、CA 得一个平面三角形 ABC. $OA=OB=OC$. 作大圆弧 P_1P_2 所在平面 OP_1P_2，设该平面交 CA、AB、BC 或其延长线于 P_1'、P_2'、P_3'，P_1'、P_2'、P_3' 必分别在 OP_1、OP_2、OP_3 上. 因此，$\angle COP_1' \overset{m}{=\!=} \overset{\frown}{CP_1}$，$\angle P_1'OA \overset{m}{=\!=} \overset{\frown}{P_1A}$，$\angle AOP_2' \overset{m}{=\!=} \overset{\frown}{AP_2}$，$\angle P_2'OB \overset{m}{=\!=} \overset{\frown}{P_2B}$，$\angle BOP_3' \overset{m}{=\!=} \overset{\frown}{BP_3}$，$\angle P_3'OC \overset{m}{=\!=} \overset{\frown}{P_3C}$.

在 $\triangle OCA$ 中，$OC=OA$，$\sin\angle COP_1' : \sin\angle P_1'OA = CP_1' : P_1'A$，

即 $$\frac{\sin \overset{\frown}{CP_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A}} = \frac{CP_1'}{P_1'A}.$$

同理，$\dfrac{\sin \overset{\frown}{AP_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2B}}=\dfrac{AP_2'}{P_2'B}$，$\dfrac{\sin \overset{\frown}{BP_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3C}}=\dfrac{BP_3'}{P_3'C}$.

$$\therefore \frac{\sin \overset{\frown}{CP_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A}}\cdot\frac{\sin \overset{\frown}{AP_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2B}}\cdot\frac{\sin \overset{\frown}{BP_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3C}}=\frac{CP_1'}{P_1'A}\cdot\frac{AP_2'}{P_2'B}\cdot\frac{BP_3'}{P_3'C}.$$

由于 P_1'、P_2'、P_3' 在同一直线上（该直线是平面 ABC 和平面 OP_1P_2 的交线），即一直线截平面三角形 ABC 的三边或其延长线于点 P_1'、P_2'、P_3'，根据平面三角形的梅内劳斯公式，有 $\dfrac{CP_1'}{P_1'A}\cdot\dfrac{AP_2'}{P_2'B}\cdot\dfrac{BP_3'}{P_3'C}=-1$.

$$\therefore \frac{\sin \overset{\frown}{CP_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1A}}\cdot\frac{\sin \overset{\frown}{AP_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2B}}\cdot\frac{\sin \overset{\frown}{BP_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3C}}=-1,$$

即 $$\sin \overset{\frown}{P_1A}\sin \overset{\frown}{P_2B}\sin \overset{\frown}{P_3C}=\sin \overset{\frown}{P_1C}\sin \overset{\frown}{P_2A}\sin \overset{\frown}{P_3B}.$$

这个公式也可以从球面直角三角形的有关公式导出.

如图 4－290，过 A、B、C 分别作大圆弧 P_1P_3 的垂线 AX、BY、CZ，X、Y、Z 是垂足，则

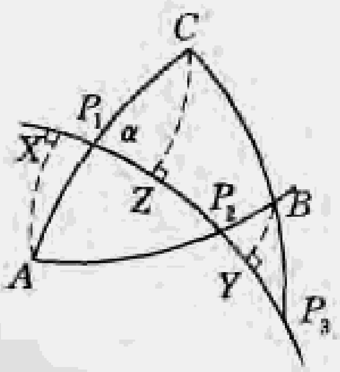


图 4－290

$$\sin\alpha=\frac{\sin \overset{\frown}{AX}}{\sin \overset{\frown}{AP_1}}=\frac{\sin \overset{\frown}{CZ}}{\sin \overset{\frown}{P_1C}},$$

即 $$\frac{\sin \overset{\frown}{AP_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1C}}=\frac{\sin \overset{\frown}{AX}}{\sin \overset{\frown}{CZ}}.$$

同理，$\dfrac{\sin \overset{\frown}{CP_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3B}}=\dfrac{\sin \overset{\frown}{CZ}}{\sin \overset{\frown}{BY}}$，

$$\frac{\sin \overset{\frown}{BP_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A}}=\frac{\sin \overset{\frown}{BY}}{\sin \overset{\frown}{AX}}.$$

$$\therefore \frac{\sin \overset{\frown}{AP_1}}{\sin \overset{\frown}{P_1C}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{CP_3}}{\sin \overset{\frown}{P_3B}} \cdot \frac{\sin \overset{\frown}{BP_2}}{\sin \overset{\frown}{P_2A}} = \frac{\sin \overset{\frown}{AX} \sin \overset{\frown}{CZ} \sin \overset{\frown}{BY}}{\sin \overset{\frown}{CZ} \sin \overset{\frown}{BY} \sin \overset{\frown}{AX}} = 1,$$

即 $\sin \overset{\frown}{AP_1} \cdot \sin \overset{\frown}{BP_2} \cdot \sin \overset{\frown}{CP_3} = \sin \overset{\frown}{P_1C} \cdot \sin \overset{\frown}{P_2A} \cdot \sin \overset{\frown}{P_3B}$.

注：对于分别在球面三角形 ABC 的三边 CA、AB、BC 或其延长线上的三点 P_1、P_2、P_3（其中一点或三点在边的延长线上）而言，P_1、P_2、P_3 三点共大圆的充分必要条件是

$$\sin \overset{\frown}{AP_1} \cdot \sin \overset{\frown}{BP_2} \cdot \sin \overset{\frown}{CP_3} = \sin \overset{\frown}{P_1C} \cdot \sin \overset{\frown}{P_2A} \cdot \sin \overset{\frown}{P_3B}.$$

参考文献 [11,pp. 135～136],[25,p. 266],[3,pp. 226～227].

（张文华）

球面三角形的正弦定理(Sine theorem for a spherical triangle) 球面三角形的边的正弦之比等于对角的正弦之比，即在球面三角形 ABC 中，若球面角 A、B、C 的对边是 a、b、c，则

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

德国数学家、天文学家 Regiomontanus 在《论三角》(*De Triangulis*)一书中提出了这个定律. 该书包括平面三角和球面三角两部分，它使三角学正式脱离天文学而成为一门独立科目. 据说该书写于1462～1463 年间，但直到 1533 年才得以正式出版. 而德国数学家 Johan Werner (1468～1528) 则在《论球面三角》(*De Triangulis sphaericis*,1514)一书中改进并发表了 Regiomontanus 的思想.

另有资料表明，阿拉伯人 Abul Wefa(940～998)在其所著的《天文大全》中早就提到过球面三角形的正弦定律.

作球心三面角 $O-ABC$. 过 A 作平面 BOC 的垂线 AH，H 为垂足. 在平面 BOC 中作 $HE\perp OC$ 于 E，$HD\perp OB$ 于 D，连 AD、AE. 由三垂线定理知 $AD\perp OB$，$AE\perp OC$. $\therefore \angle ADH$ 是二面角 $A-OB-C$

的平面角，$\angle ADH = \angle B$. $\angle AEH$ 是二面角 $A-OC-B$ 的平面角，$\angle AEH = \angle C$. 因此

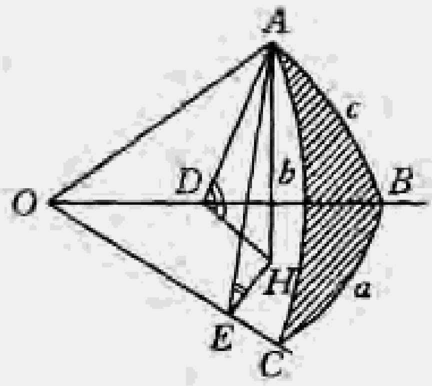


图 4-291

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\frac{AD}{OA}}{\frac{AH}{AE}} = \frac{AD \cdot AE}{OA \cdot AH},$$

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\frac{AE}{OA}}{\frac{AH}{AD}} = \frac{AD \cdot AE}{OA \cdot AH}.$$

故 $\dfrac{\sin c}{\sin C} = \dfrac{\sin b}{\sin B}$. ①

同理可证 $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B}$. ②

由①、②，得 $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C} = \dfrac{1}{k}$.

进一步计算可得

$$k = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

参考文献 [19, p. 518], [11, p. 276], [4, pp. 51～52, pp. 117～118], [25, p. 260], [8, p. 669].

（张文华）

球面三角形边的余弦定理（Cosine theorem of sides for a spherical triangle） 球面三角形的每一边的余弦等于其他两边余弦的乘积加上这两边的正弦及其夹角的余弦的乘积，即

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A;$$
$$\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos B;$$
$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C.$$

这个公式是阿拉伯天文学家兼数学家 Al-Battānī（850～929）

首创的. Al-Battānī 著有《星的科学》一书,该书的拉丁文译本把阿拉伯文 dschaib(弯凹)意译成 sinus,这就是"正弦"(sine)一词的由来. 在 Regiomontanus 的名著《论三角》一书中也谈到了球面三角形的边的余弦公式,该书第五篇中的第二个定理就是球面三角形的余弦定理:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

取球面三角形 ABC,作球心三面角 $O-ABC$.

(1) 假设 b、$c<\frac{\pi}{2}$. 自 A 作弧 b、c 的切线分别交 OC、OB 于 N、M. 则 $\angle MAN=A$(它是二面角 $M-OA-N$ 的平面角),$\angle MON=a$,$\angle AON=b$,$\angle AOM=c$(单位:弧度).

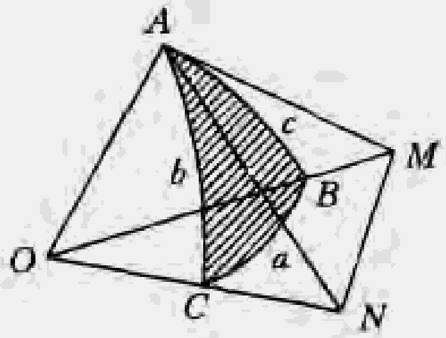


图 4-292

在 $\triangle AMN$ 中,$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos A$.

在$\triangle OMN$ 中,$MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cos a$.

$\therefore AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos A$

$=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cos a$,

$$\cos a=\frac{(OM^2-AM^2)+(ON^2-AN^2)+2AM\cdot AN\cos A}{2OM\cdot ON}$$

$$=\frac{OA\cdot OA}{OM\cdot ON}+\frac{AM}{OM}\cdot\frac{AN}{OM}\cdot\cos A.$$

在 Rt$\triangle AOM$ 和 Rt$\triangle AON$ 中,有

$$\frac{OA}{OM}=\cos c,\frac{AM}{OM}=\sin c,\frac{OA}{ON}=\cos b,\frac{AN}{ON}=\sin b.$$

$\therefore \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$

(2) 对于 $b>\frac{\pi}{2}$ 且 $c>\frac{\pi}{2}$ 的情况,如图 4-293,反向延长 OB 与弧 c 所在圆交于 B',反向延长 OC 与弧 b 所在圆交于 C'. 这时球

面三角形 $AB'C'$ 中，$\overset{\frown}{AC'}=\pi-b<\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{AB'}=\pi-c<\frac{\pi}{2}$，$\overset{\frown}{B'C'}=\overset{\frown}{BC}=a$.

$$\therefore \cos a=\cos(\pi-b)\cos(\pi-c)+\sin(\pi-b)\sin(\pi-c)\cos A=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

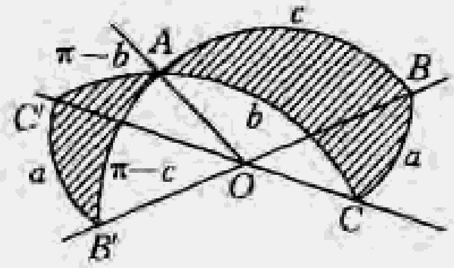


图 4-293

(3) 当 $c>\frac{\pi}{2}, b<\frac{\pi}{2}$，或 $c<\frac{\pi}{2}, b>\frac{\pi}{2}$ 时，可类似地处理.

(4) 当 $c=\frac{\pi}{2}$ 或 $b=\frac{\pi}{2}$ 时，命题也是对的.

设 $c=\frac{\pi}{2}$，如图 4-294，作 $CH\perp$ 平面 AOB 于 H. 作 $HM\perp OA$ 于 M，$HN\perp OB$ 于 N. 由于 $\overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore ON=MH$.

$$\cos a=\frac{ON}{OC}, \cos A=\frac{MH}{MC}.$$

$$\sin b=\frac{MC}{OC}.$$

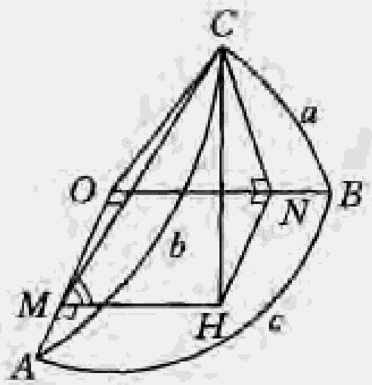


图 4-294

$$\therefore \cos a=\sin b\cos A=\cos\frac{\pi}{2}\cos b+\sin\frac{\pi}{2}\sin b\cos A.$$

参考文献　[6,p.184],[11,p.276],[4,p.42,p.117].

(张文华)

球面三角形角的余弦定理(Cosine theorem of angle for a spherical triangle)　球面三角形的角的余弦等于其他两角的余弦的乘积冠以负号，再加上这两角的正弦及其夹边的余弦之乘积. 对于球面三角形 ABC，有

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a;$$
$$\cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos b;$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

历史上，是谁首先提出了角的余弦定理，一时难以考证，但是在韦达于1579年出版的《标准数学》(*Common Mathematicus*)一书中已提到了钝角球面三角形的角的余弦定理了.

利用"极三角形"，可以由边的余弦定理导出角的余弦定理.

设球面三角形 ABC 各边所在大圆的极为 A'、B'、C'，且 $\overset{\frown}{AA'}$、$\overset{\frown}{BB'}$、$\overset{\frown}{CC'}$ 都小于 $90°$，分别过 A'、B'，B'、C'，C'、A' 的三个大圆弧构成一个球面三角形 $A'B'C'$，它是原球面三角形 ABC 的极三角形. 这两个球面三角形有如下关系：极三角形的边与原三角形的相应的角互补，极三角形的角与原三角形的相应的边也互补，即

$A + a' = \pi,\ B + b' = \pi,\ C + c' = \pi;$

$a + A' = \pi,\ b + B' = \pi,\ c + C' = \pi.$

对于球面三角形 $A'B'C'$，有边的余弦定理

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

由于

$$\cos a' = \cos(\pi - A) = -\cos A,$$

$$\cos b' = \cos(\pi - B) = -\cos B.$$

$$\sin b' = \sin(\pi - B) = \sin B,$$

$$\sin c' = \sin(\pi - C) = \sin C, \cos A' = -\cos a.$$

$\therefore \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$

其余两个等式可类似地证明.

参考文献 [11,p.277].

(张文华)

球面三角形的面积公式(Area formula of a spherical triangle)

球面三角形的面积等于该三角形的角超(角盈或球面剩余)ε 与球半径平方的乘积，即

$$S_{\triangle} = \varepsilon R^2.$$

该公式是由英国数学家 Thomas Harriot(1560～1621)于

1603 年提出的，称为 Harriot 定理. 荷兰数学家 Girard 于 1629 年、卡瓦列里于 1632 年也相继发现了该公式.

记球面三角形 ABC 的面积为 $S_{\triangle}$. 如图 4－295，对球面三形 ABC 的每个角作相应的球面二角形，即，对 A 角作二角形 ABA_0CA，对 B 角作二角形 BAB_0CB，对 C 角作二角形 CAC_0BC. 由于球面二角形的面积等于 $\frac{\alpha}{2\pi}\cdot 4\pi R^2$，其中 α 是相应球面角的度量，故

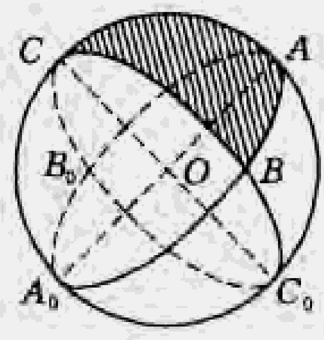


图 4－295

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AB_0C}=S_{BAB_0CB}=\frac{B}{2\pi}\cdot 4\pi R^2,$$

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_0BC}=S_{ABA_0CA}=\frac{A}{2\pi}\cdot 4\pi R^2,$$

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABC_0}=S_{CAC_0BC}=\frac{C}{2\pi}\cdot 4\pi R^2.$$

将上述三式相加，得

$$3S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AB_0C}+S_{\triangle A_0BC}+S_{\triangle ABC_0}=2(A+B+C)R^2.$$

由于$\triangle AB_0C_0$ 和$\triangle A_0BC$ 对称，它们的面积相等，且

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle AB_0C}+S_{\triangle AB_0C_0}+S_{\triangle ABC_0}=2\pi R^2,$$

故
$$2S_{\triangle ABC}+2\pi R^2=2(A+B+C)R^2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=(A+B+C-\pi)R^2=\varepsilon R^2.$$

对于简单球面多边形，上述结论也是正确的，即球面多边形的面积等于它的角超 ε 与球半径平方的乘积，$S=\varepsilon R^2$.

参考文献 ［25，p. 260］.

（张文华）

球面三角形的 Delambre 公式（Delambre formula for a spherical triangle） 球面三角形 ABC 中，关于半角和与半角差，有如下公式：

$$(1)\ \frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}=\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}};\ (2)\ \frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}=\frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}};$$

$$(3)\ \frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=\frac{\cos\dfrac{a+b}{2}}{\cos\dfrac{c}{2}};\ (4)\ \frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=\frac{\sin\dfrac{a+b}{2}}{\sin\dfrac{c}{2}}.$$

这些公式是由法国数学家 Delambre(1749～1822)于 1807 年首先提出的.

下面是公式(1)的证明.

由半角公式：$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}$，$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}$，$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}$，$\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}$，及 $\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$ 可得

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\left[\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\right]$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(p-b+p-a)\cos\frac{1}{2}(p-b-p+a)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{c}{2}}.$$

即
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\dfrac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\dfrac{c}{2}}.$$

公式(2)、(3)、(4)可类似地证明.

参考文献 [19,p.533],[25,pp.262~263].

(张文华)

纳皮尔相似公式(Napier similar formula)

在球面三角形 ABC 中,

(1) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};$$

(2) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)};$$

(3) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)};$$

(4) $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

这组公式是英国数学家纳皮尔于1614年首先提出的.

由 Delambre 公式:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \tag{①}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \tag{②}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}, \qquad ③$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}, \qquad ④$$

①÷②，得 $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}; \qquad ⑤$$

③÷④，得 $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}; \qquad ⑥$$

④÷②，得 $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)};$$

③÷①，得 $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

⑥÷⑤，直接得到球面三角形的正切定理

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}.$$

参考文献 [25,p.262],[19,pp.533～534].

（张文华）

球面三角形的 Cagnoli 公式（Cagnoli formula for a spherical triangle） 设 E 表示球面三角形 ABC 的角超，$E=A+B+C-$

$\pi, p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

这个公式是由 Cagnoli 提出的，载于其著作 *Trigonometria*，可参照 Lexell，*Acta petrop*(1782)。

$$\begin{aligned}\sin\frac{E}{2}&=\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)\\&=\sin\left[\frac{1}{2}(A+B)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}C\right)\right]\\&=\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\\&\quad-\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}C\right)\\&=\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

由 Delambre 公式，$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}$，

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{C}{2},$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{E}{2}&=\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\\&=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C\\&=\sin C\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sec\frac{c}{2}.\end{aligned}$$

又由半角公式

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}},$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},\text{得}$$

$$\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\frac{2}{\sin a\sin b}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.$$

$$\therefore \sin\frac{E}{2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\sin a\sin b\cos\frac{c}{2}}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

参考文献 [19,pp.535～536],[25,pp.263～264].

（张文华）

球面三角形的欧拉公式(Euler formula for a spherical triangle) 设 E 是球面三角形 ABC 的角超，$E=A+B+C-\pi$，则

$$\cos\frac{E}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin C}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos C}$$

$$=\frac{2n}{1+\cos a+\cos b+\cos c},$$

其中$n=\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$，

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

这两个公式是著名数学家欧拉提出的，原载于 *Acta Acad Peter*. 2,31(1778).

公式的证明如下：

(1) $$\cos\frac{E}{2}=\cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{C-\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C-\pi}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C-\pi}{2}$$

$$=\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\sin^2\frac{C}{2}+\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin^2\frac{C}{2}+\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin^2\frac{C}{2}$$

$$+\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$+\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{c}{2}}\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C\right)$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\sin a\sin b\cos C}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+(\cos c-\cos a\cos b)}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

(2) 由上，$\cos\frac{E}{2}=\dfrac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}}$. ①

又 $\sin\frac{E}{2}=\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi-C}{2}\right)$

$$=\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\left(\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}-\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)\cdot\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\left(\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}-\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\right)\frac{1}{2}\sin C$$

$$=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{c}{2}}.$$ ②

由①、②得

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin C}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos C}.$$

再者，由 $\cos\frac{E}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$ 及 Cagnoli 公式

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$ 得

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\frac{2\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{1+\cos a+\cos b+\cos c}.$$

参考文献 [25, pp. 264～265].

（张文华）

球面三角形的 L'Huillier 公式（L'Huillier formula for a spherical triangle） 球面三角形 ABC 的角超 E 满足如下关系式

$$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}.$$

其中 a、b、c 是球面三角形 ABC 的三边之弧度数，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$E=A+B+C-\pi$.

这个公式是由瑞士数学家 L'Huillier（1750～1840）首先提出的，见勒让德的 *Geometrie Note* 10. 利用这个公式，可以由三边求出球面三角形的角超.

$$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{4}[A+B-(\pi-C)]\cos\frac{1}{4}[A+B+(\pi-C)]}{2\cos\frac{1}{4}[A+B-(\pi-C)]\cos\frac{1}{4}[A+B+(\pi-C)]}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(\pi-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(\pi-C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}-\cos\frac{C}{2}}{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}+\sin\frac{C}{2}}.$$

再利用 Delambre 公式，得

$$\operatorname{tg}\frac{E}{4}=\frac{\left(\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}-1\right)\cos\frac{C}{2}}{\left(\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}+1\right)\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}\right)}{\left(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}\right)}\cdot\cot\frac{C}{2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\cdot\cot\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(p-b)\sin\frac{1}{2}(p-a)}{\cos\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}(p-c)}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin(p-a)\sin(p-b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}p\sin\frac{1}{2}(p-a)\sin\frac{1}{2}(p-b)\sin\frac{1}{2}(p-c)}{\cos\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}(p-a)\cos\frac{1}{2}(p-b)\cos\frac{1}{2}(p-c)}}$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)}.$$

利用 L'huilier 公式，可以求出地球上一个三角形的角超（角盈）.

当球半径 R 趋于无穷时，球面三角形就逐渐接近于平面三角形，而且每个球面角也趋于对应的平面角，球面角超则趋于零. 设球面三角形中以弧度为度量单位的边$\frac{\bar{a}}{R}$、$\frac{\bar{b}}{R}$、$\frac{\bar{c}}{R}$与平面三角形中的边 $\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{c}$ 的长度相对应，由于当角度很小时角的正切值可以用它的弧度数来代替，因此，由 L'huilier 公式，可得

$$\frac{\bar{E}}{4}=\sqrt{\frac{\bar{p}}{2R}\,\frac{(\bar{p}-\bar{a})}{2R}\cdot\frac{(\bar{p}-\bar{b})}{2R}\cdot\frac{(\bar{p}-\bar{c})}{2R}}.$$

于是面积

$$A=\bar{E}R^2=\sqrt{\bar{p}(\bar{p}-\bar{a})(\bar{p}-\bar{b})(\bar{p}-\bar{c})}.$$

这样就由球面三角形的面积公式演变为平面三角形的面积公式

(海伦公式).

当 R 相当大但仍为有限数(因此,球面三角形的边长相对很小)时,勒让德给出了如下定理:

一个球面三角形,当其边很短,因而球面角盈也很小时,它的面积跟相应的平面三角形(其边长和球面三角形的边长相等)的面积近似地相等,而平面三角形的每个内角要比相应的球面三角形的角要小些,其减少量约为球面角盈的三分之一.

参考文献[19,pp. 536~537],[25,pp. 264~265].

(张文华)

球面三角形的古德曼公式(Gudermann formula for a spherical triangle)若 D 是球面三角形 ABC 的边 BC 的中点,则

$$\cos c + \cos b = 2\cos\frac{a}{2}\cos AD.$$

该公式是由德国数学家古德曼提出的,原文载于 *Niedeze sphäzck*. 利用该公式可以由球面三角形的三边求出中线.

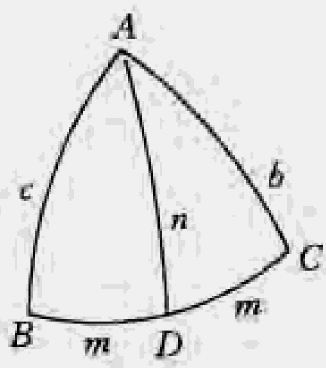


图 4-296

如图 4-296,设 $BD = DC = m$,$AD = n$. 在球面三角形 ABD 和 ADC 中运用边的余弦定理,得

$$\cos c = \cos m\cos n + \sin m\sin n\cdot\cos\angle ADB,$$

$$\cos b = \cos m\cos n + \sin m\sin n\cos\angle ADC.$$

由于 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$,$\cos\angle ADB = -\cos\angle ADC$,

$\therefore \cos b + \cos c = 2\cos m\cos n$,即

$$\cos b + \cos c = 2\cos\frac{a}{2}\cos AD.$$

由球面三角形的古德曼公式,可推出球面四边形的古德曼公

式：在球面四边形 $ABCD$ 中，若 E、F 是对角线 AC、BD 的中点，则

$$\cos\overset{\frown}{AB}+\cos\overset{\frown}{BC}+\cos\overset{\frown}{CD}+\cos\overset{\frown}{DA}=4\cos\overset{\frown}{AE}\cos\overset{\frown}{BF}\cos\overset{\frown}{EF}.$$

如图 4－297，分别在球面三角形 ABC、ACD 和 BDE 中应用古德曼公式，有

$$\cos\overset{\frown}{AB}+\cos\overset{\frown}{BC}=2\cos\overset{\frown}{AE}\cos\overset{\frown}{BE},$$

$$\cos\overset{\frown}{CD}+\cos\overset{\frown}{AD}=2\cos\overset{\frown}{AE}\cos\overset{\frown}{DE},$$

$$\cos\overset{\frown}{BE}+\cos\overset{\frown}{DE}=2\cos\overset{\frown}{BF}\cos\overset{\frown}{EF}.$$

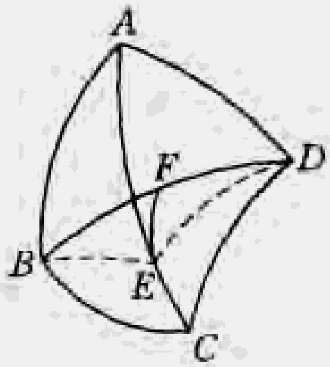


图 4－297

$$\begin{aligned}\therefore \cos\overset{\frown}{AB}+\cos\overset{\frown}{BC}+\cos\overset{\frown}{CD}+\cos\overset{\frown}{DA}&=2\cos\overset{\frown}{AE}(\cos\overset{\frown}{BE}+\cos\overset{\frown}{DE})\\&=4\cos\overset{\frown}{AE}\cos\overset{\frown}{BF}\cos\overset{\frown}{EF}.\end{aligned}$$

参考文献　[25，p. 266，p. 278].

（张文华）

球面四边形的 Lexell 定理（Lexell's theorem for a spherical quadrilateral）　球面四边形 $ABCD$ 内接于小圆的充分必要条件是 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$.

本题选自 Lexell，*Acta petropolitana*（1782）.

Lexell 是俄国数学家（Дексель，А. И，1740～1784），在球面三角、球面几何方面发表过四卷集的专著. 例如，他给出了如下定理：若给定球面三角形的两个顶点及面积，则第三顶点的轨迹是两个小圆，它们通过已知顶点的对径点.

与平面几何对照，这个定理与平面上四点共圆定理相仿. 若令球面半径趋于无穷大，球面四边形的角盈趋于零，则该定理即演化为平面上的四点共圆定理.

(1) 必要性：若四边形 $ABCD$ 内接于小圆 O，$\overset{\frown}{OA}=\overset{\frown}{OB}=\overset{\frown}{OC}=\overset{\frown}{OD}$. 由于同一个球面三角形中等边所对的角相等，故有

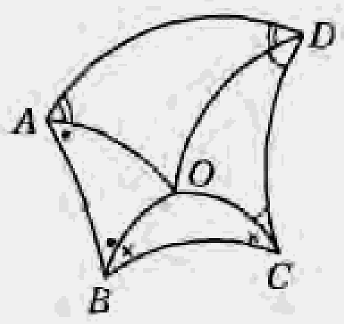


图 4-298

$$\angle OAB=\angle OBA,\angle OBC=\angle OCB,$$
$$\angle OCD=\angle ODC,\angle ODA=\angle OAD.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\angle A+\angle C\\ &=\angle OAB+\angle OAD+\angle OCB+\angle OCD\\ &=\angle OBA+\angle ODA+\angle OBC+\angle ODC\\ &=\angle B+\angle D.\end{aligned}$$

(2) 充分性：在球面四边形 $ABCD$ 中，设 $\overset{\frown}{AC}\geqslant\overset{\frown}{BD}$，$\triangle ABC$ 内接于小圆 O_1，$\triangle ACD$ 内接于小圆 O_2，下面来证明：若 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$，则点 O_1、O_2 必重合.

用反证法.

由 $\overset{\frown}{O_1A}=\overset{\frown}{O_1B}=\overset{\frown}{O_1C}$ 可推得 $\angle O_1AB=\angle O_1BA=\alpha_1$，$\angle O_1BC=\angle O_1CB=\beta_1$，$\angle O_1CA=\angle O_1AC=\gamma_1$.

由 $\overset{\frown}{O_2A}=\overset{\frown}{O_2C}=\overset{\frown}{O_2D}$ 可推得 $\angle O_2AD=\angle O_2DA=\alpha_2$，$\angle O_2DC=\angle O_2CD=\beta_2$，$\angle O_2AC=\angle O_2CA=\gamma_2$.

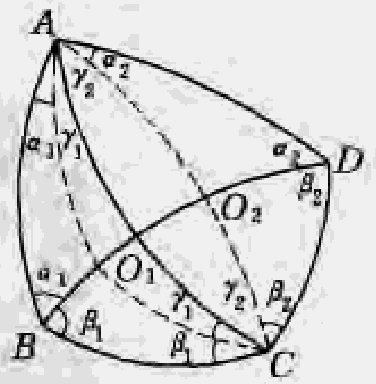


图 4-299

O_1、O_2 都在 $\overset{\frown}{AC}$ 的垂直平分线上. 如果 O_1、O_2 不重合：

1° 当 O_1、O_2 在 AC 的异侧时，$\angle B+\angle D=\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2$，$\angle A+\angle C=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+2(\gamma_1+\gamma_2)$，$\angle B+\angle D=\angle A+\angle C-2(\gamma_1+\gamma_2)$；

2° 当 O_1、O_2 在 AC 的同侧时，$\angle A+\angle C=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+$

$\beta_2+2(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1\neq\gamma_2$,否则 O_1、O_2 重合).

不论何种情况,均有 $\angle A+\angle C\neq\angle B+\angle D$. 这与所给条件 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$ 相矛盾.

故 O_1、O_2 必重合.

参考文献 [25,p.296].

(张文华)

参考文献

1 钱宝琮校点.算经十书.北京:中华书局,1963

2 梅荣照主编.明清数学史论文集.南京:江苏教育出版社,1990

3 吴文俊主编.世界著名科学家传记·数学家(Ⅰ).北京:科学出版社,1992

4 吴文俊主编.世界著名科学家传记·数学家(Ⅲ).北京:科学出版社,1992

5 吴文俊主编.世界著名科学家传记·数学家(Ⅴ).北京:科学出版社,1994

6 梁宗巨.世界数学史简编.沈阳:辽宁人民出版社,1980

7 中外数学简史编写组.中国数学简史.济南:山东教育出版社,1986

8 谷超豪主编.数学词典.上海:上海辞书出版社,1992

9 朱德祥编.初等数学复习及研究(立体几何).北京:人民教育出版社,1960

10 叶玉驹等编著.高等画法几何.北京:国防工业出版社,1990

11 [美]M.克莱因著.古今数学思想(第一册).上海:上海科学技术出版社,1979

12 [美]M.克莱因著.古今数学思想(第四册).上海:上海科学技术出版社,1981

13 [美]H.伊夫斯著.数学史概论.太原:山西人民出版社,1986

14 欧几里得.几何原本.西安:陕西科学技术出版社,1990

15 [德]D.希尔伯特,S.康福森著.直观几何(上册).北京:高等教育出版

社,1959

16 [法]J. 阿达玛著. 初等数学教程·几何(立体部分). 上海：上海科学技术出版社,1980

17 [美]R. 柯朗,H. 罗宾著. 数学是什么. 北京：科学出版社,1985

18 [苏]Д. И. 别列标尔金著. 初等几何学教程(下卷). 北京：高等教育出版社,1955

19 [苏]С. И. 诺渥塞洛夫著. 三角学专门教程(下册). 北京：高等教育出版社,1956

20 M. A. Armstrong 著. 基础拓扑学. 北京：北京大学出版社,1983

21 [德]H. 德里著. 100 个著名初等数学问题——历史和解. 上海：上海科学技术出版社,1982

22 [苏]B. Д. 契斯佳可夫著. 初等数学古代名题集. 北京：科学普及出版社,1984

23 [英]伊姆雷·拉卡托斯著. 证明与反驳——数学发现的逻辑. 上海：上海译文出版社,1987

24 岩田至康編. 幾何学大辞典(第 1 卷). 槇書店,1979

25 岩田至康編. 幾何学大辞典(第 2 卷). 槇書店,1979

三　解析几何

平面部分

(一) 有向线段

Chasles 定理(Chasles' theorem)　设 A、B、C 是一直线上的三点，则 $AB+BC=AC$，其中 AB、BC、AC 分别表示有向线段的数量.

该定理是法国数学家 M. Chasles(1793～1880) 得到的，它反映了有向线段相加的性质，可把它推广到空间，是解析几何的一条基本定理.

按照 A、B、C 三点在轴上排列的不同次序，可分为下列六种情形：

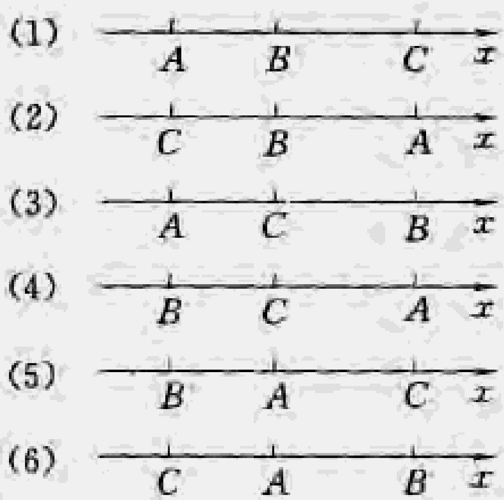


图 4-300

(1) $|AB|=AB$，$|BC|=BC$，$|AC|=AC$，$|AB|+|BC|=|AC|$，

$\therefore AB+BC=AC$.

(2) $|AB|=-AB$，$|BC|=-BC$，$|AC|=-AC$，而 $|AB|+|BC|=|AC|$，即 $-AB+(-BC)=-AC$，

$\therefore AB+BC=AC$.

(3) 由(1)得 $AC+CB=AB$，

$\therefore AC=AB-CB=AB+BC$，即 $AB+BC=AC$.

(4) 由(2)得 $AC+CB=AB$，

$\therefore AC=AB-CB=AB+BC$，

即 $AB+BC=AC$.

同样可证(5)和(6).

应用数学归纳法，由该定理可推得如下推论：

设 A_1、A_2、…、A_n 是一直线上的 n 个点，则

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n.$$

参考文献 [10,p.12],[11,pp.14～15],[4,p.566].

（郑君文）

欧拉定理（Euler's theorem） 设 A、B、C、D 是一直线上的四点，则 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

该定理于1747年为欧拉所发现，它可看成托勒密定理中圆变成直线时的特殊情况.

取 D 为原点，以 A、B、C、D 所在直线为轴，建立直线坐标系. 设点 A、B、C 的坐标各为 (a)、(b)、(c)，则

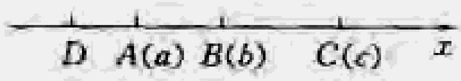


图 4-301(1)

$AB \cdot CD + AD \cdot BC$

$= (b-a)\cdot(-c) + (-a)\cdot(c-b)$

$= -bc + ab = b(a-c)$，

而 $AC \cdot BD = (c-a)(-b) = b(a-c)$，

$\therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

从这个定理可以看到，恒等式 $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$ 所表示的几何意义.

参考文献 [27,p.152],[20,p.435].

（郑君文）

帕波斯定理（Pappus' theorem） (1) 设 A、B、C、D 是一直线上的四点，则 $DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB = 0$. (2) 设 M 和 N 是分有向线段 AB 成定比 $m:n$ 和 $m:(-n)$ $(m > n > 0)$ 的内分点和外分点，O 为 MN 的中点，则 $OM^2 = ON^2 = OA \cdot OB$，其逆也真.

该定理载于帕波斯所著的《数学汇编》里，(1)可以看成为

Stewart 定理的特殊情形.

(1) 取 D 为原点,以 A、B、C、D 所在直线为轴,建立直线坐标系,设点 A、B、C 的坐标分别为 (a)、(b)、(c),则

$$DA^2\cdot BC+DB^2\cdot CA+DC^2\cdot AB+BC\cdot CA\cdot AB$$
$$=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$=(b-a)[-c(a+b)+ab+c^2]+(c-b)(a-c)(b-a)$$
$$=(b-a)(c-a)(c-b)+(c-b)(a-c)(b-a)=0.$$

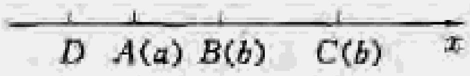


图 4-301(2)

由此可以看到,恒等式 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)=0$ 所表示的几何意义.

(2) 取 O 为原点,以 AB 所在直线为轴建立直线坐标系.设点 A、B、M、N 的坐标分别为 (a)、(b)、$(-p)$、(p),则由

$$\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n},\frac{AN}{NB}=-\frac{m}{n},$$

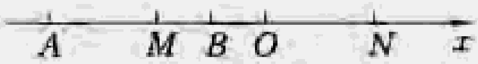


图 4-302

得 $\dfrac{-p-a}{b+p}=\dfrac{m}{n},\dfrac{p-a}{b-p}=-\dfrac{m}{n}$,

$\therefore \dfrac{-p-a}{b+p}=\dfrac{p-a}{p-b},(p-a)(p+b)+(p+a)(p-b)=0,$

$p^2=ab$,即 $OM^2=OA\cdot OB$.

这个定理的逆定理有两个:设 M 和 N 分别是有向线段 AB 及其延长线上的点,① 若点对 M、N 调和分割点对 A、B $\left(\text{即}\dfrac{AM}{MB}=-\dfrac{AN}{NB}\right)$,且 $OM^2=ON^2=OA\cdot OB$,则 O 是 MN 的中点;② 若 O 是 MN 的中点,且 $OM^2=ON^2=OA\cdot OB$,则点对 M、N 调和分割点对 A、B.

取 AB 的中点 Q 为原点,以 AB 所在直线为轴建立直线坐标系.

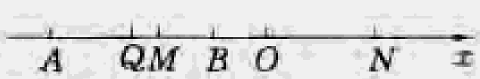


图 4-303

1° 设点 A、B、M 的坐标分别为 $(-x_1)$、(x_1)、(x_2)，N 点的坐标为(x)，则由 $\frac{AM}{BM}=-\frac{AN}{BN}$，得

$$\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}=\frac{x+x_1}{x_1-x},\quad \therefore x=\frac{x_1^2}{x_2},$$

即点 N 的坐标为$\left(\frac{x_1^2}{x_2}\right)$，由此得 MN 中点的坐标为 $\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_2}$.

设点 O 的坐标为(y)，则由 $OM^2=OA\cdot OB$，得

$$(y-x_2)^2=(-x_1-y)(x_1-y),$$

$\therefore y=\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_2}$.

由于 O 点的坐标与 MN 中点的坐标相同，故点 O 就是 MN 的中点.

2° 设点 A、B、M 的坐标分别为$(-x_1)$、(x_1)、(x_2)，点 O 的坐标为(x)，则由 $OM^2=OA\cdot OB$，得

$$(x_2-x)^2=(-x_1-x)(x_1-x),$$

$\therefore x=\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_2}$，即点 O 的坐标是$\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_2}\right)$.

设点 N 的坐标为(y)，则由点 O 是 MN 的中点，得

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_2}=\frac{1}{2}(x_2+y),$$

$\therefore y=\frac{x_1^2}{x_2}$，即点 N 的坐标是$\left(\frac{x_1^2}{x_2}\right)$.

$\because \frac{AM}{MB}=\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}$,

$-\frac{AN}{BN}=\left(\frac{x_1^2}{x_2}+x_1\right)\Big/\left(x_1-\frac{x_1^2}{x_2}\right)=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$.

$\therefore \frac{AM}{BM}=-\frac{AN}{BN}$，即点对 M、N 调和分割点对 A、B.

参考文献 [22,pp.152～153],[20,pp.179～180].

（郑君文）

（二）椭圆和双曲线

椭圆的 Chasles 定理(Chasles' theorem of the ellipse) 设 OP 和 OP' 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的共轭半径，在过点 P 的法线上，各在点 P 的两旁取点 C 和 C'，使 $|PC|=|PC'|=|OP'|$，则 $|OC|=a+b$，$|OC'|=a-b$.

该定理是 M. Chasles 于 1865 年得到的.

设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，则 OP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，它的共轭直径(也即共轭半径 OP')的方程是

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x.$$

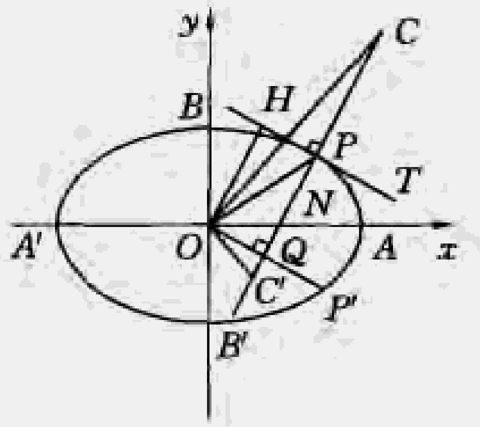


图 4-304

过点 P 的切线 PT 的方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$，即 $y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1}$，所以 $PT /\!/ OP'$，又过 P 点的法线垂直于切线 PT，所以 $OP'\perp PC$，设其交点为 Q，则 $\angle OQC=90^\circ$.

$$\begin{aligned}\therefore |OC|^2&=|OP|^2+|PC|^2+2|PC|\cdot|PQ|\\&=|OP|^2+|OP'|^2+2|PC|\cdot|PQ|.\end{aligned}$$

设点 P' 的坐标为 (x_2,y_2)，则由解方程组

$$\begin{cases}y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$$

得 $x_2^2=\frac{a^2y_1^2}{b^2}, y_2^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2}$,

$$\therefore |OP|^2+|OP'|^2=x_1^2+y_1^2+\frac{a^2y_1^2}{b^2}+\frac{b^2x_1^2}{a^2}=a^2+b^2.$$

由于$|PQ|$等于原点 O 到切线 PT 的距离$|OH|$,

$$\therefore |PQ|=|OH|=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}}=\frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2y_1^2}{b^2}+\frac{b^2x_1^2}{a^2}}}$$

$$=\frac{ab}{|OP'|}=\frac{ab}{|PC|}.$$

$$\therefore |OC|^2=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2,$$

即 $$|OC|=a+b.$$

$$\because |OC'|^2=|OP|^2+|PC'|^2-2|PC'|\cdot|PQ|$$

$$=|OP|^2+|OP'|^2-2|PC'|\cdot|PQ|$$

$$=a^2+b^2-2|PC|\cdot\frac{ab}{|PC|}=(a-b)^2,$$

$$\therefore |OC'|=a-b.$$

过 P 点的法线方程为 $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$,它与 x 轴的交点 N 的坐标为$\left(\frac{x_1}{a^2}(a^2-b^2),0\right)$,所以

$$|PN|=\sqrt{\left[x_1-\frac{x_1}{a^2}(a^2-b^2)\right]^2+y_1^2}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2x_1^2}{a^2}+\frac{a^2y_1^2}{b^2}}=\frac{b}{a}|OP'|,$$

$$|CN|=\frac{|OP'|}{a}(a+b), |NC'|=\frac{|OP'|}{a}(a-b),$$

故 $$\frac{|CN|}{|NC'|}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{|OC|}{|OC'|}.$$

由此得到推论:两坐标轴 Ox 与 Oy 平分直线 OC 与 OC' 的交角.

参考文献 [24,p.19].

（郑君文）

Mac Cullagh 定理(Mac Cullagh's theorem) 设△ABC 内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$r_1$、$r_2$、$r_3$ 分别为平行于 AB、BC、CA 的椭圆半径(椭圆半径指连结椭圆上一点与其中心的线段长)，R 为△ABC 的外接圆半径，则 $R=\frac{r_1r_2r_3}{ab}$.

该定理是 Mac Cullagh 得到的，见 *Dublin Exam. Papers*(1836)，22.

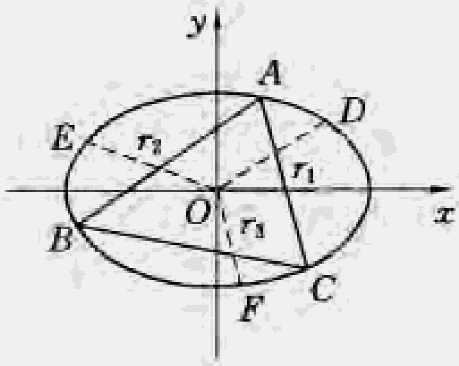


图 4-305

设△ABC 的三顶点为 $A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$、$B(a\cos\beta, b\sin\beta)$，$C(a\cos\gamma, b\sin\gamma)$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为离心角，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{ab}{2}\begin{vmatrix} \cos\beta-\cos\alpha & \sin\beta-\sin\alpha \\ \cos\gamma-\cos\alpha & \sin\gamma-\sin\alpha \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=2ab\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right|$$

$$=2ab\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right|,$$

$$AB^2=a^2(\cos\alpha-\cos\beta)^2+b^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+b^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

又直线 AB 的方程为

$$\frac{y-b\sin\alpha}{b\sin\beta-b\sin\alpha}=\frac{x-a\cos\alpha}{a\cos\beta-a\cos\alpha},$$

即 $\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
于是平行于 AB 的椭圆半径 OD 的方程是

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0,$$

它与椭圆交点的坐标,由通过解方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ \frac{x}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=0\end{cases}$$

得出,故有 $x^2=a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2},y^2=b^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$,

$\therefore r_1^2=OD^2=a^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+b^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$,

$\therefore AB^2=r_1^2\cdot 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$,即 $|AB|=2r_1\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$.

同样可得

$$|BC|=2r_2\left|\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right|,$$
$$|CA|=2r_3\left|\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right|.$$

由于 $S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|CA|}{4R}$,

$\therefore R=\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|CA|}{4S_{\triangle ABC}}=\frac{r_1r_2r_3}{ab}$.

参考文献 [24,p.25].

(郑君文)

Joachmsthal 定理(Joachmsthal's theorem) P、Q、R、S 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的四点,若分别过这四点的法线交于一点,则 S 关于椭圆中心 O 的对称点 S' 必在$\triangle PQR$ 的外接圆上.

该定理是 Joachmsthal 于 1843 年得到的，下面的证明由 Burnside 给出。

设 α、β、γ 各是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 P、Q、R 的离心角，则其法线交于一点的充要条件是

$$\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0. \quad ①$$

事实上，过点 P、Q、R 的法线方程各是

$$\frac{ax}{\cos\alpha}-\frac{by}{\sin\alpha}=c^2,$$

$$\frac{ax}{\cos\beta}-\frac{by}{\sin\beta}=c^2,$$

$$\frac{ax}{\cos\gamma}-\frac{by}{\sin\gamma}=c^2,(c^2=a^2-b^2)$$

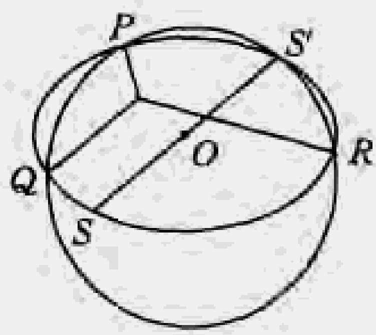


图 4-306

则该三条法线交于一点的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\sec\alpha & \csc\alpha & 1\\ \sec\beta & \csc\beta & 1\\ \sec\gamma & \csc\gamma & 1\end{vmatrix}=0,$$

或

$$\begin{vmatrix}-\cos\beta\sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \sin\beta\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\\ \cos\alpha\sin\frac{\gamma+\beta}{2} & -\sin\alpha\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\end{vmatrix}=0,$$

（这里 $\alpha\neq\beta\neq\gamma$）

即

$$[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}$$

$$=[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\beta}{2},$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha-\beta)\sin\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}=0,$$

两边除以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，再应用三角函数的积化和差公式即可得。

同样,设 δ 是 S 点的离心角,则分别过 P、Q、S 三点的法线交于一点的充要条件是

$$\sin(\beta+\delta)+\sin(\delta+\alpha)+\sin(\alpha+\beta)=0. \qquad ②$$

由 ① − ②,得

$$\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta+\delta)+\sin(\gamma+\alpha)-\sin(\delta+\alpha)=0,$$

$$\cos\frac{2\beta+\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}+\cos\frac{2\alpha+\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}=0,$$

但 $\gamma\neq\delta$,故得

$$\cos\frac{2\beta+\gamma+\delta}{2}+\cos\frac{2\alpha+\gamma+\delta}{2}=0,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=0,$$

又 $\alpha\neq\beta$, $\therefore\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=0.$

这就是说,过椭圆上四点的法线交于一点,则

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(2m+1)\pi, m\in\mathbf{Z},$$

即 $$\alpha+\beta+\gamma+(\pi+\delta)=2(m+1)\pi. \qquad ③$$

但是点 S 关于椭圆中心 O 的对称点 S' 的离心角 θ 为 $\pi+\delta$,所以本定理变更为在条件③下证明 P、Q、R、S' 四点共圆.

由③得 $\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\theta}{2}=0$,于是

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\theta}{2}+\sin\frac{\beta+\theta-\alpha-\gamma}{2}+$$
$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\theta}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\theta}{2}=0,$$

$$\frac{\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}+\frac{\cos\dfrac{\beta+\theta}{2}}{\sin\dfrac{\beta+\theta}{2}}=0,$$

即 $$\frac{b(\sin\alpha-\sin\gamma)}{a(\cos\alpha-\cos\gamma)}+\frac{b(\sin\beta-\sin\theta)}{a(\cos\beta-\cos\theta)}=0.$$

而 $\frac{b(\sin\alpha-\sin\gamma)}{a(\cos\alpha-\cos\gamma)}$ 为连结 P 与 R 两点直线的斜率 k_1，$\frac{b(\sin\beta-\sin\theta)}{a(\cos\beta-\cos\theta)}$ 是连结 Q 与 S' 两点直线的斜率 k_2，于是有 $k_1+k_2=0$.

设椭圆 $c_1=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ 与 $\triangle PQR$ 的外接圆 $c_2=x^2+y^2+2gx+2fy+h=0$ 除交点 P、Q、R 外还交于点 S''，即点 P、Q、R、S'' 的坐标必满足 $c_1+tc_2=0$. 设直线 PR 为 $y-k_1x+n_1=0$，直线 QS'' 为 $y-k'x+n_2=0$，则

$$c_1+tc_2=t'(y-k_1x+n_1)(y-k'x+n_2),$$

比较 xy 项的系数得 $k_1+k'=0$，所以 $k'=k_2$. 因此，直线 QS'' 与 QS' 重合，点 S'' 与 S' 重合，从而点 S' 在 $\triangle PQR$ 的外接圆上.

参考文献 [24，p.22，p.34].

（郑君文）

椭圆的阿基米德定理（Archimedes' theorem of the ellipse） 设椭圆的长轴和短轴的长各为 $2a$ 和 $2b$，则它的面积为 πab.

该定理为阿基米德所发现，载于他所著的《论劈锥曲面体与球体》一书.

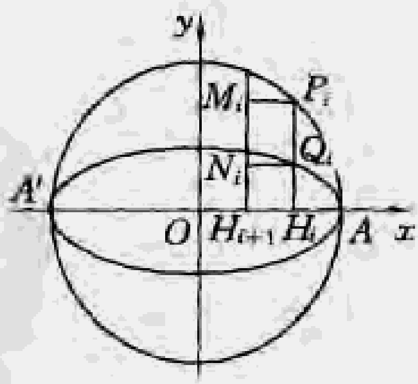


图 4-307

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的辅助圆为 $x^2+y^2=a^2$，则该椭圆可由圆 $x^2+y^2=a^2$ 施行平行于 y 轴的平行投影 $x=x'$，$y=\frac{a}{b}y'$ 而得，即 $x'^2+\left(\frac{a}{b}y'\right)^2=a^2$，也即 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$.

把长轴 AA' 分成 $2n$ 等份，设分点为 H_i（$i=1,2,\cdots,2n$），这

里 H_1 与 A 重合，H_{2n+1} 与 A' 重合. 过点 H_i 作 x 轴的垂线各交圆与椭圆于 P_i 与 Q_i，过点 P_i、Q_i 各作平行于 x 轴的直线与过点 H_{i+1} 且垂直于 x 轴的直线交于 M_i、N_i，设矩形 $H_iP_iM_iH_{i+1}$ 的面积为 S_i，$H_iQ_iN_iH_{i+1}$ 的面积为 S_i'，则 $S_i=\frac{a}{b}S_i'$，所以

$$\sum_{i=1}^{2n}S_i=\frac{a}{b}\sum_{i=1}^{2n}S_i'.$$

当 n 趋向无穷大时，$\sum_{i=1}^{2n}S_i$ 的极限为圆的面积 S，$\sum_{i=1}^{2n}S_i'$ 的极限为椭圆的面积 S'，因此

$$S=\frac{a}{b}S',\pi a^2=\frac{a}{b}S',$$

即 $S'=\pi ab$.

参考文献 [22,pp.396～397],[1,p.144],[17,p.123].

(郑君文)

Schmall 定理(Schmall's theorem) 作以△ABC 的两边所在直线为渐近线且切于第三边的三条双曲线，则它们的通径的乘积等于 $8r^3$，这里 r 表示△ABC 内切圆的半径，通径指过双曲线的焦点且垂直于它的对称轴的弦长.

该定理是 C. N. Schmall 获得的，它是 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 33 (1926)的问题 3 129.

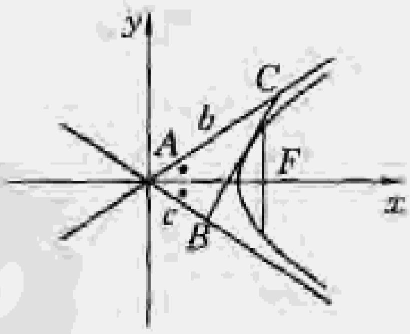


图 4-308

现作以 AB、AC 为渐近线且切于 BC 的双曲线，再取以 A 为原点，$\angle BAC$ 及其邻补角的平分线为 x 轴和 y 轴，建立直角坐标系. 设 $\angle BAC=\alpha$, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$，则 $B\left(c\cos\frac{\alpha}{2},-c\sin\frac{\alpha}{2}\right)$、$C\left(b\cos\frac{\alpha}{2},b\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

设以直线 AB：$y=-x\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 和 AC：$y=x\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ 为渐近线的双曲线的方程为

$\dfrac{x^2}{k^2\cot^2\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{y^2}{k^2}=1$，其中 k 为参数.

直线 BC 的方程为

$$\frac{x-c\cos\dfrac{\alpha}{2}}{(b-c)\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{y+c\sin\dfrac{\alpha}{2}}{(b+c)\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

即 $y=\left(\dfrac{b+c}{b-c}\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)x-\dfrac{2bc}{b-c}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

因为直线 BC 为该双曲线的切线的条件是

$$\frac{4b^2c^2}{(b-c)^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}=\left(k^2\cot^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{b+c}{b-c}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2-k^2,$$

$\therefore k^2=bc\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

因此，该双曲线方程为

$$\frac{x^2}{bc\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}-\frac{y^2}{bc\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=1,$$

它的通径

$$l_1=\frac{2bc\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{bc}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=2\sqrt{bc}\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$=2\sqrt{bc}\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\frac{r}{s-a}$$

$$=\frac{2\sqrt{(s-b)(s-c)}}{s-a}\cdot r.$$

同理可得

$$l_2=\frac{2\sqrt{(s-c)(s-a)}}{s-b}\cdot r,$$

$$l_3=\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)}}{s-c}\cdot r.$$

$\therefore l_1l_2l_3=8r^3.$

参考文献 [24,p.151].

（郑君文）

布利安香-庞斯莱定理（Brianchon-Poncelet theorem） 若三角形的三个顶点在等轴双曲线上，则该三角形的垂心也在这等轴双曲线上.

该定理是布利安香和庞斯莱得到的，见 *Gergonne's Annales* 11(1821), p. 205.

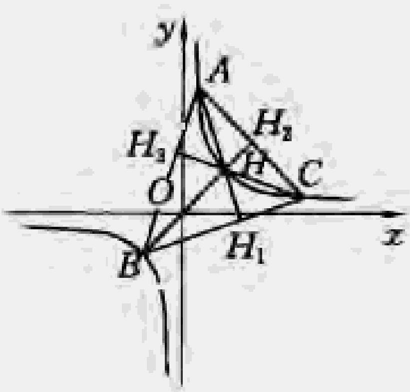


图 4-309

不妨设等轴双曲线的方程为 $xy=1$，$\triangle ABC$ 的三顶点在该等轴双曲线上的横坐标分别为 t_1、t_2、t_3，则其纵坐标各为 $\frac{1}{t_1}$、$\frac{1}{t_2}$、$\frac{1}{t_3}$，于是直线 AB 的方程为

$$\frac{x-t_1}{t_2-t_1}=\frac{y-\frac{1}{t_1}}{\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}},\text{即 } x+t_1t_2y=t_1+t_2,$$

所以高线 CH_3 的方程为

$$y-\frac{1}{t_3}=t_1t_2(x-t_3),\text{即 } t_3y-px=1-pt_3. \qquad ①$$

这里 $p=t_1t_2t_3$.

同样可求得高线 AH_1 的方程为

$$t_1 y - px = 1 - pt_1, \quad ②$$

高线 BH_2 的方程为

$$t_2 y - px = 1 - pt_2. \quad ③$$

由于这三条高线都通过垂心 H，所以垂心的坐标(x,y)满足①、②、③三个方程，可见 t_1、t_2、t_3 是关于 t 的方程 $ty - px = 1 - pt$ 的三个根，从而它是个恒等式.

$\therefore x = -\dfrac{1}{p}, y = -p.$

因为 $xy = -\dfrac{1}{p}\cdot(-p) = 1$，所以垂心 $H(x,y)$在双曲线 $xy = 1$ 上.

我们也可通过解方程组来证. 设由①、②组成方程组，求出解 $x = -\dfrac{1}{p}, y = -p$，则它就是$\triangle ABC$ 垂心的坐标，由于它满足双曲线方程，所以垂心 H 在这双曲线上.

当然我们也可以设 A、B、C 三点的坐标各为 $A(0,\lambda)$、$B(\mu,0)$和 $C(\mu',0)$，$H(0,\lambda')$为 AO 上一点，则通过 A、B、C、H 四点的二次曲线的方程为 $(\lambda x + \mu y - \lambda\mu)(\lambda' x + \mu' y - \lambda'\mu') + hxy = 0$，这里 h 是参数. 因为该二次曲线为等轴双曲线的充要条件是 $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$，所以 $\lambda' = -\dfrac{\mu\mu'}{\lambda}$.

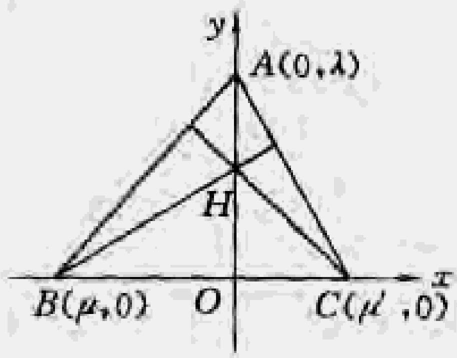


图 4－310

又$\triangle ABC$ 的垂心的坐标为$\left(0,-\dfrac{\mu\mu'}{\lambda}\right)$，所以 $H(0,\lambda')$即为$\triangle ABC$ 的垂心，它在过 A、B、C 三点的等轴双曲线上.

由这个定理可导出如下轨迹定理：内接于等轴双曲线的三角形垂心的轨迹，是该等轴双曲线本身.

参考文献　[22,pp. 394～395],[13,pp. 243～244].

（郑君文）

Greenstreet 定理(Greenstreet's theorem)　一圆与一等轴双曲线交于 A、B、C、D 四点,如果 AB 是这圆的直径,那么 CD 通过该双曲线的中心.

该定理是由 Greenstreet 获得的,它是 *Mathesis*, Vol. 42 (1928)的问题 2423.

设等轴双曲线的方程为 $xy=1$,四点坐标为 $A\left(t_1,\frac{1}{t_1}\right)$,$B\left(t_2,\frac{1}{t_2}\right)$,$C\left(t_3,\frac{1}{t_3}\right)$,$D\left(t_4,\frac{1}{t_4}\right)$,则以 AB 为直径的圆的方程为

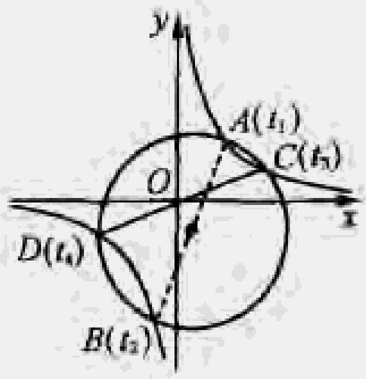


图 4－311

$$\left[x-\frac{1}{2}(t_1+t_2)\right]^2+\left[y-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left[(t_1-t_2)^2+\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)^2\right],$$

即 $x^2+y^2-(t_1+t_2)x-\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)y+t_1t_2+\frac{1}{t_1t_2}=0.$

由这圆的方程与双曲线 $xy=1$ 联立,可求出它们交点的坐标,就是可由解方程

$$x^2+\frac{1}{x^2}-(t_1+t_2)x-\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\frac{1}{x}+t_1t_2+\frac{1}{t_1t_2}=0$$

得出,也就是 t_1、t_2、t_3、t_4 是方程

$$x^4-(t_1+t_2)x^3+\left(t_1t_2+\frac{1}{t_1t_2}\right)x^2-\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)x+1=0$$

的四个根,依据根与系数的关系,有

$$t_1+t_2+t_3+t_4=t_1+t_2,\ \therefore t_3+t_4=0.$$

由此可知,C 与 D 关于原点 O 对称,即 CD 通过双曲线中心 O.

参考文献 [24,p.119].

(郑君文)

Ivory 定理(Ivory's theorem) 设有共焦点的两个椭圆和两条双曲线,它们的交点所组成的四边形的对角线长相等.

该定理是苏格兰数学家 Ivory 于 1809 年发现的,并可推广到空间.

设共焦点于 F'、F 的两个椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2+k_i}+\frac{y^2}{b^2+k_i}=1\ (i=1,2),$$

两条双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2+k_j}+\frac{y^2}{b^2+k_j}=1\ (j=3,4),$$

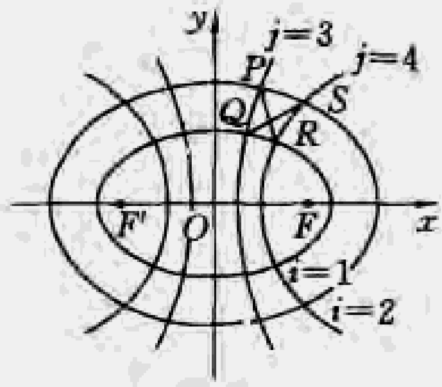


图 4-312

它们的四个交点不妨设为 P、Q、R、S(如图 4-312),则 P 点的坐标(x_P,y_P)为方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2+k_2}+\dfrac{y^2}{b^2+k_2}=1\\ \dfrac{x^2}{a^2+k_3}+\dfrac{y^2}{b^2+k_3}=1\end{cases}$的一个解,解之得

$$\begin{cases}x_P=\sqrt{\dfrac{(a^2+k_2)(a^2+k_3)}{a^2-b^2}},\\ y_P=\sqrt{\dfrac{(b^2+k_2)(b^2+k_3)}{b^2-a^2}}.\end{cases}$$

同样可得

$$\begin{cases}x_Q=\sqrt{\dfrac{(a^2+k_1)(a^2+k_3)}{a^2-b^2}},\\ y_Q=\sqrt{\dfrac{(b^2+k_1)(b^2+k_3)}{b^2-a^2}};\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_R = \sqrt{\dfrac{(a^2+k_1)(a^2+k_4)}{a^2-b^2}}, \\ y_R = \sqrt{\dfrac{(b^2+k_1)(b^2+k_4)}{b^2-a^2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_S = \sqrt{\dfrac{(a^2+k_2)(a^2+k_4)}{a^2-b^2}}, \\ y_S = \sqrt{\dfrac{(b^2+k_2)(b^2+k_4)}{b^2-a^2}}. \end{cases}$$

通过计算即知下式成立：

$$(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 = (x_Q - x_S)^2 + (y_Q - y_S)^2,$$

所以 $|PR| = |QS|$.

参考文献 [24,pp.180~181].

（郑君文）

共轭直径的阿波罗尼奥斯定理（Apollonius' theorem for conjugate diameters） 设 P 和 P' 各是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与其两共轭直径的一个交点，则

(1) $OP^2 + OP'^2 = a^2 + b^2$ 或 $OP^2 - OP'^2 = a^2 - b^2$；

(2) 以 OP 与 OP' 为邻边组成的平行四边形的面积等于 ab.

该定理相当于阿波罗尼奥斯所著《圆锥曲线论》第 7 卷中的命题 12、13 和 31，La Hire 著的《圆锥曲线》(1685)中也对这些定理作了研究.

(1) OP 与 OP' 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的共轭半径，设其方程为 $y=mx$ 与 $y=m'x$，则 $mm' = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

设 P 点的坐标为(x,y)，则 $OP^2 = x^2 + y^2$. 解方程组

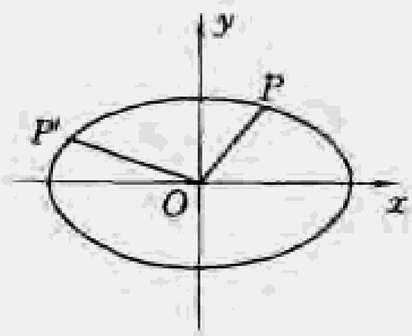


图 4-313

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=mx\end{cases}$$

得 $x^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2+a^2m^2}, y^2=\dfrac{a^2b^2m^2}{b^2+a^2m^2}$.

同样可求 P' 点的坐标 (x',y')，且

$$x'^2=\frac{a^2b^2}{b^2+a^2m'^2}, y'^2=\frac{a^2b^2m'^2}{b^2+a^2m'^2}.$$

由于 $m'=-\dfrac{b^2}{a^2m}$,

$$\begin{aligned}\therefore OP^2+OP'^2&=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2}+\frac{a^2b^2(1+m'^2)}{b^2+a^2m'^2}\\&=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2+a^2m^2}+\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2}\\&=\frac{b^2(a^2+b^2)+a^2m^2(a^2+b^2)}{b^2+a^2m^2}=a^2+b^2.\end{aligned}$$

P 和 P' 各是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与其两共轭直径的一个交点，设 OP 与 OP' 的方程各为 $y=mx$ 和 $y=m'x$，则 $mm'=\dfrac{b^2}{a^2}$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ y=mx\end{cases}$$

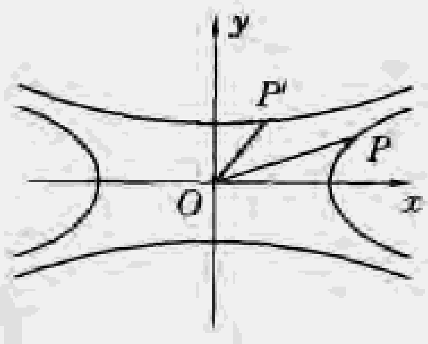


图 4-314

得 $x^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}, y^2=\dfrac{a^2b^2m^2}{b^2-a^2m^2}$.

这里不妨设 $b^2-a^2m^2>0$，于是点 P' 的坐标为虚数，这是由于 $b^2-a^2m'^2=b^2-a^2\dfrac{b^4}{a^4m^2}=\dfrac{b^2}{a^2m^2}(a^2m^2-b^2)<0$. 这样解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1,\\ y=m'x\end{cases}$$ 得 $x'^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2m'^2-b^2}, y'^2=\dfrac{a^2b^2m'^2}{a^2m'^2-b^2}$,

$$\therefore OP^2-OP'^2=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2-a^2m^2}+\frac{a^2b^2(1+m'^2)}{b^2-a^2m'^2}$$

$$=\frac{a^2b^2+a^2b^2m^2-a^4m^2-b^4}{b^2-a^2m^2}=a^2-b^2.$$

这里 P' 可看成为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的共轭双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 与 $y=m'x$ 相交的点，所以 $P'\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2m'^2-b^2}},\dfrac{abm'}{\sqrt{a^2m'^2-b^2}}\right)$，即 $P'\left(\dfrac{a^2m}{\sqrt{b^2-a^2m^2}},\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right)$.

(2) 以 OP、OP' 为邻边组成的平行四边形的面积记为 S，点 P' 到直线 OP 的距离记为 h，则在椭圆中，

$$x'=\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2m'^2}}=\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},$$

$$y'=\frac{abm'}{\sqrt{b^2+a^2m'^2}}=\frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}.$$

$$\therefore h=\frac{\left|\dfrac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$=\frac{a^2m^2+b^2}{\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a^2m^2+b^2}},$$

$$\therefore S=h\cdot|OP|=\frac{a^2m^2+b^2}{\sqrt{1+m^2}\ \sqrt{a^2m^2+b^2}}\cdot\frac{ab\cdot\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{b^2+a^2m^2}}$$

$$=ab.$$

在双曲线中，$x'=\dfrac{a^2m}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}, y'=\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}$,

$$\therefore h=\frac{\left|\dfrac{a^2m^2}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}-\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{|a^2m^2 - b^2|}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}\ \sqrt{1 + m^2}},$$

$$\therefore S = h \cdot |OP| = \frac{|a^2m^2 - b^2|}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}\ \sqrt{1 + m^2}} \cdot \frac{ab \cdot \sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} = ab.$$

参考文献　[22,pp. 392～393],[1,p. 184],[9,pp. 404～405].

(郑君文)

切线与辅助圆定理(theorem of tangent line and auxiliary circle) 分别过有心圆锥曲线的两个焦点,向它的任意一条切线作垂线,则其垂足在它的辅助圆上,且这两条垂线长的乘积为一定值.

该定理结论的开始部分载于阿波罗尼奥斯所著《圆锥曲线》的第3卷里,结论的后面部分是 Keill 于 1718 年得到的.

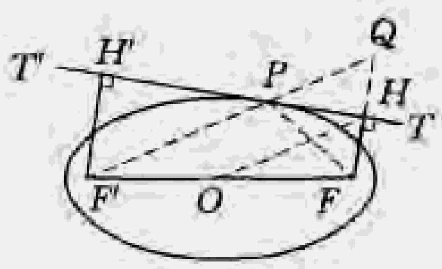


图 4-315

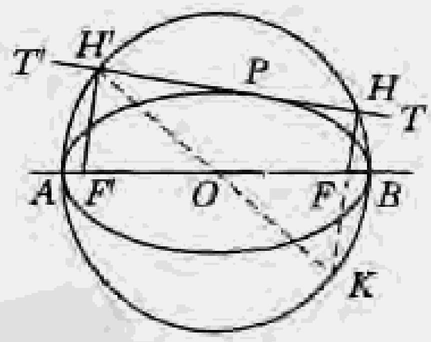


图 4-316

设 F' 与 F 是椭圆的焦点,$T'T$ 是过椭圆上 P 点的切线,$F'H' \perp T'T$,$FH \perp T'T$,又 Q 是 F 关于 $T'T$ 的对称点,则 $F'Q = PF' + PF = 2a$,这里 $2a$ 为椭圆的长轴长. 连结 H 与椭圆的中心 O,则 $OH = a$,所以垂足 H 在以 O 为圆心、a 为半径的圆上,即垂足 H 在该椭圆的辅助圆上.

连结 $H'O$ 并延长交辅助圆于 K,再连结 FK,则因 F、K 各是 F'、H' 关于 O 点的对称点,所以 $FK \underline{\mathbin{/\mkern-6mu/}} F'H'$. 又 $F'H' \mathbin{/\mkern-6mu/} FH$,所以

H、F、K 三点共线，于是得到

$$|FH|\cdot|F'H'|=|FH|\cdot|FK|=|AF|\cdot|FB|$$
$$=(a+c)(a-c)=a^2-c^2=b^2,$$

这里 b 是短半轴长，c 是半焦距.

对于双曲线的情形可同样证明.

当然也可用解析法来证. 设 $P(x_1,y_1)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一点，则过 P 点的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 且要满足 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，所以过 $F'(-c,0)$ 且垂直于这切线的直线方程为 $y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x+c)$，因此，从上述三个方程消去 x_1、y_1，就可求出垂足的轨迹方程.

现将最后一个方程变形为 $\frac{x_1}{a^2(x+c)}=\frac{y_1}{b^2y}=k$，

$$\therefore x_1=a^2(x+c)k,\ y_1=b^2ky. \tag{①}$$

把①代入 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 得

$$k(x^2+y^2+cx)=1,\ k=\frac{1}{x^2+y^2+cx}. \tag{②}$$

再把①代入 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ 得

$$a^2(x+c)^2+b^2y^2=\frac{1}{k^2}. \tag{③}$$

将②代入③式得

$$a^2(x+c)^2+b^2y^2=(x^2+cx+y^2)^2,$$

即
$$(x^2+y^2)^2+2cx(x^2+y^2)+c^2x^2-$$
$$a^2(x^2+2cx+c^2)-b^2y^2=0.$$

由于 $c^2=a^2-b^2$，故有

$(x^2+y^2)^2-a^4+2cx(x^2+y^2-a^2)-b^2(x^2+y^2-a^2)=0$,

$(x^2+y^2-a^2)[(x+c)^2+y^2]=0$,

$\therefore x^2+y^2=a^2$.

就是说垂足的轨迹是椭圆的辅助圆，由此可知，垂足在这辅助圆上.

下面求出 F' 与 F 到切线 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 的距离 $F'H'$ 和 FH.

$$|F'H'|=\frac{|b^2x_1(-c)-a^2b^2|}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}},\ |FH|=\frac{|b^2x_1c-a^2b^2|}{\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}},$$

$$\therefore |FH|\cdot|F'H'|=\frac{|b^4c^2x_1^2-a^4b^4|}{a^4y_1^2+b^4x_1^2}$$

$$=\frac{b^2|b^2(a^2-b^2)x_1^2-a^2(a^2y_1^2+b^2x_1^2)|}{a^4y_1^2+b^4x_1^2}=b^2.$$

对于双曲线的情形可同样证明.

参考文献 [22,pp.390～391].

（郑君文）

焦点切线的阿波罗尼奥斯定理（Apollonius' theorems for foci and tangents） F' 和 F 是椭圆或双曲线的焦点，(1) 设 $T'T$ 为过这曲线上一点 P 的切线，则切线 $T'T$ 平分 $\angle F'PF$ 或其邻补角；(2) 设 PT 和 PT' 为过这曲线外一点 P 的两条切线，则 PT 和 PF、PT' 和 PF' 所成的角相等，且 PF' 是 $\angle T'F'T$ 的平分线.

这两个定理载于阿波罗尼奥斯所著的《圆锥曲线》第3卷里，并都涉及有心圆锥曲线的切线与焦点. 但在《圆锥曲线》的全书中，却没有提到抛物线的焦点及其相关的性质，并且对有心圆锥曲线，阿波罗尼奥斯也没有给出焦点的专门名称，现在通用的“焦点”这一术语，最早是由开普勒于1604年开始使用的.

(1) 如图4－317，P 是切线 $T'T$ 上的点到焦点 F' 与 F 距离之

和为最小的点.事实上,在 $T'T$ 上任取异于 P 的一点 P',连结 $P'F'$,交椭圆于一点 Q,再连结 $P'F$ 和 QF,则

$$\begin{aligned}&P'F'+P'F\\=&P'Q+QF'+P'F\\>&QF'+QF=PF'+PF.\end{aligned}$$

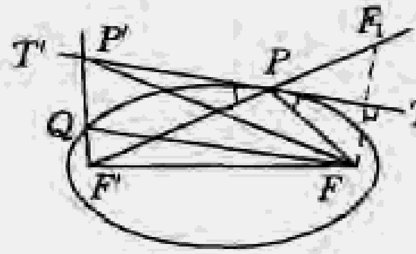


图 4-317

由于给定一直线 $T'T$ 及其同侧两点 F' 与 F,在求 $T'T$ 上一点 P 使到 F' 及 F 距离之和为最小中可知,这里 P 点是由作 F 关于 $T'T$ 的对称点 F_1,再连结 $F'F_1$ 而确定的,显然 $T'T$ 平分 $\angle F'PF$ 的外角,或 $\angle T'PF'=\angle TPF$.

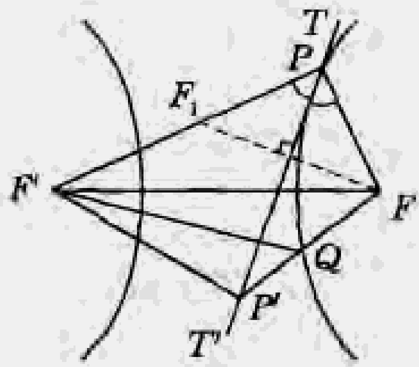


图 4-318

如图 4-318,对于双曲线,P 是切线 $T'T$ 上的点到 F' 与 F 距离之差 $PF'-PF$ 为最大的点.事实上,设 P' 是 $T'T$ 上的任意一点,连结 $P'F$ 交双曲线于点 Q,再连结 QF'、$P'F'$,则

$$\begin{aligned}P'F'-P'F&=P'F'-P'Q-QF\\&<QF'-QF=PF'-PF.\end{aligned}$$

因为 F' 与 F 是直线 $T'T$ 异侧的两点,所以在求 $T'T$ 上一点 P 使到 F' 及 F 距离之差为最大中可知,P 点是 F' 与 F 关于 $T'T$ 的对称点 F_1 的连线和 $T'T$ 的交点,显然 $T'T$ 平分 $\angle F'PF$.

当然也可用解析法来做.过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_1,y_1)$ 的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$,设它与 x 轴交于点 M,则点 M 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{x_1},0\right)$.

要证 PM 平分 $\angle F'PF$ 的外角,只要证点 M 到直线 PF 与到

直线 PF' 的距离相等就行了，而直线 PF 的方程为 $\dfrac{x-c}{x_1-c}=\dfrac{y}{y_1}$，直线 PF' 的方程为 $\dfrac{x+c}{x_1+c}=\dfrac{y}{y_1}$，现记点 M 到 PF 与 PF' 的距离分别为 h 与 h'，则

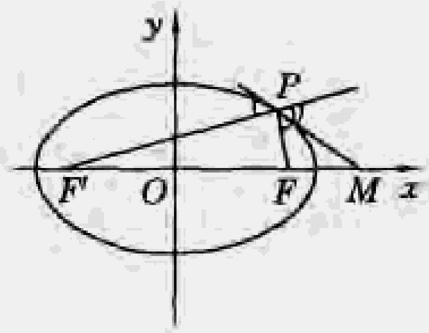


图 4－319

$$\frac{\left(\dfrac{a^2}{x_1}-c\right)^2 y_1^2}{(x_1-c)^2+y_1^2},\quad h'^2=\frac{\left(\dfrac{a^2}{x_1}+c\right)^2 y_1^2}{(x_1+c)^2+y_1^2},$$

$\therefore h^2-h'^2$

$$=\frac{a^2y_1^2}{x_1^2}\left(\frac{a^2+e^2x_1^2-2cx_1}{x_1^2+y_1^2+c^2-2cx_1}-\frac{a^2+e^2x_1^2+2cx_1}{x_1^2+y_1^2+c^2+2cx_1}\right).$$

这里 $e=\dfrac{c}{a}$. 设 $\alpha=x_1^2+y_1^2+c^2$，$\beta=a^2+e^2x_1^2$，则要证 $h=h'$，只要证

$$(\alpha+2cx_1)(\beta-2cx_1)-(\alpha-2cx_1)(\beta+2cx_1)$$
$$=2cx_1(\beta-\alpha)-2cx_1(\alpha-\beta)=4cx_1(\beta-\alpha)=0,$$

事实上，$\beta-\alpha=a^2+e^2x_1^2-x_1^2-y_1^2-c^2$

$$=\frac{1}{a^2}(-b^2x_1^2-a^2y_1^2+a^2b^2)=0,$$

所以切线 PM 平分 $\angle F'PF$ 的外角.

对于双曲线的情形，也同样可证.

(2) 在椭圆中，设点 A 是点 F' 关于切线 PT' 的对称点，点 B 是点 F 关于切线 PT 的对称点，则 $PA=PF'$，$T'A=T'F'$，$\angle APT'=\angle F'PT'$，$\angle PAT'=\angle PF'T'$，$PB=PF$，$TB=TF$，$\angle BPT=\angle FPT$.

$\therefore AF=AT'+T'F=T'F'+T'F$

$=2a$，

$BF'=BT+TF'=TF+TF'=2a$，

$\therefore AF = BF'$.

这里 $2a$ 是该椭圆长轴的长.

由上可得 $\triangle PAF \cong \triangle PF'B$，从而 $\angle APF = \angle F'PB, \angle PAF = \angle PF'B$.

$\therefore \angle T'PF' = \angle TPF, \angle T'F'P = \angle PF'T$.

对于双曲线的情形，也同样可证.

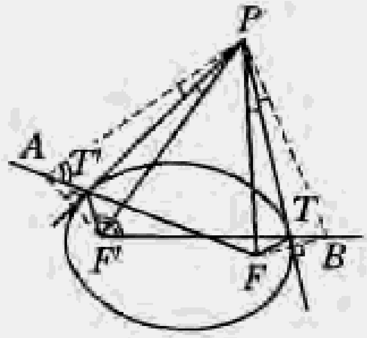


图 4-320

参考文献　[17, p. 109], [22, pp. 389～391], [1, pp. 180～182].

（郑君文）

Bobillier 定理(Bobillier's theorem)　设 P 是外接于 $\triangle ABC$ 的等轴双曲线上的一点，若自 P 点向 $\triangle ABC$ 三边引垂线，则其垂足圆通过该等轴双曲线的中心.

该定理是法国数学家 Bobillier (1798～1840) 于 1829 年得到的，见 *Journal de Gergonne* (1829). 下面的证明为 Casey 提出，见他所著的 *Analytic Geometry*.

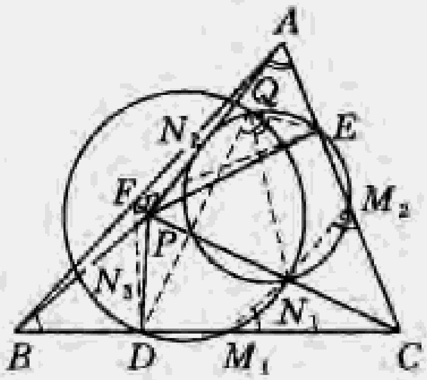


图 4-321

设 Q 是等轴双曲线的中心，又已知这等轴双曲线均为外接于 $\triangle ABC$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$ 的等轴双曲线，所以据布利安香—庞斯莱轨迹定理，这四个三角形的九点圆都通过 Q 点. 设 D、E、F 为过 P 点向 $\triangle ABC$ 三边所引垂线的垂足，则要证 $\triangle DEF$ 的外接圆（即垂足圆）通过中心 Q，只要证 D、E、F、Q 四点共圆就好了. 现不妨取 $\triangle PBC$ 与 $\triangle PCA$ 的九点圆来考察，它们除相交于 PC 的中点 N_1 外，还相交于 Q 点，且前者过垂足 D、BC 的中点 M_1 和 PB 的中点 N_3，后者过垂足 E、CA 的中点 M_2 和 PA 的中点 N_2. 因为 D、M_1、N_1、Q 四点共圆，所以 $\angle DQN_1 = \angle N_1M_1C$. 由于 $PB \mathbin{/\!/}$

N_1M_1，可知 $\angle N_1M_1C = \angle PBD$. 又 P、B、D、F 四点共圆，故 $\angle PBD = \angle DFP$，因而 $\angle DQN_1 = \angle DFP$. 同样可证 $\angle EQN_1 = \angle EFP$，所以 $\angle DFP + \angle EFP = \angle DQN_1 + \angle EQN_1$，即 $\angle DFE = \angle DQE$. 因此，D、E、F、Q 四点共圆.

参考文献 [22,pp.395～396].

（郑君文）

（三）抛物线

Anthemius 定理（Anthemius' theorem） 过抛物线上一点的切线，平分由这点与焦点的连线和过这点且平行于该抛物线对称轴的射线所组成的角.

该定理是 6 世纪的时候为 Anthemius 所发现.

设点 F 是抛物线的焦点，直线 d 是这抛物线的准线，P 是该抛物线上的一点，P' 是它的另一点，连结 PP' 交准线 d 于点 M，H、H' 各是 P、P' 在准线 d 上的射影，则 $PH = PF$，$P'H' = P'F$，$PH /\!/ P'H'$.

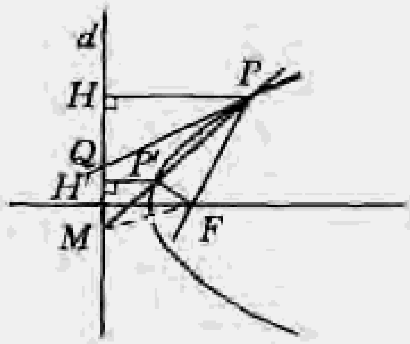


图 4－322

$$\therefore \frac{MP}{MP'} = \frac{PH}{P'H'} = \frac{PF}{P'F}.$$

因此，FM 是 $\triangle PFP'$ 的 $\angle PFP'$ 外角的平分线. 当点 P' 沿着抛物线趋向于点 P 时，PP' 即 PM 就趋向于过 P 点的抛物线的切线 PQ，也即 M 趋于 Q，于是有 $\angle QFP = 90°$，所以 $\triangle PHQ \cong \triangle PFQ$，因此，$\angle HPQ = \angle FPQ$.

也可用解析法证之. 建立直角坐标系，再设 $P(x_1, y_1)$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上的一点，则过其 P 点的切线方程为

$$y_1 y = p(x + x_1),$$

它和 x 轴交点 P' 的坐标为 $(-x_1,0)$，于是 $|FP'|=\frac{p}{2}+x_1$.

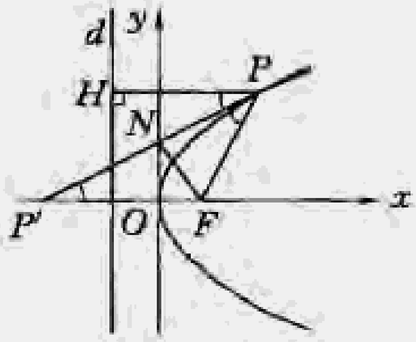


图 4-323

设 d 是这抛物线的准线，过点 P 作 PH 平行于 x 轴，交准线 d 于 H，则 $|PF|=|PH|=\frac{p}{2}+x_1$，所以 $|P'F|=|PF|$，故 $\angle FP'P=\angle FPP'$. 而 $\angle HPP'=\angle FP'P$，因此，$\angle HPP'=\angle FPP'$.

推论 过抛物线 $y^2=2px$ 上的一点 P，作其切线 PP'，交 y 轴于 N，则焦点 F 和 N 的连线垂直于切线 PP'.

由推论可得，过抛物线 $y^2=2px$ 上的一点 P 作它的切线的方法，即以 PF 为直径作圆，与 y 轴相切于 N 点，则 PN 就是所求作的切线.

参考文献 [22,p.397],[9,p.209].

（郑君文）

Anning 定理(Anning's theorem) 在直线上，依次取 $A_1A_2=1$，$A_2A_3=3$，$A_3A_4=5$，…，$A_nA_{n+1}=2n-1$，再分别以 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、…、A_nA_{n+1} 为一边在直线 l 上、下作正三角形 $A_1A_2P_1$、$A_2A_3P_2$、$A_3A_4P_3$、…、$A_nA_{n+1}P_n$（图中仅画出直线 l 的上半部分），则其第三个顶点 P_1、P_2、P_3、…、P_n 在同一条抛物线上，且它们到焦点的距离都为整数.

该定理是由 W. Anning 得到的，它是 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 29 (1922)上的问题 2 866.

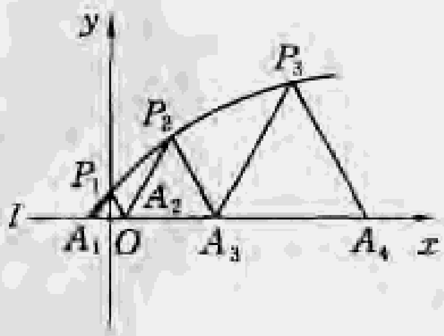


图 4-324

取直线 l 为 x 轴，线段 A_1A_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系，则 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$的

坐标分别为

$$x_1=\frac{-1+1}{2}=0,\ y_1=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_2=\frac{-1+1}{2}+\frac{1+3}{2}=2,\ y_2=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3=\frac{-1+1}{2}+\frac{1+3}{2}+\frac{3+5}{2}=6,\ y_3=5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

一般地，$P(x_n,\ y_n)$有

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{2}\{(-1+1)+(1+3)+(3+5)+\cdots+\\&\quad[(2n-3)+(2n-1)]\}\\&=0+2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1),\end{aligned}$$

$$y_n=(2n-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2n-1}{2}\sqrt{3}.$$

因为经过点 P_1、P_2 的抛物线关于 x 轴对称，所以可设抛物线方程为 $y^2=2p(x+a)$，由此求出 $p=\frac{3}{2}$，$a=\frac{1}{4}$，故抛物线方程是 $y^2=3\left(x+\frac{1}{4}\right)$. 由于 $x=n(n-1)$ 和 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(2n-1)$ 满足方程 $y^2=3\left(x+\frac{1}{4}\right)$，所以点 P_n 在该抛物线上.

抛物线 $y^2=3\left(x+\frac{1}{4}\right)$ 的焦点为 $F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，于是

$$\begin{aligned}|FP_n|&=\sqrt{\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2+y_n^2}=\sqrt{\left(x_n-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(x_n+\frac{1}{4}\right)}\\&=x_n+1=n(n-1)+1,\end{aligned}$$

由此可知 P_1、P_2、$\cdots$、P_n 到焦点 F 的距离都为整数.

参考文献 [24, p.210].

（郑君文）

Zerr 定理（Zerr's theorem） 设 $P'P$ 是过抛物线焦点的弦，PQ、$P'Q'$ 分别是过 P、P' 的法线弦，则 $QQ' \parallel P'P$，且 $|QQ'| = 3|PP'|$.

该定理是由 G. B. M. Zerr 得到的，它是 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 11 (1904) 的问题 222.

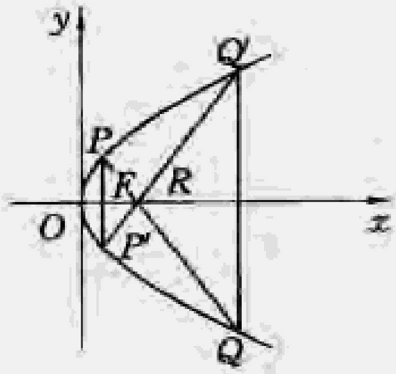


图 4-325

设抛物线方程为 $y^2 = 4px$，则焦点为 $F(p, 0)$. 再设 $P(pt^2, 2pt)$、$P'(pt'^2, 2pt')$，则由 P、P'、F 三点共线有

$$\begin{vmatrix} pt^2 & 2pt & 1 \\ pt'^2 & 2pt' & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

由此得 $tt' = -1$.

过 P 点的切线方程为 $2pty = 2p(x + pt^2)$，于是过 P 点的法线方程为 $y - 2pt = -t(x - pt^2)$，该法线与抛物线的另一个交点 Q 的坐标，可通过解方程组

$$\begin{cases} y - 2pt = -t(x - pt^2), \\ y^2 = 4px \end{cases}$$

得 $Q\left(p\left(t + \dfrac{2}{t}\right)^2, -2p\left(t + \dfrac{2}{t}\right)\right)$.

同样可求得过点 P' 的法线方程为 $y - 2pt' = -t'(x - pt'^2)$，该法线与抛物线另一个交点 Q' 的坐标为

$$\left(p\left(t' + \frac{2}{t'}\right)^2, -2p\left(t' + \frac{2}{t'}\right)\right).$$

现求直线 PQ 与 $P'Q'$ 的交点 R 的坐标，这可通过解方程组

$$\begin{cases}y-2pt=-t(x-pt^2),\\ y-2pt'=-t'(x-pt'^2)\end{cases}$$

得 $R(p(t^2+t'^2+1),\ p(t+t'))$.

再求分有向线段$\overline{PQ}$所成的比为$\frac{1}{3}$时,分点的坐标$(x,\ y)$:

$$x=\frac{pt^2+\frac{1}{3}p\left(t+\frac{2}{t}\right)^2}{1+\frac{1}{3}}=p(t^2+t'^2+1),$$

$$y=\frac{2pt+\frac{1}{3}\left[-2p\left(t+\frac{2}{t}\right)\right]}{1+\frac{1}{3}}=p(t+t'),$$

可见这分点与交点 R 重合,于是 $\frac{PR}{RQ}=\frac{1}{3}$. 同样$\frac{P'R}{RQ'}=\frac{1}{3}$,

$\therefore QQ' \parallel P'P,\ |QQ'|=3|PP'|$.

参考文献 [24, p.201].

(郑君文)

抛物线的麦比乌斯定理(Möbius' theorem of the parabola) 分别过抛物线内接三角形 ABC 的顶点作切线,设它们各交于 A'、B'、C',则

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

该定理是麦比乌斯于1827年得到的.

设抛物线的方程为

$$y^2=2px,$$

其内接三角形顶点 A、B、C 的坐标各是$(2pt_1^2,\ 2pt_1)$、$(2pt_2^2,\ 2pt_2)$、$(2pt_3^2,\ 2pt_3)$,则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2pt_1^2 & 2pt_1 & 1\\ 2pt_2^2 & 2pt_2 & 1\\ 2pt_3^2 & 2pt_3 & 1\end{vmatrix}$$ 的绝对值，

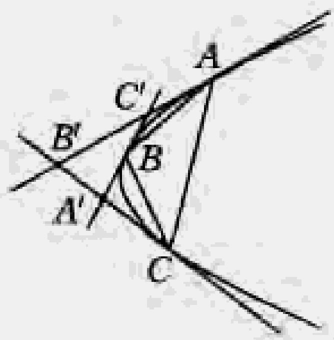


图 4-326

通过计算得

$$S_{\triangle ABC}=2p^2|(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)|.$$

分别过 A、B、C 的该抛物线的切线方程为

$$2pt_1y=p(x+2pt_1^2),\quad ①$$

$$2pt_2y=p(x+2pt_2^2),\quad ②$$

$$2pt_3y=p(x+2pt_3^2),\quad ③$$

由②与③联立，解得 $x=2pt_2t_3$，$y=p(t_2+t_3)$，所以点 A' 的坐标为 $(2pt_2t_3,\ p(t_2+t_3))$. 同样可得 B'、C' 的坐标各为

$$(2pt_1t_3,\ p(t_1+t_3))、(2pt_1t_2,\ p(t_1+t_2)).$$

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2pt_2t_3 & p(t_2+t_3) & 1\\ 2pt_3t_1 & p(t_3+t_1) & 1\\ 2pt_1t_2 & p(t_1+t_2) & 1\end{vmatrix}$$ 的绝对值，通过计算得

$$S_{\triangle A'B'C'}=p^2|(t_2-t_3)(t_3-t_1)(t_1-t_2)|,$$

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

参考文献 [24, p. 207].

（郑君文）

Gains 定理（Gains' theorem） 设$\triangle PQR$ 三边所在直线切于抛物线 $y^2=4ax$，α、β、γ 分别是这三边与该抛物线对称轴的交角，d 是$\triangle PQR$ 外接圆的直径，则

$$d=a\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma.$$

该定理是由 R. E. Gains 得到的，它是 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 48(1941)的问题 3923.

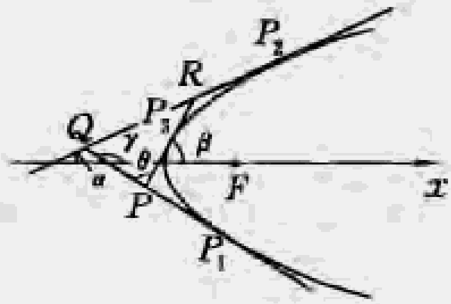


图 4－327

设△PQR 的三边所在直线分别切抛物线 $y^2=4ax$ 于点 $P_i(at_i^2, 2at_i)$ $(i=1, 2, 3)$，则三边所在的直线方程为

$$y=\frac{1}{t_i}(x+at_i^2),$$

所以直线 PQ、QR、RP 的斜率分别为 $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{t_1}$，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{t_2}$，$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{t_3}$，点 P、Q、R 的坐标各为 $(at_1t_3, a(t_1+t_3))$、$(at_1t_2, a(t_1+t_2))$、$(at_2t_3, a(t_2+t_3))$. 这里 γ、α、β 分别是 PQ、QR、RP 与抛物线对称轴(即 x 轴，图中 y 轴未画出)的交角. 设 $\angle QPR=\theta$，则$\frac{|QR|}{\sin\theta}=d$.

又 $|QR|=\sqrt{a^2t_2^2(t_1-t_3)^2+a^2(t_1-t_3)^2}=a|t_1-t_3|\sqrt{t_2^2+1}$，

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\gamma-\beta)=\frac{t_3-t_1}{1+t_1t_3},$$

从而由 $\operatorname{tg}\theta$ 求得

$$\sin\theta=\frac{|t_1-t_3|}{\sqrt{(t_1^2+1)(t_3^2+1)}},$$

因此，$d=a|t_1-t_3|\sqrt{t_2^2+1}\cdot\frac{\sqrt{(t_1^2+1)(t_3^2+1)}}{|t_1-t_3|}$

$$=a\sqrt{t_1^2+1}\cdot\sqrt{t_2^2+1}\cdot\sqrt{t_3^2+1},$$

而 $\sqrt{t_1^2+1}=\csc\gamma$，$\sqrt{t_2^2+1}=\csc\alpha$，$\sqrt{t_3^2+1}=\csc\beta$，

故有 $d=a\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma$.

参考文献 [24, pp. 219～220].

（郑君文）

兰伯特定理（Lambert's theorem） 由切于抛物线的三条直线构成的三角形，它的外接圆必通过该抛物线的焦点.

该定理是兰伯特于1761年发现的. 应用它可解决"已知抛物线的四条切线，求作这抛物线"的作图问题.

先介绍下面的引理："设点 F 与直线 d 是抛物线的焦点和准线，SA 和 SB 是它的两条切线，则 $\angle FAS = \angle FSB$，$\angle FBS = \angle FSA$."

作 $AA' \perp d$，$BB' \perp d$，A' 和 B' 是垂足，则点 A' 和 B' 各是 F 关于 SA 和 SB 的对称点，所以

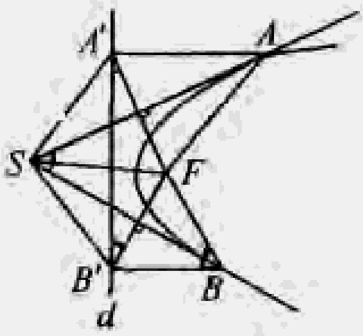


图 4－328

$$\angle FAS = \angle SAA' = \angle FA'B',$$
$$\angle FBS = \angle SBB' = \angle FB'A',$$
$$SA' = SF = SB',$$

于是点 A'、F、B' 在以 S 为圆心的圆上，因此

$$\angle FA'B' = \angle FSB, \angle FB'A' = \angle FSA,$$

故 $\angle FAS = \angle FSB$，$\angle FBS = \angle FSA$.

利用上述的引理，就可推导出兰伯特定理.

设直线 a、b、c 各切焦点为 F 的抛物线于点 A、B、C，它们两两相交于点 S、P、Q，于是得 $\triangle SPQ$. 连结 FA、FB、FC 和 FS、FP、FQ，则 $\angle FAP = \angle FPC$，$\angle FAS = \angle FSB$（或 $\angle FBQ = \angle FQC$，$\angle FBS = \angle FSA$）.

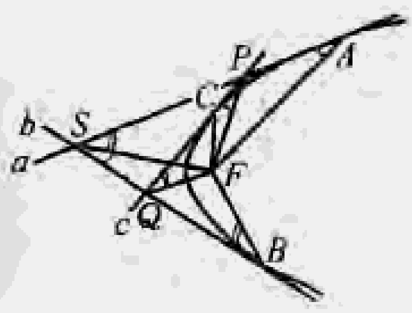


图 4－329

$\therefore \angle FPQ = \angle FSQ$（或 $\angle FQP =$

$\angle FSP$).

$\therefore$ S、P、F、Q 四点共圆，即$\triangle SPQ$ 的外接圆通过该抛物线的焦点 F.

兰伯特定理也可如下推出：过焦点 F 作$\triangle SPQ$ 三边的垂线，则其垂足在一条直线上(见 **Anthemius 定理**)，于是据 Simson 定理，$\triangle SPQ$ 的外接圆通过焦点 F.

应用兰伯特定理，可解决下面的作图题："已知抛物线的四条切线，求作该抛物线."这只要从这四条切线形成的四个三角形中选取两个，分别作它们的外接圆，则这两个外接圆的交点就是所求作抛物线的焦点. 再各作焦点关于已知两条切线的对称点，则作过这两个对称点的直线，就是所求作抛物线的准线，有了焦点和准线就可作出抛物线了.

据兰伯特定理还可得到下面的轨迹定理：

与已知三角形的三边所在直线相切的抛物线，它的焦点的轨迹是该三角形的外接圆.

参考文献 [22, p. 417],[13, pp. 230～231].

(郑君文)

阿波罗尼奥斯定理(Apollonius' theorem) (1) 设 PP' 是抛物线的直径，AB 是其相应的一条弦，它们相交于 M. 延长 MP 至 T，使 $PT=MP$，连结 TA、TB，且过 P 作 AB 的平行线 PQ，则 PQ、TA、TB 都是该抛物线的切线. (2) TA、TB 是抛物线的切线，A、B 各为切点，RS 是这抛物线的第三条切线，C 是切点，它各交 TA、TB 于 R、S，则

$$\frac{TR}{RA}=\frac{SC}{CR}=\frac{BS}{ST}.$$

上述定理(1)就是阿波罗尼奥斯所著《圆锥曲线》第 1 卷中的命题 33，它已为阿基米德(或更早的欧几里得)所知，曾在他所著的《方法论》中用到过. 应用定理(1)就可推出定理(2)，通常称它为

阿波罗尼奥斯定理,而有了定理(2)就可得知抛物线可作为一直线族的包络.

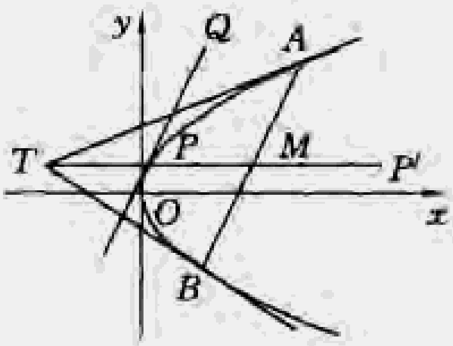


图 4-330

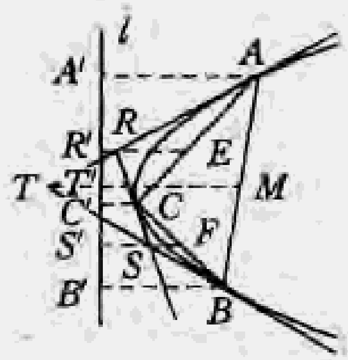


图 4-331

(1) 设抛物线的方程为 $y^2=2px$ 及 $A(2pt_1^2, 2pt_1)$、$B(2pt_2^2, 2pt_2)$,由于抛物线直径 PP' 与其相应弦 AB 的交点 M 是线段 AB 的中点,所以 M 点的坐标为 $(p(t_1^2+t_2^2), p(t_1+t_2))$,抛物线直径 PP' 的方程为

$$y=p(t_1+t_2).$$

从而可知 P 点的坐标为 $\left(\frac{p}{2}(t_1+t_2)^2, p(t_1+t_2)\right)$. 据中点公式可得 T 的坐标为 $(2pt_1t_2, p(t_1+t_2))$,故由直线方程的两点式,得直线 TA 和 BT 的方程各为

$$2t_1y-x-2pt_1^2=0,$$
$$2t_2y-x-2pt_2^2=0.$$

因过点 A 和点 B 的抛物线的切线分别与上述方程相同,故 AT、BT 各为这抛物线的切线.

据直线方程的点斜式,过点 P 且平行于 AB 的直线 PQ 的方程为

$$y-p(t_1+t_2)=\frac{t_1-t_2}{t_1^2-t_2^2}\left[x-\frac{p}{2}(t_1+t_2)^2\right],$$

即 $\quad 2(t_1+t_2)y-2x-p(t_1+t_2)^2=0.$

因过 P 点的抛物线的切线方程与上面这个方程相同，故直线 PQ 是这抛物线的切线.

推论 1 若 TA 和 TB 是抛物线的切线，A、B 是切点，则过 T 作平行于该抛物线对称轴的直线，必过弦 AB 的中点 M，且它与抛物线的交点 P 为线段 TM 的中点.

(2) 设 l 是抛物线的准线，则这抛物线的对称轴垂直于 l. 又设 A'、B'、C'、R'、S' 和 T' 分别是 A、B、C、R、S 和 T 在准线 l 上的射影，则直线 RR'、SS' 和 TT' 平行于这抛物线的对称轴，且分别通过弦 AC、CB 和 AB 的中点 E、F 和 M，所以 R'、S' 和 T' 分别是线段 $A'C'$、$C'B'$ 和 $A'B'$ 的中点. 令 $AR=a$, $RT=\alpha$, $BS=b$, $ST=\beta$, $SC=s$, $CR=\gamma$，相应地它们在准线 l 上的射影各记为 a'、α'、b'、β'、s'、γ'，于是有

$$①\ a'=\gamma',\ ②\ b'=s',\ ③\ a'+\alpha'=b'+\beta'.$$

又线段 RS 与折线 RTS 在准线 l 上的射影相等，所以有

$$④\ \alpha'+\beta'=\gamma'+s'.$$

这样由①、②和④得

$$⑤\ \alpha'+\beta'=a'+b'.$$

再由③和⑤得 $a'=\beta'$, $b'=\alpha'$，从而有

$$\frac{TR}{RA}=\frac{\alpha}{a}=\frac{\alpha'}{a'}=\frac{b'}{a'},$$

$$\frac{SC}{CR}=\frac{s}{\gamma}=\frac{s'}{\gamma'}=\frac{b'}{a'},$$

$$\frac{BS}{ST}=\frac{b}{\beta}=\frac{b'}{\beta'}=\frac{b'}{a'}.$$

$$\therefore \frac{TR}{RA}=\frac{SC}{CR}=\frac{BS}{ST}.$$

推论 2 若 TA、TB 是抛物线的切线，A、B 是切点，直线 RS

各交 TA、TB 于 R、S，则在线段 RS 上使得 $\frac{TR}{RA}=\frac{BS}{ST}=\frac{SC}{CR}$ 的点 C，必是直线 RS 与该抛物线的切点.

由推论 2 可知，如下直线族的包络为抛物线. 在 $\angle ATB$ 的边 TA 上，从顶点 T 开始，依次截取 n 次，使其长度各等于定线段 a，并顺次标上数字 0, 1, 2, …, n，这里 $TA=na$，再在边 TB 上从 T 点起连续截取 n 次，使其长度各等于定线段 b，

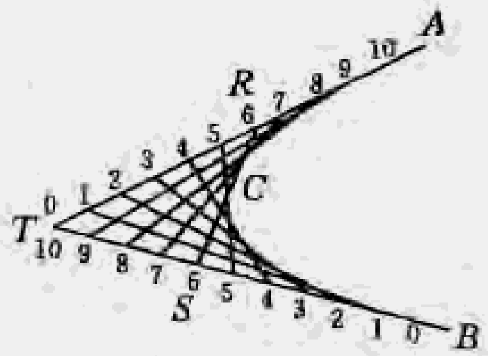


图 4-332

并依次注上数字 n, $n-1$, …, 2, 1, 0（图中 n 为 10），这里 $TB=nb$. 除标数字 0 与 n 的点外，把标相同数字的两点相连结，则这样得到的直线族的包络为抛物线，它与角的两边各切于 A、B，与 i 和 i 两点 R 和 S 的连线相切于满足 $\frac{SC}{CR}=\frac{i}{n-i}$ 的点 $C\left(这是因为\frac{TR}{RA}=\frac{BS}{ST}=\frac{i}{n-i}\right)$.

参考文献 [13, pp. 244～247], [17, p. 107], [1, p. 179].

（郑君文）

阿基米德三角形的性质（properties of Archimedes triangles）

(1) 阿基米德三角形底边上的中线，平行于该抛物线的轴；过这中线与该抛物线的交点的切线，平行于它的底边且平分其他两边（阿基米德三角形是指它的两边是一抛物线的切线，而第三边是连结两个切点的弦. 这条弦称为该阿基米德三角形的底边）.

(2) 设 M 是抛物线弦 AB 的中点，V 为过 M 且平行于它的对称轴的直线与这抛物线的交点，V_1 和 V_1' 分别为过 AV 和 BV 的中点 M_1 和 M_1' 且平行于对称轴的直线与这抛物线的交点，则

$$S_{\triangle AVV_1}=S_{\triangle BVV_1'}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABV}.$$

阿基米德在他所著的《抛物线的求积》一书中，为严格证明由力学原理得到的抛物线弓形的面积(见**怎样求抛物线弓形的面积**)，而引进了命题18～24. 上述(1)相当于命题18，而(2)就是命题21. 这些命题都反映了阿基米德三角形所具有的性质，引起后人对它的注意和研究.

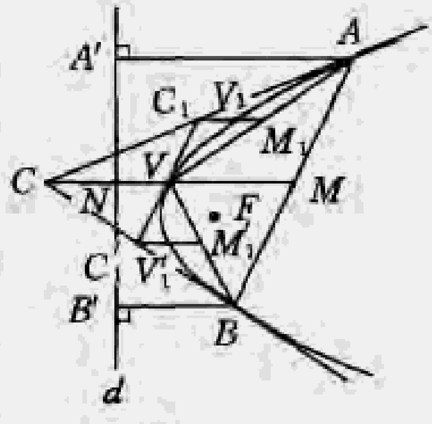


图4-333

设点F和直线d分别是抛物线的焦点和准线，CA和CB是它的两条切线，A、A'各是A、B在准线上的射影，则由兰伯特定理引理的证明过程中可知，C为$\triangle FA'B'$(图中未画出)的外心，所以梯形$AA'B'B$的中位线MN必通过C，即CM是$\triangle ABC$的中线，$CM /\!/ A'A$，也即CM平行于抛物线的对称轴. 设过CM与抛物线的交点V的切线各交AC、BC于C_1、C_1'，则$\triangle AVC_1$和$\triangle BVC_1'$都是阿基米德三角形，所以中线C_1M_1和$C_1'M_1'$都平行于抛物线的对称轴，从而也都平行于CV，故C_1、C_1'分别为AC、BC的中点，因此C_1C_1'平行于AB，且V为CM的中点.

由上可知，$S_{\triangle CC_1C_1'}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABV}$(它的推广就是**麦比乌斯定理**)，$S_{\triangle ABV}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，从而$S_{\triangle AVC_1}=S_{\triangle BVC_1'}=\frac{1}{2}S_{\triangle CC_1C_1'}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABV}$.

设C_1M_1和$C_1'M_1'$各与抛物线交于V_1和V_1'，则

$$S_{\triangle AVV_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle AVC_1},\ S_{\triangle BVV_1'}=\frac{1}{2}S_{\triangle BVC_1'}.$$

所以 $S_{\triangle AVV_1}=S_{\triangle BVV_1'}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABV}$.

采用坐标法，同样可得到(1)和(2). 如对于(2)，可设$A\left(\frac{y_1^2}{2a}, y_1\right)$、$B\left(\frac{y_2^2}{2a}, y_2\right)$为抛物线$y^2=2ax$上的两点(假定$y_1>$

y_2)，则 AB 中点 M 坐标为 $\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{4a}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，$CM$ 与抛物线交点 V 的坐标为 $\left(\frac{(y_1+y_2)^2}{8a}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以

$$S_{\triangle ABV}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2a}y_1^2 & y_1 & 1 \\ \frac{1}{2a}y_2^2 & y_2 & 1 \\ \frac{1}{8a}(y_1+y_2)^2 & \frac{1}{2}(y_1+y_2) & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值，}$$

化简后得 $S_{\triangle ABV}=\frac{1}{16a}|y_1-y_2|^3$. 利用这一结果，并注意到 V 的纵坐标为 $\frac{y_1+y_2}{2}$，故

$$S_{\triangle AVV_1}=\frac{1}{16a}\left|y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right|^3=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16a}|y_1-y_2|^3,$$

即 $\quad S_{\triangle AVV_1}=S_{\triangle BVV_1'}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABV}$.

1935 年，J. A. Bullard 给出了有关阿基米德三角形的下列性质(见 *Amer. Math. Monthly* 1935，p. 606，或 1937，p. 368)：如果一个三角形是三条抛物线的阿基米德三角形，即每条抛物线各与其中的两边在顶点处相切，则

(1) 三条抛物线除两两相交于顶点处外，还互相交于该三角形的中线上，且其交点位于该中线的 $\frac{1}{9}$ 处(从边上的中点算起)，如 $MT=\frac{1}{9}MN$.

(2) 三条抛物线和三条中线把三角形分成 18 个部分，其中 12 部分都是由两条线段和一条弧围成，其余 6 部分均由一条线段和两条弧围成. 上述 12 部分的面积都相等，且等于该三角形面积的

$\frac{5}{162}$，另外 6 部分的面积也都相等，且等于这三角形面积的$\frac{17}{162}$.

(3) 位于两抛物线交点处的两条切线，三等分其邻边，如 P、Q 三等分 GI.

(4) $\triangle GIN$ 的九点圆与一顶点引出的中线和高(如 GF 与 GK)相交于两点(X 和 Y)，这两点确定的直线垂直于该中线($XY\perp GF$)，从而也就垂直于相应的抛物线的轴，即平行于它的准线. 其实这条直线(XY)就是它的准线.

(5) 过焦点 F 平行于三角形非切线边的直线，在该边的中线(如 GF)上截下的一条线段(ZF)，等于中线上从顶点(G)到准线的距离(即 $GX=ZF$).

参考文献　[17, p. 126]，[21, pp. 236～242]，[1, pp. 150～151]，[13, pp. 264～266].

(郑君文)

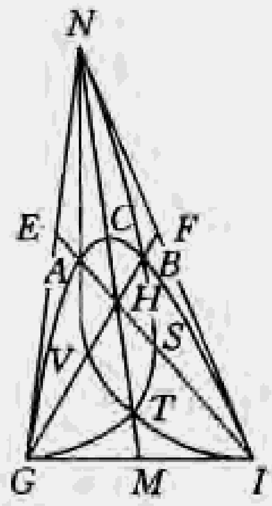


图 4－334

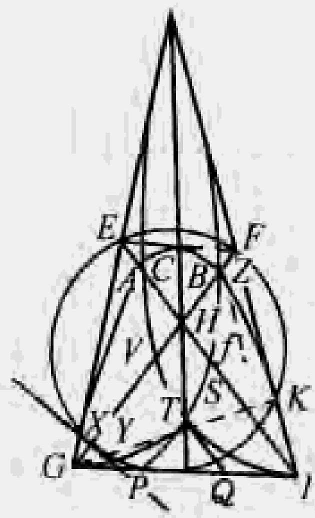


图 4－335

(四) 圆锥曲线

圆锥曲线的 Mac Cullagh 定理(Mac Cullagh's theorem of conic)　圆锥曲线的弦 PP' 通过定点 A，F 是它的一个焦点，设 $\angle PFA=\alpha$，$\angle P'FA=\beta$，则 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ 为定值.

下面的证明是 Mac Cullagh(1809～1847)给出的，见 Walton, *Examples*, p. 377. 又一般认为该定理是 Chasles 于 1837 年得到的. 该定理相当于下面定理的推广：过定点 A 作圆 O 的弦 PP'，

设$\angle POA=\alpha$，$\angle P'OA=\beta$，则$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$为定值.

设d为相对于焦点F的准线，点A、P在d上的射影各为A'、H，则$\frac{AF}{AA'}=e'$、$\frac{PF}{PH}=e$都是定值.

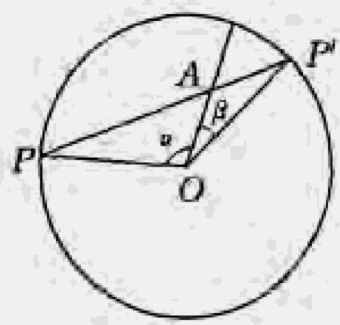


图 4-336

再设PP'与d相交于B，则

$$\frac{e}{e'}=\frac{PF}{PH}:\frac{AF}{AA'}=\frac{AA'}{PH}\cdot\frac{PF}{AF}=\frac{AB}{PB}\cdot$$

$$\frac{PF}{AF}=\frac{PF}{PB}:\frac{AF}{AB}=\frac{\sin\angle PBF}{\sin\angle PFB}:\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle AFB}$$

$$=\frac{\sin\angle AFB}{\sin\angle PFB}.$$

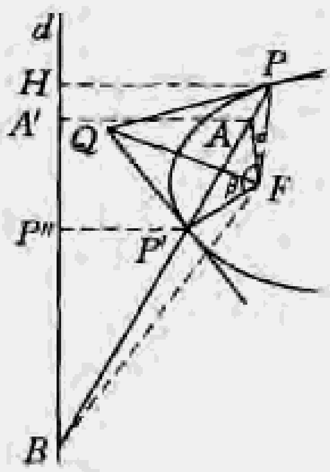


图 4-337

设点P'在准线d上的射影为P''，则

$$\frac{BP}{BP'}=\frac{PH}{P'P''}.$$

又$\frac{PF}{PH}=\frac{P'F}{P'P''}=e$，所以$\frac{PF}{P'F}=\frac{BP}{BP'}$，因此，$FB$为$\angle PFP'$的外角平分线.

分别过P、P'作该圆锥曲线的切线，设它们交于点Q，则据焦点切线的阿波罗尼奥斯定理(2)知，FQ为$\angle PFP'$的平分线(对于抛物线的情形，可由兰伯特定理的引理推知)，所以$FQ\perp FB$，且$\angle PFQ=\frac{\alpha+\beta}{2}$和$\angle AFQ=\frac{\beta-\alpha}{2}$. 从而$\sin\angle AFB=\cos\angle AFQ$，$\sin\angle PFB=\cos\angle PFQ$，因此

$$e:e'=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}:\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\therefore \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{e}{e'}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{e}{e'}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{e-e'}{e+e'}.$$

参考文献 [22, p.401].

（郑君文）

庞斯莱定理（Poncelet's theorem） 圆锥曲线的一条切线，被另两条定切线所截，则焦点对着所截得的部分张定角.

该定理是庞斯莱于1817年得到的.

设 PT、PT' 是圆锥曲线的两条给定切线，它们截第三条切线 t（切点为 T''）于 Q 和 R，如果该圆锥曲线为椭圆或双曲线，则据焦点切线的阿波罗尼奥斯定理(2)有 QF 平分 $\angle TFT''$，RF 平分 $\angle T''FT'$，所以 $\angle QFR$ 是 $\angle TFT'$ 的一半，而 $\angle TFT'$ 为定角，故 $\angle QFR$ 也为定角.

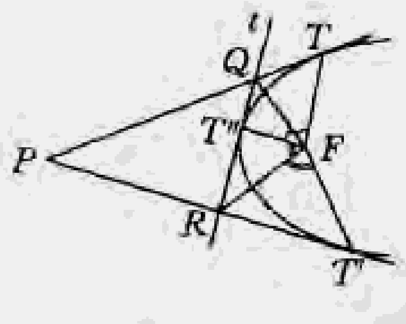


图 4-338

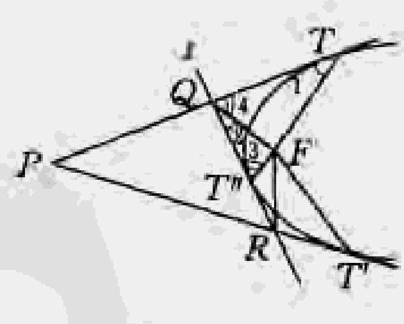


图 4-339

如果该圆锥曲线为抛物线，则由兰伯特定理的引理得 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，所以 $\angle TFQ=\angle QFT''$. 同样得 $\angle T'FR=\angle RFT''$. 因此 $\angle QFR$ 为 $\angle TFT'$ 的一半，而 $\angle TFT'$ 为定角，故 $\angle QFR$ 也为定角.

参考文献 [22, p. 400].

(郑君文)

圆锥曲线的帕波斯定理(Pappus' theorem of conic) 与一定点(焦点)和一定直线(准线)的距离之比为定值(离心率)的点的轨迹是一圆锥曲线,当这个定值小于1时是椭圆,等于1时是抛物线,大于1时是双曲线.

该定理涉及圆锥曲线的统一定义,为帕波斯所证明,载于他所著的《数学汇编》第7卷中.值得指出的是,在阿波罗尼奥斯所著的《圆锥曲线》中却没有这个定理.至于欧几里得是否知道这个定理,尚无定论.

对于抛物线的情形,根据它的定义,是很显然的.因此只需就这个定值不等于1的情形来求出它的轨迹是什么图形.

设定点 F' 与定直线 l', P 为满足条件的任意一点,作 $PQ \perp l'$, Q 为垂足,则

$$\frac{|PF'|}{|PQ|} = e\ (\neq 1).$$

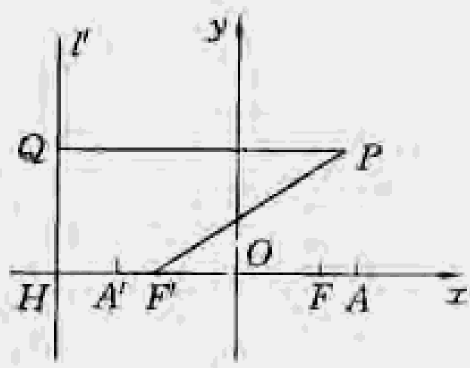


图 4-340

作 $F'H \perp l'$, H 为垂足,设 A' 和 A 是分线段 HF' 为 $1:e$ 的内、外分点,则

$$\frac{HA'}{A'F'} = \frac{1}{e}, \frac{HA}{AF'} = -\frac{1}{e},$$

可见 A' 和 A 是轨迹上的两个点,并且

$$\frac{HA'}{HF'} = \frac{1}{1+e}, \frac{HA}{HF'} = \frac{1}{1-e},$$

记 $HF' = 2p$,于是 $HA' = \dfrac{2p}{1+e}$, $HA = \dfrac{2p}{1-e}$.

设 O 为 AA' 的中点,则

$$A'O=\frac{1}{2}\left(\frac{2p}{1-e}-\frac{2p}{1+e}\right)=\frac{2pe}{1-e^2},$$

$$HO=\frac{1}{2}\left(\frac{2p}{1-e}+\frac{2p}{1+e}\right)=\frac{2p}{1-e^2},$$

所以 $F'O=HO-HF'=\dfrac{2pe^2}{1-e^2}$.

记 $A'O=a$，则 $F'O=ae$，$HO=\dfrac{a}{e}$.

现以 O 为原点，$F'O$ 为 x 轴建立直角坐标系. 设 P 点的坐标为 (x, y)，则

$$|F'P|=\sqrt{(ae+x)^2+y^2},\ |PQ|=\frac{a}{e}+x,$$

又 $|F'P|=e|PQ|$，所以

$$(ae+x)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2,$$

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2),$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

当 $e<1$ 时，设 $a^2(1-e^2)=b^2$，则得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

这就是所求的轨迹方程，可见它是椭圆.

当 $e>1$ 时，设 $a^2(e^2-1)=b^2$，则得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

这就是所求的轨迹方程，可见它是双曲线.

参考文献 [22, p. 400], [1, p. 254], [17, p. 143], [3, pp. 98~100].

（郑君文）

Dandelin 定理(Dandelin's theorem) 如果两个或一个球内切于一个圆锥,且都与一个已知平面相切,则该平面与圆锥的交线为一条圆锥曲线,它的焦点是球与平面的切点,准线是球面和圆锥相切的圆所在的平面与已知平面的交线.这里所涉及的球,称为 Dandelin 球.

该定理是比利时人 Germinal Pierre Dandelin(1794～1847)于 1822 年得到的,见 *Nouv. Mem. de l'Acad. Roy. des Sci.*, *Bruxelles*, 2, 1822, 169～202.

圆锥曲线,一般认为是由 Menaechmus(约前 350 年)发现的,他对顶角为直角、锐角、钝角的圆锥,分别用垂直于它的母线的平面去截,从而得到了抛物线、椭圆和双曲线三种曲线,且双曲线当时只知道一支.后来阿波罗尼奥斯证明了用不同平面去截一个圆锥,也可得到这三种曲线,并发现双曲线有两支.到了 17 世纪,圆锥曲线又被作为平面上点的轨迹而引进.因此就需解决圆锥曲线与圆锥之间关系的问题,上述定理正是在这种情况下被提出来的.

设 V 是圆锥的顶点,VX 是它的轴,α 是该圆锥的一个截面,过 VX 作平面 β 垂直于 α,交圆锥于母线 VA 和 VB.现过点 V 作平行于平面 α 的平面 π(图 4－341 中有的平面没有画出),把它区分为三种不同情况:

(1) 平面 π 和圆锥相切于母线 g.这时由于该圆锥和平面 π 都是关于平面 β 的对称图形,所以 g 必为 VA、VB 之一,设 g 为 VA,VB 与 α 相交于 B.再设球 O 与圆锥相切于$\odot Q$,与截面 α 切于点 F,VA 与$\odot Q$ 交于点 A,$\odot Q$ 所在平面 γ 与 α 相交于直线 d.因为点 O、Q 都在轴 VX 上,所以直线 OF 在平面 β 内,$VQ\perp\gamma$,从而 $\beta\perp\gamma$,于是 $d\perp\beta$,故平面 α 与 β 的交线 FB 垂直于 d,其垂足为 E,且 $FE\parallel AV$.连结 AE,则 $AE\perp d$.在截面 α 与圆锥的交线 l 上,任取一点 M,连结 VM 交$\odot Q$ 于 C,作平面 VAM 交 α 于直线 MD,D 为 d 与 MD 的交点,则 $MD\parallel AV$,从

而 $\triangle MCD \backsim \triangle VCA$，$MD \parallel FE$，所以 $MD \perp d$，$\frac{MC}{MD}=\frac{VC}{VA}$. 但 $VA = VC$，$MC = MF$，故 $\frac{MF}{MD}=\frac{MC}{MD}=\frac{VC}{VA}=1$，即 $MF = MD$，因此点 M 在以 F 为焦点、d 为准线的抛物线上. 反之，若 M' 是在以 F 为焦点、d 为准线的抛物线上的一点，但它不在 l 上. 在 α 上过点 M' 作一直线交该锥面于 M_1' 和 M_2'，于是据上面所述，M_1' 和 M_2' 也在以 F 为焦点、d 为准线的抛物线上. 这样出现了一直线与一抛物线有三个交点，这是不可能的. 所以平面 α 和圆锥的交线 l 是一条以 F 为焦点、d 为准线的抛物线.

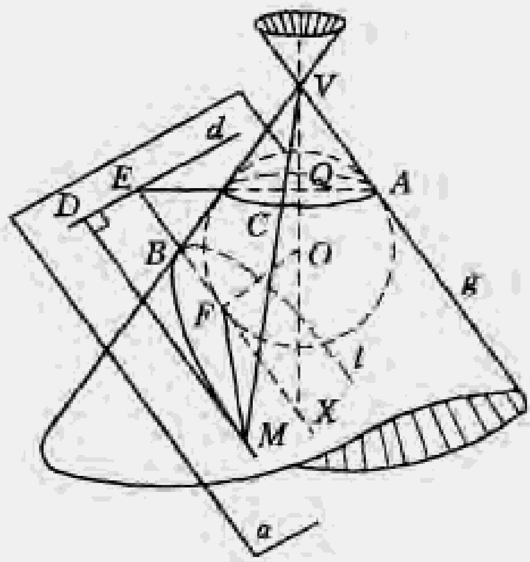


图 4－341

(2) 平面 π 和圆锥只有一个公共点 V. 如图 4－342，这时平面 π 和 β 相交于过点 V 的直线 g. 设 VA、VB 与平面 α 相交于点 A、B，则 $AB \parallel g$. 再设球 O_1 和 O_2 分别与平面 α 切于点 F_1 和 F_2，与圆锥相切于$\odot Q_1$ 和$\odot Q_2$，平面 α 各与$\odot Q_1$ 和$\odot Q_2$ 所在平面 γ_1 和 γ_2 相交于 d_1 和 d_2，g 与平面 γ_1 和 γ_2 各交于点 E_1 和 E_2. 因为 O_1、O_2、Q_1、Q_2 都在轴 VX 上，所以 $\beta \perp \gamma_1$，$\beta \perp \gamma_2$，O_1F_1 和 O_2F_2 都在平面 β 内，故 $d_1 \perp \beta$，$d_2 \perp \beta$，A、B、F_1、F_2 都在 α 与 β 的交线 a 上. 设 a 与 d_1、d_2 各交于 C_1、C_2，则 $C_1C_2 \parallel g$，$C_1C_2 \perp d_1$，$C_1C_2 \perp d_2$. 在平面 α 与圆锥的交线上，任取一点 M，连结 VM 各与$\odot Q_1$、$\odot Q_2$ 交于 M_1、M_2，则 $|MF_1| + |MF_2| = |MM_1| + |MM_2| = |M_1M_2|$，而 $|M_1M_2|$ 为定长，所以 M 在以 F_1、F_2 为焦点的椭圆上. 若作平面 VME_1，它与 γ_1、γ_2 各相交于直线 E_1M_1、E_2M_2，与平面 α 相交于过 M 点的直线 b，则 b 与 E_1M_1 和 E_2M_2 的

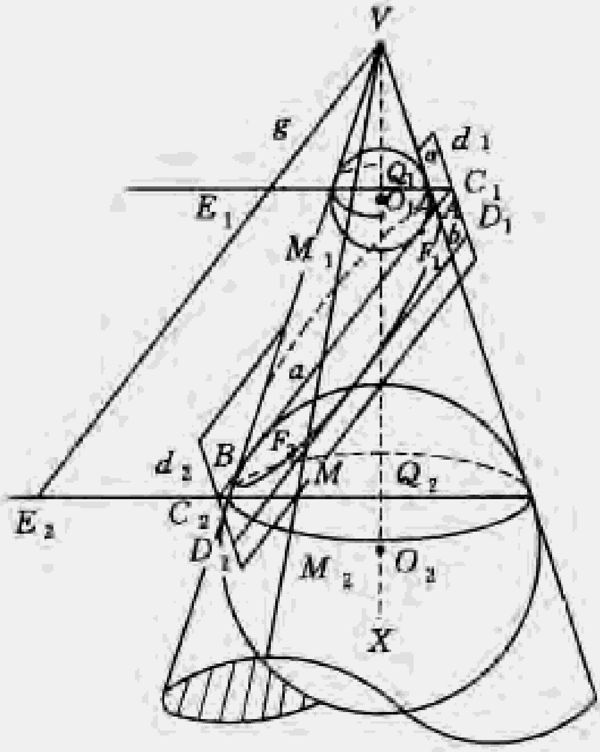


图 4-342

交点 D_1、D_2 各在 d_1、d_2 上，所以 $D_1D_2 \parallel g$，于是 $\triangle MM_1D_1 \backsim \triangle VM_1E_1$，$D_1D_2 \perp d_1$，因此 $\frac{|MF_1|}{|MD_1|}=\frac{|MM_1|}{|MD_1|}=\frac{|VM_1|}{|VE_1|}$，而 $\frac{|VM_1|}{|VE_1|}$ 是小于 1 的常量 e，故点 M 在以 F_1 为焦点、d_1 为准线的椭圆上. 同样可知，点 M 也在以 F_2 为焦点、d_2 为准线的同一个椭圆上. 反之可证，平面 α 上到点 F_1(或 F_2)与直线 d_1(或 d_2)距离之比等于 $e(<1)$ 的椭圆的点，必在平面 α 与圆锥的交线上，所以 α 与圆锥的交线为以 F_1(或 F_2)为焦点、d_1(或 d_2)为准线的椭圆.

(3) 平面 π 与圆锥相交于两条母线. 如图 4-343，这种情形与上面 2 中平面 α 与圆锥的交线为椭圆相类似，其证明也类同，只是球 O_1 和 O_2 各与圆锥的一叶相切于$\odot Q_1$ 与$\odot Q_2$，而这时 $||MF_2|-|MF_1||=||MM_2|-|MM_1||=|M_1M_2|$，且 $|M_1M_2|$ 为定长，所以点 M 是在以 F_1 和 F_2 为焦点的双曲线上. 设$\odot Q_1$ 和$\odot Q_2$ 所在的平面 γ_1 和 γ_2 分别与平面 α 相交于 d_1 和

d_2，则点 M 到 F_1 和到 d_1 的距离之比等于 $\frac{|VM_1|}{|VE_1|}$，它为大于 1 的常数，所以点 M 在以 F_1（或 F_2）为焦点、d_1（或 d_2）为准线的双曲线上. 反之，若 M' 是以 F_1（或 F_2）为焦点、d_1（或 d_2）为准线的双曲线上的一点，则它在平面 α 与圆锥的交线上. 所以平面 α 与圆锥的交线是以 F_1（或 F_2）为焦点，d_1（或 d_2）为准线的双曲线.

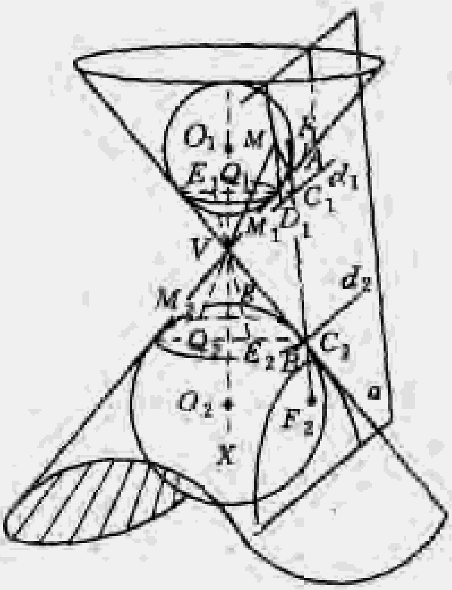


图 4－343

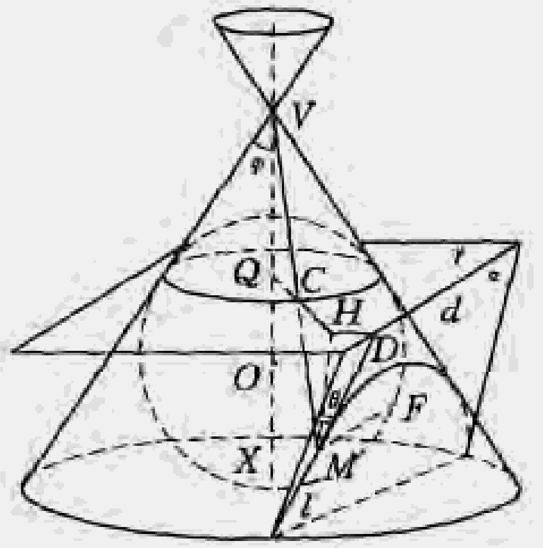


图 4－344

如果截面通过圆锥的顶点 V，那么交线成为退化圆锥曲线.

我们也可以统一推导出平面 α 与圆锥的交线为圆锥曲线. 如图 4－344，设球 O 与平面 α 相切于点 F，与圆锥相切于⊙Q，⊙Q 所在平面 γ 与平面 α 相交于直线 d. 在平面 α 与圆锥的交线 l 上任取一点 M，连结 VM 交⊙Q 于点 C，因为 O、Q 都在圆锥的轴 VX 上，所以 $VQ \perp \gamma$. 过点 M，作 $MD \perp d$，$MH \perp \gamma$，D、H 为垂足，则 $VQ \parallel MH$，所以 $\angle HMC = \angle QVC = \varphi$，这里 φ 是圆锥的半顶角，它是个定角. $\angle DMH = \theta$，θ 等于平面 α 与轴 VX 所成的角. 因为 $\frac{|MH|}{|MC|} = \cos\varphi$，$\frac{|MH|}{|MD|} = \cos\theta$，所以 $\frac{|MC|}{|MD|} = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$. 又 $|MC| = |MF|$，从而 $\frac{|MF|}{|MD|} = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} = e$. 当截面 α 给

定后，e 是一个正常数，故点 M 是在以 F 为焦点、d 为准线的圆锥曲线上. 反之，可以证明，当 M' 是在以 F 为焦点、d 为准线的圆锥曲线上的任意一点，它必在平面 α 与圆锥的交线 l 上. 因此，平面 α 与圆锥的交线是一条以 F 为焦点、d 为准线的圆锥曲线. 当 $\theta=\varphi$，即 $e=1$ 时，它为抛物线；当 $\varphi<\theta<\frac{\pi}{2}$，即 $0<e<1$ 时，它为椭圆；当 $0\leqslant\theta<\varphi$，即 $1<e$ 时，它为双曲线.

参考文献 [20, pp. 187～188]，[9, pp. 385～389]，[15, pp. 533～536]，[19, p. 247].

（郑君文）

（五）轨迹与作图

van Schooten 轨迹问题（van Schooten problem of locus） 平面上一个三角形的两个顶点，沿着一定角的两边所在直线上移动，求它的第三个顶点的轨迹.

该轨迹问题及其解载于荷兰人 van Schooten（1615～1660，荷兰人）所著的一书中（1657），它的一个退化情形早为 Produs（410～485）所完成，即“在一条定长线段 AB（或其延长线）上有一个固定点 P，设该线段的两端点 A 和 B 各在一个定直角的两边所在直线上移动，求 P 点的轨迹”.

现先求出这个退化情形的轨迹. 取两条直角边各作为 x 轴和 y 轴，建立直角坐标系，设 $|BP|=a$，$|PA|=b$，$|BA|=c$，则按 P 在 BA 上或其延长线上，有 $c=a\pm b$（图 4-345 中 P 在 AB 上）. 再设 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上移动，P 点的坐标为 (x, y)，AB 与 x 轴所成的角为 θ，则 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$.

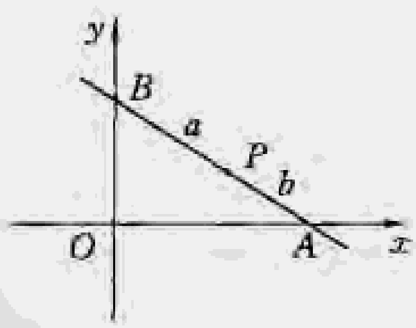


图 4-345

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

就是说，P 点的轨迹是长半轴长和短半轴长各为 a 和 b 的椭圆.

根据上述轨迹，可以利用纸带来作椭圆，即在纸带的边缘上标出 B、A、P 三点，使 BP 和 PA 各为椭圆的长半轴长 a 和短半轴长 b，于是当移动纸带且始终保持 A 在 x 轴上和 B 在 y 轴上时，描下 P 点所经过的位置，即为所求作的椭圆.

通常的椭圆规，就是根据这个轨迹题而制造成的一个画椭圆的工具.

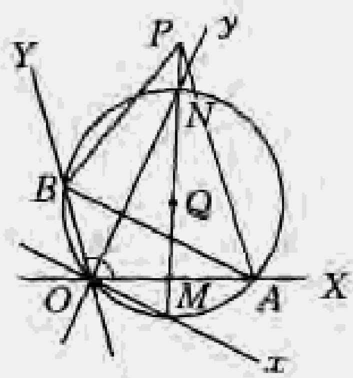


图 4－346

对于一般情形，如图 4－346，即固定点 P 不在定长线段 AB 所在的直线上，于是构成了 $\triangle ABP$，又 A、B 各在一定角 $XOY=\alpha$（不必是直角）的两边所在直线上移动，这时 $\triangle ABO$ 的外接圆 Q 的半径 $R=\dfrac{AB}{2\sin\alpha}$ 为定长，故由 $QA=QB=R$、AB 为定长，可知圆心 Q 相对于 $\triangle ABP$ 而言是固定的，因此 $\odot Q$ 可看做与动 $\triangle ABP$ 结合在一起而移动，且 O 点总在这圆上. 连结 PQ 交 $\odot Q$ 于 M、N，则 PM 与 PN 有定长，$\angle NOM$ 为直角. 虽然弧 AN 与 AM 不断随动 $\triangle ABP$ 改变位置，但它们的大小不变，所以 $\angle AON$ 与 $\angle AOM$ 的大小一定，故直线 ON 和 OM 有定向，且 $ON\perp OM$，即 $\angle xOy$ 为定直角，这样 P 点可看成定长线段 MN（或其延长线）上的一固定点，而端点 N 和 M 各在定直角 xOy 的两边所在直线上移动，所以据上述退化情形知，P 点的轨迹是一椭圆，它的对称轴为 Ox 与 Oy，长半轴长和短半轴长各为 PM 和 PN.

参考文献　[13，pp. 238～240]，[9，p. 407]，[16，pp. 178～182].

（张文华　郑君文）

La Hire 轨迹定理（La Hire theorem of locus）　圆锥曲线两条

互相垂直的切线的交点的轨迹，在椭圆或双曲线的情形为圆，在抛物线的情形为直线，这圆称为准圆，这直线是抛物线的准线.

该轨迹定理是法国数学家 La Hire(1640～1718)于 1704 年得到的.

设点 P 是椭圆的两条互相垂直的切线 PT 与 PT' 的交点，F 与 F' 是它的焦点，现各作 F' 关于 PT 与 PT' 的对称点 A 与 B，则 A、P、B 三点共线，$\angle APT=\angle F'PT$，$AT=F'T$，$AP=PF'$. 据焦点切线的阿波罗尼奥斯定理(2)，有 $\angle FPT=\angle F'PT'$，所以 $\angle APF=\angle APT+\angle FPT=\angle TPF'+\angle F'PT'=\angle TPT'=\mathrm{Rt}\angle$. 又 A、T、F 三点共线，$AF=AT+TF=TF'+TF=2a$，而 $PA=PF'$，所以 $4a^2=PF^2+PF'^2=2(OP^2+c^2)$，这里 $2a$ 为椭圆的长轴长，O 为 FF' 的中点，c 为半焦距，因此 $OP^2=2a^2-c^2=a^2+b^2$. 这就是说，P 点的轨迹是以 O 为圆心、$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的圆.

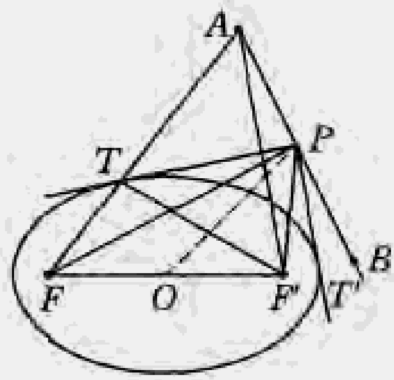


图 4-347

对于双曲线的情形，同法可得到 P 点的轨迹是以 O 为圆心、$\sqrt{a^2-b^2}$ 为半径的圆，但当 $a=b$ 时，轨迹成为点圆，当 $a<b$ 时，轨迹为虚圆.

在抛物线的情形，设点 P 是它的两条相互垂直的切线 PT 与 PT' 的交点，A、B 各是焦点 F 关于这两条切线的对称点，则 A、B 都在准线 d 上，且 A、P、B 三点共线，所以 P 在准线 d 上，因此 P 点的轨迹是这抛物线的准线 d.

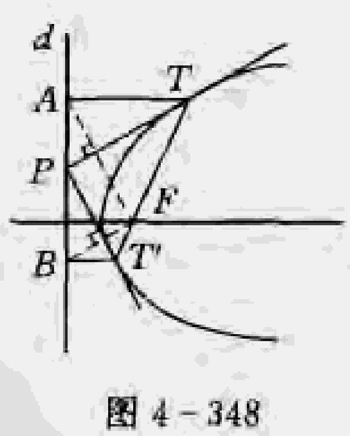


图 4-348

当然可先建立直角坐标系来求其轨迹方

程，然后便可知轨迹是什么图形．设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则具有斜率 k 的该椭圆的切线方程是

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2},$$

而与它垂直相交的这椭圆的切线方程为

$$y=-\frac{x}{k}\pm\sqrt{\frac{a^2}{k^2}+b^2},$$

即 $(y-kx)^2=a^2k^2+b^2,\ (ky+x)^2=a^2+b^2k^2.$

上面两式相加消去 k，得 $x^2+y^2=a^2+b^2$，这就是所求的轨迹方程，它是以原点为圆心、$\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径的一个圆．

同样可求得双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的互相垂直的两条切线交点的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2-b^2$，而抛物线 $y^2=2px$ 的情形，它的轨迹方程为 $x=-\frac{p}{2}$.

参考文献 ［22，pp. 411～412］.

（郑君文）

准圆（directer circle） 见 La Hire 轨迹定理．

施泰纳轨迹定理（Steiner theorem of locus） 设三角形三边所在直线切于一抛物线，则它的垂心的轨迹是该抛物线的准线．

该轨迹定理是施泰纳于 1827 年得到的．

设△ABC 三边所在直线切抛物线 $y^2=4ax$ 于点 $P_1(at_1^2,2at_1)$、$P_2(at_2^2,2at_2)$、$P_3(at_3^2,2at_3)$，则直线 AB、BC、CA 的方程各是

$$t_1y=x+at_1^2,$$
$$t_2y=x+at_2^2,$$

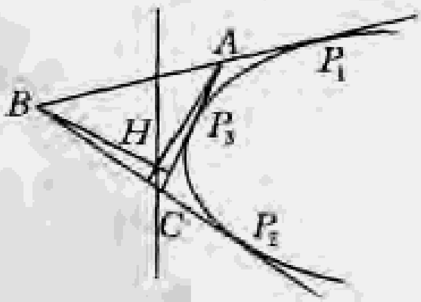


图 4－349

$$t_3 y = x + a t_3^2,$$

由此解得点 A、B、C 的坐标各为 $(at_1t_3, a(t_1+t_3))$、$(at_1t_2, a(t_1+t_2))$、$(at_2t_3, a(t_2+t_3))$. 又直线 BC、CA 的斜率分别是$\frac{1}{t_1}$、$\frac{1}{t_3}$，因此$\triangle ABC$ 的边 BC、CA 上的高线的方程各为

$$y - a(t_1+t_3) = -t_2(x - at_1t_3),$$
$$y - a(t_1+t_2) = -t_3(x - at_1t_2).$$

它们的交点 H 即为$\triangle ABC$ 的垂心，其坐标满足上述两个方程. 解由这两个方程组成的方程组，解得 $x=-a$. 所以 H 点的轨迹是抛物线 $y^2=4ax$ 的准线.

参考文献 [22, p.414].

（郑君文）

布利安香-庞斯莱轨迹定理（Brianchon-Poncelet theorem of locus） 外接于$\triangle ABC$ 的等轴双曲线的中心的轨迹是这三角形的九点圆.

该轨迹定理是布利安香、庞斯莱发表在 *Gergonne's Annales de Math*, 11（1820～1821）上的论文 *Recherches sur la determination d'une hyperbole équiatère, au moyen de quatre conditions donées* 中述及九点圆处(p. 250)提到的.

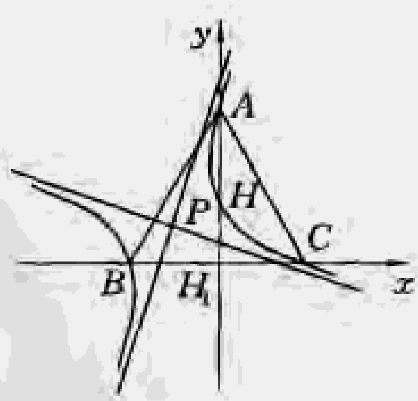


图 4-350

由布利安香—庞斯莱定理的证明中得知，如果设 $A(0, \lambda)$、$B(\mu, 0)$、$C(\mu', 0)$，且 $H(0, \lambda')$是高线 AH_1 上的一点，则外接于$\triangle ABC$ 的等轴双曲线（即等轴双曲线通过 A、B、C 三点）的方程为

$$(\lambda x + \mu y - \lambda\mu)(\lambda' x + \mu' y - \lambda'\mu') + hxy = 0,$$

且　$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$，这里 h 是参数.

由于该等轴双曲线的中心 $P(x, y)$ 满足下列方程组：

$$\begin{cases}\lambda\lambda' x + \frac{1}{2}(h + \lambda\mu' + \lambda'\mu)y - \frac{1}{2}\lambda\lambda'\mu - \frac{1}{2}\lambda\lambda'\mu' = 0, \\ \frac{1}{2}(h + \lambda\mu' + \lambda'\mu)x + \mu\mu' y - \frac{1}{2}\lambda\mu\mu' - \frac{1}{2}\lambda'\mu\mu' = 0.\end{cases}$$

即　$$\begin{cases}\lambda(\lambda' x + \mu' y - \lambda'\mu') + \lambda'(\lambda x + \mu y - \lambda\mu) + hy = 0, \\ \mu(\lambda' x + \mu' y - \lambda'\mu') + \mu'(\lambda x + \mu y - \lambda\mu) + hx = 0.\end{cases}$$

所以消去参数 h，就得到中心 $P(x, y)$ 满足的方程：

$$2\lambda\lambda' x^2 - 2\mu\mu' y^2 - \lambda\lambda'(\mu + \mu')x + \mu\mu'(\lambda + \lambda')y = 0,$$

这就是所求外接于 $\triangle ABC$ 的等轴双曲线的中心的轨迹方程.

因为 $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$，所以上述方程表示一个圆，并把它化为

$$\left(x - \frac{\mu + \mu'}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{\lambda + \lambda'}{4}\right)^2 = \frac{(\mu + \mu')^2 + (\lambda + \lambda')^2}{16},$$

可见边 BC 的中点 $M_1\left(\frac{\mu + \mu'}{2}, 0\right)$、边 CA 的中点 $M_2\left(\frac{\mu'}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$、边 AB 的中点 $\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ 都满足该方程，就是说该圆通过 $\triangle ABC$ 的三边的中点，所以该圆就是 $\triangle ABC$ 的九点圆，因此外接于 $\triangle ABC$ 的等轴双曲线的中心的轨迹是这三角形的九点圆.

当然也可用综合法证明"外接于等轴双曲线的 $\triangle ABC$ 的九点圆，通过该等轴双曲线的中心"，由此可推得"外接于已知三角形的等轴双曲线中心的轨迹是该三角形的九点圆".

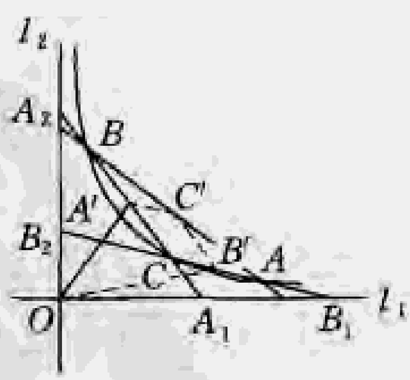


图 4-351

设$\triangle ABC$外接于以点O为中心，直线l_1和l_2为渐近线的等轴双曲线，A'、B'、C'分别是边BC、CA、AB的中点，直线BC和CA各与l_1和l_2相交于A_1、A_2和B_1、B_2. 由于直线BC和CA被等轴双曲线及其两条渐近线所截下的线段相等，即$|CA_1| = |BA_2|$，$|AB_1| = |CB_2|$，所以A'、B'也各是线段A_2A_1、B_2B_1的中点. 由$\mathrm{Rt}\triangle A_1A_2O$和$\mathrm{Rt}\triangle B_1B_2O$得

$$\angle A'OA_1 = \angle OA_1A', \angle B'OB_1 = \angle OB_1B',$$

$$\therefore \angle A'OA_1 - \angle B'OB_1 = \angle OA_1A' - \angle OB_1B',$$

即$\angle A'OB' = \angle A_1CB'$.

因为$A'CB'C'$是平行四边形，所以$\angle A'C'B' = \angle A'CB'$，于是$\angle A'OB' + \angle A'C'B' = \angle A_1CB' + \angle A'CB' = 180°$，因此$A'$、$O$、$B'$、$C'$四点共圆，即$\triangle ABC$的九点圆通过该等轴双曲线的中心.

由所得的轨迹定理，可以得到“已知四点作等轴双曲线”的作法.

已知A、B、C、D四点，可先作$\triangle ABC$的九点圆和$\triangle ABD$的九点圆，设它们交于点O，则点O就是所求作等轴双曲线的中心. 再连结点O与BC的中点A'，在直线BC上点A'的两侧各截取$|A'A_1| = |A'A_2| = |OA'|$，然后作直线$OA_1$和$OA_2$，则这两条直线就是所求作的等轴双曲线的渐近线. 最后就可以利用已知点来作等轴双曲线上一系列的点，如过A任作直线，各交渐近线OA_1和OA_2于B_n和B_{n+1}，在$B_{n+1}A$上截取$B_{n+1}C_n$的长等于AB_n的长，则C_n就是所求作等轴双曲线上的点.

参考文献 [22, p. 407], [13, pp. 236~237].

（郑君文）

Klamkin-Miller 轨迹定理(Klamkin-Miller theorem of locus)

内接于椭圆的正三角形重心的轨迹，是一个与其同中心的椭圆.

该轨迹定理为 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 66(1959)中的问题E1348，是由 M. S. Klamkin 和R. Miller 提出的.

设正三角形 ABC 内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，它的顶点 A、B、C 的离心角分别为 α、β、γ，于是重心 G 的坐标为

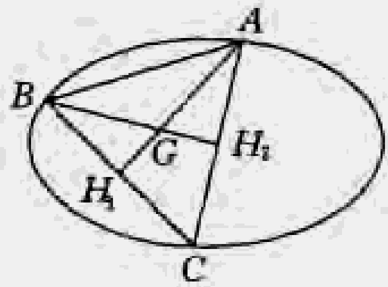


图 4-352

$$x=\frac{a}{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma),$$
$$y=\frac{b}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma). \quad ①$$

因为△ABC 是正三角形，所以重心 G 与它的垂心 H 重合，而垂心 H 可通过三个顶点的坐标来求，为此可先求出 BC 的方程

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

于是 BC 边上高线 AH_1 的方程为

$$y-b\sin\alpha=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}(x-a\cos\alpha). \quad ②$$

同样可求出 AC 边上高线 BH_2 的方程为

$$y-b\sin\beta=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}(x-a\cos\beta). \quad ③$$

由 ②、③ 联立解得

$$x=\frac{a^2+b^2}{2a}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)-\frac{a^2-b^2}{2a}\cos(\alpha+\beta+\gamma), \quad ④$$
$$y=\frac{a^2+b^2}{2b}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\frac{a^2-b^2}{2b}\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

用 ① 代入 ④ 得

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a^2} \cdot 3x - \frac{a^2 - b^2}{2a}\cos(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$y = \frac{a^2 + b^2}{2b^2} \cdot 3y - \frac{a^2 - b^2}{2b}\sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

消去上述两式中的 $\alpha + \beta + \gamma$,得

$$\frac{(a^2 + 3b^2)^2}{a^2(a^2 - b^2)^2}x^2 + \frac{(3a^2 + b^2)^2}{b^2(a^2 - b^2)^2}y^2 = 1.$$

故所求的重心的轨迹是一个中心在原点的椭圆,也即为与所给椭圆同心的一个椭圆.

参考文献 [24, pp. 79~80].

(郑君文)

圆锥曲线的直径(diameter of conic) 求圆锥曲线的一组平行弦的中点的轨迹. 该轨迹称为圆锥曲线的直径. 抛物线的任一直径平行于它的对称轴.

该轨迹载于阿波罗尼奥斯所著的《圆锥曲线》的第一卷中,该卷还给出直径、共轭直径等概念,与现今解析几何中的相应概念一致.

首先考虑椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的情形,设 $y = mx + n$ 是斜率为 m 的一组平行弦的方程(n 为参数),PQ 是其中的任意一条,又设 P、Q 的坐标为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2), $M(x, y)$ 是 PQ 的中点,则

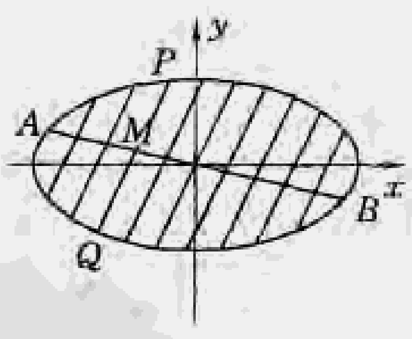


图 4-353

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

因为 P 与 Q 是弦与椭圆的两个交点,把 $y = mx + n$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,得

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

可见 x_1 和 x_2 是上述方程的两个根，由根与系数的关系得

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mn}{b^2 + a^2m^2},$$

$$\therefore x = -\frac{a^2mn}{b^2 + a^2m^2}. \quad ①$$

把 ① 代入 $y = mx + n$，得

$$y = \frac{b^2n}{b^2 + a^2m^2}. \quad ②$$

由 ① 和 ② 消去 n，得

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \quad 或\ b^2x + a^2my = 0.$$

由此可见所求的轨迹(直径)是直线的一部分，就是图中过椭圆中心且在它的内部的线段 AB.

同样可求出双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一组平行弦 $y = mx + n$ (n 为参数)的中点的方程为

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x \ 或\ b^2x - a^2my = 0,$$

可见双曲线的直径为过它的中心的直线或两射线.

抛物线 $y^2 = 4ax$ 的一组平行弦 $y = mx + n$ (n 为参数) 的中点的方程为 $y = \frac{2a}{m}$，由此可知抛物线的直径是平行它的对称轴的一条射线.

参考文献 [22, pp. 410～411]，[17, pp. 105～106]，[1, p. 178].

(郑君文)

洛必达轨迹定理(L'Hospital theorem of locus) 相交成定角的两条直线都与一定抛物线相切,则这两条直线交点的轨迹是双曲线.

该轨迹定理是洛必达获得的,于1720年公布于世,它是La Hire 轨迹定理的推广. 庞斯莱在1817年至1818年也对它进行了研究.

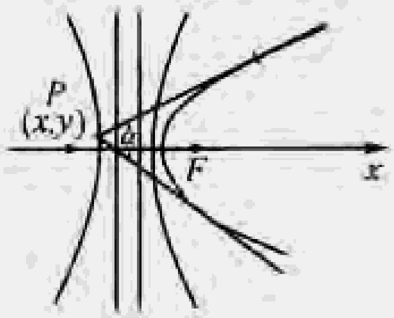


图 4-354

直线 $y = mx + n$ 与定抛物线 $y^2 = 4ax$ 相切的充要条件是方程

$$(mx+n)^2 = 4ax$$

或 $$m^2x^2 + 2(mn-2a)x + n^2 = 0$$

有等根,即 $a = mn$. 因此,具有斜率 m 的直线与这抛物线相切的方程是

$$y = mx + \frac{a}{m}. \qquad ①$$

现从点 $P(x, y)$ 向抛物线 $y^2 = 4ax$ 引两条切线,设其斜率各为 m_1、m_2,它们的交角为定角 α,则

$$\text{tg}\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}. \qquad ②$$

然而 m_1、m_2 是 ① 经整理后的方程

$$xm^2 - ym + a = 0$$

的两个根,故有 $m_1 + m_2 = \frac{y}{x}$, $m_1m_2 = \frac{a}{x}$. 把它们代入②,并加整理,得

$$y^2 - 4ax = \text{tg}^2\alpha(x+a)^2. \qquad ③$$

这就是所求的轨迹方程.

把 ③ 化成

$$\frac{[x+a(1+2\cot^2\alpha)]^2}{4a^2\cot^2\alpha\csc^2\alpha}-\frac{y^2}{4a^2\csc^2\alpha}=1,$$

由此可知，该轨迹是与抛物线 $y^2=4ax$ 有相同的焦点与准线，且离心率等于 $\sec\alpha$ 的双曲线(图 4-354 中 y 轴未画出).

参考文献 [22, pp.413～414].

(郑君文)

帕波斯问题(Pappus' problem) 在平面上给定 3 条(或 4 条)直线，一动点 C 向这 3 条(或 4 条)定直线分别引直线，使其各交成定角(交角不一定相等)，并使得在所得的 3 条线段(或 4 条线段)中，某两条线段的长之积与第三条线段的平方成定比(或某两条线段的长之积与其余两条线段的长之积成定比)，求 C 点的轨迹(即"3 或 4 条直线的轨迹"问题). 对于给定 5 条以上直线，可依此类推. 这一类问题统称为帕波斯问题.

对于给定 3 条或 4 条直线的情形，欧几里得已遇到过某些特例，但没有完全解决；阿波罗尼奥斯在他所著的《圆锥曲线》的序言中说，这一问题可用它第 3 卷中的命题解决(确实能做到)；帕波斯在所著的《数学汇编》第 7 篇的前言中，重述这一问题，并且知道这个轨迹是圆锥曲线，但他未作证明，帕波斯还指出这一问题可推广到包含 5 条、6 条或更多条给定直线的情形，认为阿波罗尼奥斯仍没有完全解决这个问题；笛卡尔用代数方法研究"3 条或 4 条直线"的帕波斯问题，并在他的名著《方法论》(1637)一书的附录《几何》中，用大量篇幅介绍与解决该问题，且以此来阐发他的解析几何思想，该问题也成为促使他创立解析几何的主要动机之一. 现以 4 线帕波斯问题为例，简述笛卡尔的解法.

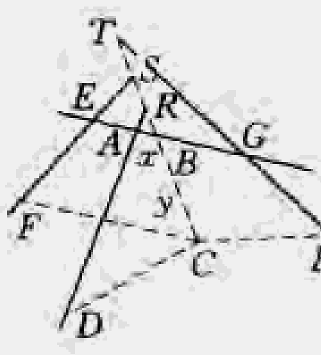


图 4-355

设 AB、AD、EF 和 GH 是给定的 4 条直线，从动点 C 引出的 4 条直线 CB、CD、

CF 和 CH 分别与已给定直线交成定角，且满足 $CB \cdot CF = CD \cdot CH$，现要求 C 点的轨迹. 笛卡尔在解这个问题时，假定 C 点已找到，并令 $AB = x$, $CB = y$，通过对各线段之间的几何关系的分析，得出用已给的量表达 CD、CF 和 CH，然后代入 $CB \cdot CF = CD \cdot CH$，经过化简就得到一个关于 x 和 y 的二次方程

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2,$$

其中 A、B、C、D 是由已知量组成的代数式. 这样任给一个 x 值，就可解出相应的 y 值，从而可用直尺和圆规作出 y，也就得到了一个 C 点. 如果取无穷多个 x 值，便得到无穷多个相应的 y 值，于是就得到无穷多个 C 点，所有这些 C 点的轨迹，就是上述方程所代表的曲线. 这里笛卡尔为确定 C 点的位置，选定直线 AB 为基线(相当于一根坐标轴)，点 A 为基点(相当于坐标原点)，x 的值是从 A 点起沿着基线量出的长度，y 值是从基线出发且与它交成定角的另一条线段的长(相当于另一根坐标轴，但它不是固定的，而是随着 x 的取值而平移). 由此可见他所采用的是平面斜坐标系，而因 x、y 只取正值，所以还局限于第一象限之内，但上述方程所代表的曲线却无这种限制. 牛顿在他所著《自然哲学之数学原理·宇宙体系》的第一编第五章中，用综合法证明 4 线帕波斯问题的轨迹是圆锥曲线.

当然，采用现在解析几何的方法，帕波斯问题是容易解的，而且对于 3 条或 4 条直线的帕波斯问题，易见它的轨迹是圆锥曲线. 现以 3 线帕波斯问题为例简解如下：

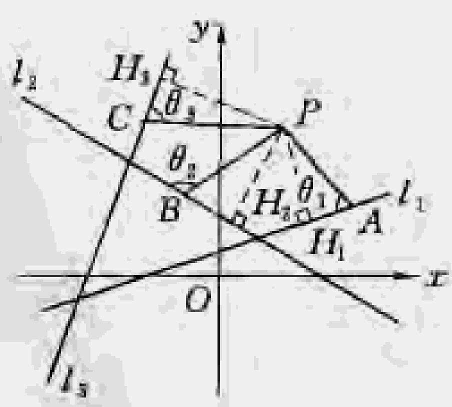


图 4-356

在直角坐标系中，设给定的 3 条直线 $l_i (i = 1, 2, 3)$ 的方程为

$$A_i x + B_i y + C_i$$

$=0\ (i=1,2,3)$,

又设从动点 $P(x, y)$引出直线分别与上述给定的直线交成定角 θ_i $(i=1,2,3)$，交点各为 A、B、C，且动点 P 满足 $PA^2=k|PB|\cdot|PC|$，其中 k 为常数，则据点到直线的距离公式得

$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{(A_1^2+B_1^2)\sin^2\theta_1}=k\cdot\frac{|A_2x+B_2y+C_2|\cdot|A_3x+B_3y+C_3|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}\cdot\sqrt{A_3^2+B_3^2}\cdot\sin\theta_2\sin\theta_3},$$

即
$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{(A_1^2+B_1^2)\sin^2\theta_1}=\frac{k(A_2x+B_2y+C_2)(A_3x+B_3y+C_3)}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2)(A_3^2+B_3^2)}\cdot\sin\theta_2\sin\theta_3},$$

或
$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{(A_1^2+B_1^2)\sin^2\theta_1}=-\frac{k(A_2x+B_2y+C_2)(A_3x+B_3y+C_3)}{\sqrt{(A_2^2+B_2^2)(A_3^2+B_3^2)}\cdot\sin\theta_2\sin\theta_3},$$

这就是所求的轨迹方程.

由于上述方程是关于 x 和 y 的二次方程，可见轨迹是圆锥曲线. 显然，对于给定五条直线以上的帕波斯问题，所求的轨迹方程则高于二次.

参考文献 [5, pp. 9～13, pp. 28～36]，[17, pp. 109～110, pp. 143～144]，[18, pp. 10～12]，[1, pp. 182～183, pp. 257～258].

（郑君文）

牛顿椭圆问题(problem of Newton ellipse) 求内切于已知四边形的椭圆中心的轨迹.

该问题于 1685 年为牛顿所发现和解决. 在解决这问题前，牛

顿先证明了与其相关的一个定理："圆外切四边形对角线中点的连线，必通过该圆的圆心."他以这个定理为基础，巧妙地解决了上述问题.

上述定理的证明是基于下面的轨迹命题："两个三角形有一公共顶点，其所对的底边固定，且面积之和为定值，则公共顶点的轨迹是一条直线."我们以$\triangle PAB$与$\triangle PCD$的固定边AB、CD所在直线为坐标轴，它们的交点O(交角为θ)为原点建立斜坐标系Oxy，设P点的坐标为(x, y)，点到AB、CD的距离各为h_1、h_2，则$h_1 = x\sin\theta$，$h_2 = y\sin\theta$. 又设$|AB| = a$，$|CD| = b$，$\triangle PAB$与$\triangle PCD$的面积之和为定值S，则$\frac{1}{2}h_1a + \frac{1}{2}h_2b = S$，所以$ax + by = \frac{2S}{\sin\theta}$，即$ax + by + c = 0$，这里$c = -\frac{2S}{\sin\theta}$. 因此所求的轨迹是一条直线.

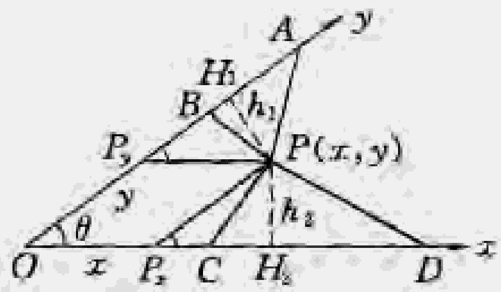


图 4-357

因为$\odot Q(r)$内切于已知四边形$ABCD$，所以$AD + BC = AB + CD = p$，这里p是该四边形周长的一半. 由于Q为$\triangle QAD$与$\triangle QBC$的公共顶点，其底边AD、BC固定，面积之和为已知四边形面积S的一半，即为定值$\frac{1}{2}S$，所以这两个三角形公共顶点Q在其相应的轨迹l上. 设M是四边形$ABCD$对角线BD中点，则

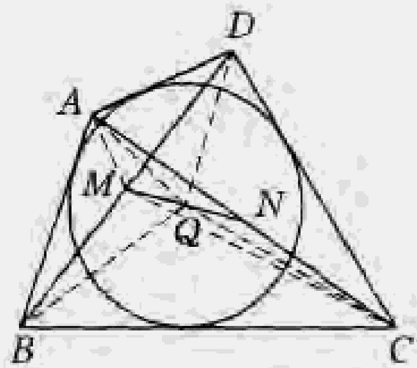


图 4-358

$$S_{\triangle MAD} + S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} + \frac{1}{2}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S,$$

所以点M在轨迹l上. 同理，对角线AC的中点N也在轨迹l上.

因此对角线中点 M、N 的连线通过圆心 Q.

我们也可以直接证明该定理,这只要连结对角线 BD 的中点 M 与圆心 Q,交另一对角线 AC 于点 N,证明 N 是 AC 的中点就好了.

由于 $S_{\triangle QAD}=\frac{1}{2}S-S_{\triangle QBC}$,于是

$$\begin{aligned}S_{\triangle AMQ}&=S_{\triangle ADM}+S_{\triangle QDM}-S_{\triangle QAD}\\&=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}+S_{\triangle QBM}-\left(\frac{1}{2}S-S_{\triangle QBC}\right)\\&=S_{\triangle QBC}+S_{\triangle QBM}-\frac{1}{2}(S-S_{\triangle ABD})\\&=S_{\triangle QBC}+S_{\triangle QBM}-S_{\triangle MBC}\\&=S_{\triangle CMQ},\end{aligned}$$

所以 A、C 两点到 MQ 的距离相等,因此 N 是 AC 的中点.

内切于已知四边形的任意一个椭圆,可作为一个圆的法向投影(映射)的像,而已知四边形则为外切于该圆的原像四边形的像.由于法向投影线段的比保持不变,于是椭圆的中心为这圆的圆心的像,又据上述定理,圆心在这圆外切四边形对角线中点的连线上,所以在这映射中,椭圆的中心也在已知四边形对角线中点的连线上. 因此内切于已知四边形的椭圆中心的轨迹,是对角线中点的连线.

对于双曲线也有相同结论,从而推广为:切于已知四边形的四边的有心圆锥曲线中心的轨迹,是对角线中点的连线.

参考文献 [13, pp. 241~243],[20, p. 386],[22, pp. 257~258, p. 413].

(郑君文)

过给定五点(切线)作圆锥曲线(construct a conic section through given five points (tangent lines)) 求作一条圆锥曲线,

使它(1) 通过给定的五个点;(2) 相切于给定的五条直线.

该圆锥曲线的作图问题,是牛顿所著的《自然哲学之数学原理·宇宙体系》一书第一编第五章"焦点未知时怎样求轨迹"里的命题22和命题27.

(1) 给定五点 A、B、C、D、E,假设 F 是所求圆锥曲线上的点,则据帕斯卡定理,圆锥曲线的内接六边形 $ABCDEF$ 的三双对边的交点 P、Q、R 共线,于是可得到如下作法.

设 AB 与 DE 交于点 P,过点 A 作任一直线 l,交 CD 于点 R,连结 PR 交 BC 于点 Q,再连结 QE 交 l 于点 F,则点 F 就是过所给五点的圆锥曲线上的点,当 l 绕 A 点旋转,则可作出圆锥曲线上的其他点.

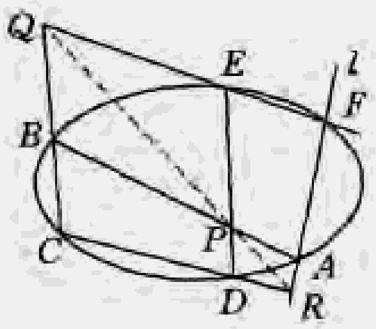


图 4-359

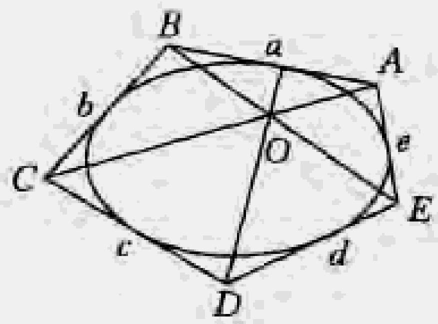


图 4-360

(2) 给定 AB、BC、CD、DE、EA 是圆锥曲线的五条切线.设 AC 和 BE 交于点 O,连结 DO 交 AB 于点 a,则 a 就是 AB 与该圆锥曲线的切点. 这是据布利安香定理,圆锥曲线的外切六边形 $AaBCDE$ 的三双对顶点的连线 AC、BE、Da 共点. 同样可作出其他各条切线的切点 b、c、d、e. 这样就成为给定圆锥曲线上的五个点,于是可把它归结为(1)的作圆锥曲线了.

参考文献 [22, pp. 421 ~ 422], [13, pp. 301 ~ 307], [6, pp. 88~90, pp. 102~103].

(郑君文)

过给定四点作抛物线(construct a parabola through given four

points） 已知抛物线上的四点，求作抛物线.

该问题牛顿先于1687年在他的名著《自然哲学之数学原理》（*Philosophiae naturalis principia mathematica*）中作了解答，后又于1707年在他的另一部著作《普遍算术》（*Arithmetica universalis*）里再次作了解答.

解本题需要运用下列抛物线的性质：

1. 抛物线弦的中点，在其对称轴上的射影，与该弦的垂直平分线和对称轴交点间的距离，等于这抛物线的焦参数.

设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上的两点，k（$=\mathrm{tg}\alpha$）为 AB 的斜率，则 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，于是 $y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$，所以

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{p(x_1-x_2)}{y_1-y_2}=\frac{p}{k}=\frac{p}{\mathrm{tg}\alpha},$$

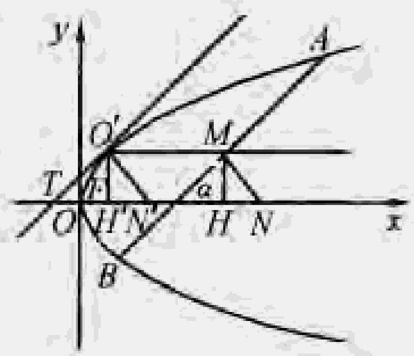


图 4-361

即 AB 中点 M 的纵坐标为 $\frac{p}{\mathrm{tg}\alpha}$. 由于 p 是常数，从而可知，抛物线的平行弦（k 为常数）中点的轨迹，是一条平行于对称轴的射线.

设 AB 的垂直平分线 MN 与对称轴交于点 N，H 为 M 在对称轴上的射影，则 $HN=HM\mathrm{tg}\alpha=\frac{p}{\mathrm{tg}\alpha}\cdot\mathrm{tg}\alpha=p$. 这就是说，抛物线的任意一条弦的垂直平分线与它的对称轴的交点，和该弦中点在对称轴上的射影间的距离，等于它的焦参数. 由此可得下列推论：

推论1 抛物线的两条弦，如果它们中点位于对称轴的同一条垂线上，则这两条弦的垂直平分线的交点在对称轴上.

推论2 设过抛物线弦 AB 的中点 M 平行于它的对称轴的直线，与该抛物线交于点 O'，则过点 O' 的切线 $O'T$（交对称轴于 T）

平行于 AB，且其次法距 $H'N'$ 等于 p，线段 TN' 的中点 F 为该抛物线的焦点.

据此就可来解辅助题 1:"已知三点及对称轴的方向，作该抛物线."作抛物线，只要作出它的焦点和顶点(或准线)就可以了.

已知对称轴的方向 l 及 A、B、C 三点.过 AB 的中点 M，作直线 a 平行于 l；过 AC 的中点 M_1，作 $M_1M' \perp a$，M' 为垂足，过 M' 作 AB 的平行弦 $A'B'$；作 $M'N' \perp A'B'$，$M_1N' \perp AC$，它们相交于点 N'；作过 N' 平行于 l 的直线 Ox，它与 M_1M' 交于 H'. 这里 Ox 就是所求作抛物线的对称轴，$H'N'$ 就是焦参数.

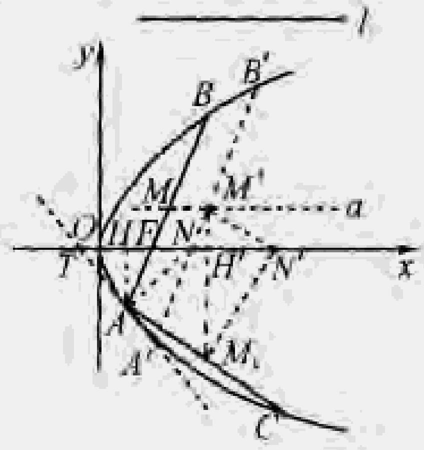


图 4-362

再作 $AH \perp Ox$，H 为垂足；在 Ox 上与 $H'N'$ 同方向截取 $HN = H'N'$；作 $AT \perp AN$，交 Ox 于 T，则 TN 的中点 F，就是所求抛物线的焦点，由此就可作出所求抛物线的原点、准线了.

2. 内接于抛物线的四边形的对角线交点，各把对角线分成两部分，则其乘积与对角线被其交点和对称轴截下的线段的平方成正比.

设 AC、BD 是内接于抛物线 $y^2 = 2px$ 的四边形 $ABCD$ 的对角线，它们相交于点 P. 又设过 AC 中点 M 且平行于对称轴的直线，与抛物线交于点 O'. 现以点 O' 为原点，与抛物线相切于 O' 的切线为纵坐标轴，直线 $O'M$ 为横坐标轴，建立斜坐标系 $x'O'y'$，这里 O' 对于直角坐标系 xOy 的坐标为 (a, b)，两坐标轴 $O'x'$ 与 $O'y'$ 的

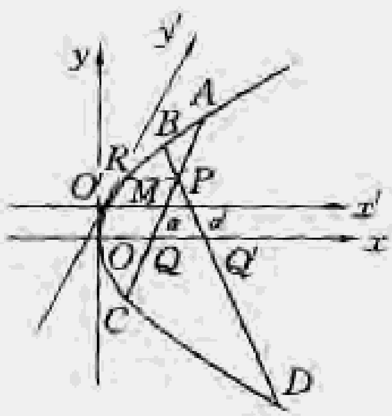


图 4-363

交角等于弦 AC 与抛物线对称轴 Ox 所成的角 α. 设点 A 在直角坐标系 xOy 中的坐标为 (x, y)，在斜坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为

(x', y')，则 $x = a + x' + y'\cos\alpha$, $y = b + y'\sin\alpha$，把它们代入 $y^2 = 2px$ 得 $(b + y'\sin\alpha)^2 = 2p(a + x' + y'\cos\alpha)$. 因为通过点 (a, b) 的抛物线的切线方程为 $by = p(x + a)$，所以 $\mathrm{tg}\alpha = \frac{p}{b}$，即 $p\cos\alpha = b\sin\alpha$，又 $b^2 = 2pa$，由此得 $y'^2\sin^2\alpha = 2px'$，即 $y'^2 = \frac{2p}{\sin^2\alpha}x'$. 令 $\frac{p}{\sin^2\alpha} = p'$，则 $y'^2 = 2p'x'$. 过点 P 作 PR 平行于 Ox，交抛物线于点 R. 设点 R 的斜坐标为 (x_1', y_1')，则由上可知，$y_1'^2 = 2p'x_1'$，且 $RP = d = x' - x_1'$，$PA = y' - y_1'$，$CP = y' + y_1'$，于是 $y'^2 - y_1'^2 = 2p'(x' - x_1')$，$(y' + y_1')(y' - y_1') = 2p'(x' - x_1')$，即 $CP \cdot PA = 2p'd$. 同样可得 $DP \cdot PB = 2p''d$，这里 $p'' = \frac{p}{\sin^2\alpha'}$，$\alpha'$ 为 DB 与 Ox 所成的角. 设 AC 和 BD 与抛物线对称轴 Ox 相交于 Q 和 Q'，则 $\frac{QP}{\sin\alpha'} = \frac{Q'P}{\sin\alpha}$，所以

$$\frac{CP \cdot PA}{DP \cdot PB} = \frac{p'}{p''} = \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\alpha} = \frac{QP^2}{Q'P^2}.$$

显然，如果 AC 和 BD 各交平行于抛物线对称轴的直线于 Q_1 和 Q_1'，则

$$\frac{CP \cdot PA}{DP \cdot PB} = \frac{Q_1P^2}{Q_1'P^2}.$$

由上述性质，就可来解辅助题 2："已知四点，作该抛物线对称轴的方向."

A、B、C、D 是已知的四点，作四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD，设它们相交于点 P，分别作 CP、PA 和 DP、PB 的比例中项 q 与 q'（图未画出）. 在 PC 和 PD 上，各截取 $PQ = q$ 和 $PQ' = q'$，则 QQ' 就是所求作的抛物线对称轴的方向.

因此，"已知四点求作抛物线"，就归结为解辅助题 1 和 2，就

是先由四点作出所求抛物线对称轴的方向，再取其中的三点与对称轴的方向作出所求的抛物线.

如果已知四点的直角坐标，那么据 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$ 和 $B^2-4AC=0$，就可求出该抛物线方程中各项的系数(或与各项系数相差一个比例常数)，从而可把它化为标准方程，这样即可作出所求的抛物线.

参考文献 [13，pp. 232～235].

(郑君文)

(六) 极值

最大内接四边形(A maximum inscribed quadrilateral) 内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的四边形中，以顶点的离心角分别为 θ、$\theta+\frac{\pi}{2}$、$\theta+\pi$、$\theta+\frac{3\pi}{2}$ 的四边形的面积为最大，其最大面积为 $2ab$.

内接于椭圆的面积为最大的四边形是由 Manheim 于 1857 年求出的.

施行变换 $x=ax'$，$y=by'$，则椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 就变换成单位圆 $x'^2+y'^2=1$；椭圆的内接四边形就变换成圆的内接四边形；面积为 A 的四边形就变换为面积为 A' 的四边形，且 $A=abA'$. 变换前后面积的关系，可先从 $\triangle ABC$ 变换成 $\triangle A'B'C'$，即点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 变换为点 $A'(x_1',y_1')$、$B'(x_2',y_2')$、$C'(x_3',y_3')$，则得到

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}ax_1' & by_1' & 1\\ ax_2' & by_2' & 1\\ ax_3' & by_3' & 1\end{vmatrix}\text{的}$$

绝对值 $= ab \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值 $= ab \cdot S_{\triangle A'B'C'}$.

再因四边形可分成两个三角形，而它们的面积之和也具有同样的关系，所以 $A = abA'$.

由于圆内接四边形中以正方形的面积为最大，而在单位圆 $\begin{cases} x' = \cos\theta, \\ y' = \sin\theta \end{cases}$ 中，内接正方形的四个顶点一般可写成$(\cos\theta, \sin\theta)$、$\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$、$(\cos(\theta+\pi), \sin(\theta+\pi))$、$\left(\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right), \sin\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)\right)$，它的面积为 2，所以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接四边形中以顶点的离心角分别为 θ、$\theta+\frac{\pi}{2}$、$\theta+\pi$、$\theta+\frac{3}{2}\pi$ 的四边形的面积为最大，其最大面积为 $A = abA' = 2ab$.

由上可知，内接于椭圆且面积为最大的四边形有无穷多个，而边分别平行于椭圆对称轴且面积为最大的内接矩形是唯一的.

把上述定理推广，就得到：

定理 1 内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的 n 边形中 $(n \geqslant 3)$，面积最大的 n 边形有无穷多个，其顶点的离心角分别为 θ, $\theta+\frac{2\pi}{n}$, $\theta+\frac{4\pi}{n}$, $\theta+\frac{6\pi}{n}$, $\cdots$, $\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

显然，当 $n=3$ 时，即内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的三角形中，具有面积最大的三角形有无穷多个，它的顶点的离心角分别为 θ, $\theta+\frac{2\pi}{3}$, $\theta+\frac{4\pi}{3}$, 其最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

由于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 及其切线，施行变换 $x=ax'$, $y=by'$，就得到圆 $x'^2+y'^2=1$ 及其切线，所以外切于椭圆的 n 边形中，具有面积为最小的 n 边形的问题，就转化为在圆的外切 n 边形中，求其面积为最小的 n 边形的问题，而这是已知的，即在圆的外切 n 边形中，以其正 n 边形的面积为最小. 于是就得到：

定理 2　外切于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的 n 边形中 $(n\geqslant 3)$，有无穷多个 n 边形的面积为最小，其切点的离心角分别为 θ, $\theta+\frac{2\pi}{n}$, $\theta+\frac{4\pi}{n}$, $\cdots$, $\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

参考文献　[22, pp.423~424], [14, pp.158~166].

（郑君文）

施泰纳椭圆(Steiner's ellipse)　外接于△ABC 面积最小的椭圆，是切于该三角形各顶点的平行于它的对边的直线的椭圆. 这个椭圆称为△ABC 的施泰纳椭圆.

另有与上述定理相连的一个定理：内切于△ABC 面积最大的椭圆，是切于三角形三边中点的椭圆.

以上两个定理是 J. Thomae 获证的，见 *Zeitschrift Math. Physik* 21 (1876).

上面两个定理的证明都是基于平行投影，把外接(内切)于△ABC 的椭圆变换为外接(内切)于△$A'B'C'$ 的圆，而其面积为最小(最大)则保持不变. 这样就可从研究具有怎样关系的三角形的外接(内切)圆的面积为最小(最大)，而后通过变换就得到相应的具有同样关系的三角形的外接(内切)的椭圆的面积为最小(最大). 下面

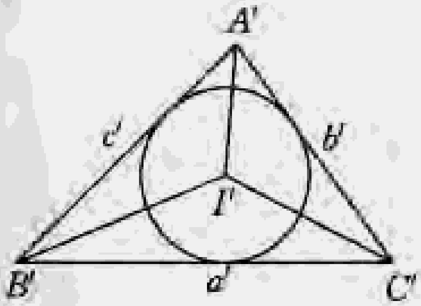


图 4-364

先介绍内切于$\triangle ABC$的情形，即后一个定理获证的基本过程.

设圆I'是$\triangle A'B'C'$的内切圆，它的半径为r'，面积为S'，又$\triangle A'B'C'$的三边a'、b'、c'之和的一半为p'，面积为Δ'，再记$\Delta_1'=S_{\triangle B'I'C'}$、$\Delta_2'=S_{\triangle C'I'A'}$、$\Delta_3'=S_{\triangle A'I'B'}$，则

$$S'=\pi\cdot\sqrt{\frac{(\Delta'-2\Delta_1')(\Delta'-2\Delta_2')(\Delta'-2\Delta_3')}{\Delta'}}.$$

事实上，这可由$p'r'=\Delta'$，$2\Delta_1'=a'r'$，$2\Delta_2'=b'r'$，$2\Delta_3=c'r'$代入

$$\Delta'=\sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')},$$

得

$$\Delta'=\sqrt{\frac{\Delta'}{r'}\cdot\frac{\Delta'-2\Delta_1'}{r'}\cdot\frac{\Delta'-2\Delta_2'}{r'}\cdot\frac{\Delta'-2\Delta_3'}{r'}},$$

$$r'^2=\sqrt{\frac{(\Delta'-2\Delta_1')(\Delta'-2\Delta_2')(\Delta'-2\Delta_3')}{\Delta'}},$$

$$\therefore S'=\pi r'^2=\pi\cdot\sqrt{\frac{(\Delta'-2\Delta_1')(\Delta'-2\Delta_2')(\Delta'-2\Delta_3')}{\Delta'}}.$$

由于Δ'是一定的，又$(\Delta'-2\Delta_1')+(\Delta'-2\Delta_2')+(\Delta'-2\Delta_3')=\Delta'$，所以当$\Delta'-2\Delta_1'=\Delta'-2\Delta_2'=\Delta'-2\Delta_3'$，也即$\Delta_1'=\Delta_2'=\Delta_3'$时$S'$为最大，这时$I'$是$\triangle A'B'C'$的重心，内切圆$I'$的面积是$\triangle A'B'C'$面积的$\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

据平行投影性质知，内切于$\triangle ABC$、面积最大的椭圆的中心I是$\triangle ABC$的重心，它切于各边的中点，且其面积是$\triangle ABC$面积的$\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

现在来介绍外接于$\triangle ABC$的情形. 设圆O'是$\triangle A'B'C'$的外接圆，它的半径为R'，面积为S'，$\triangle A'B'C'$的面积为Δ'，并记

$\Delta_1' = S_{\triangle O'B'C'}$，$\Delta_2' = S_{\triangle O'C'A'}$，$\Delta_3' = S_{\triangle O'A'B'}$，则

$$S' = \frac{4\pi\Delta_1'\Delta_2'\Delta_3'}{\sqrt{\Delta'(\Delta' - 2\Delta_1')(\Delta' - 2\Delta_2')(\Delta' - 2\Delta_3')}}.$$

事实上，由 $\Delta_1' = \frac{1}{2}R'^2\sin 2A'$，$\Delta_2' = \frac{1}{2}R'^2\sin 2B'$，$\Delta_3' = \frac{1}{2}R'^2\sin 2C'$，得

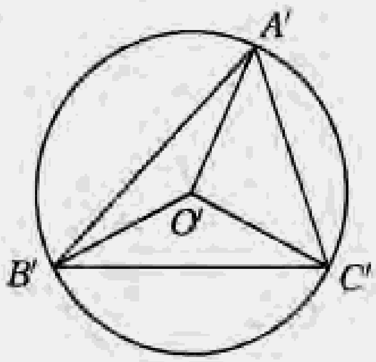


图 4-365

$$\Delta' = \frac{1}{2}R'^2(\sin 2A' + \sin 2B' + \sin 2C')$$

$$= 2R'^2\sin A'\sin B'\sin C'.$$

$$\Delta' - 2\Delta_1' = 2R'^2\sin A'\cos B'\cos C',$$

$$\Delta - 2\Delta_2' = 2R'^2\sin B'\cos C'\cos A',$$

$$\Delta - 2\Delta_3' = 2R'^2\sin C'\cos A'\cos B'.$$

$$\therefore \Delta_1'\Delta_2'\Delta_3' = \frac{1}{8}R'^6\sin 2A'\sin 2B'\sin 2C'$$

$$= R'^6\sin A'\sin B'\sin C'\cos A'\cos B'\cos C'.$$

$$\sqrt{\Delta'(\Delta' - 2\Delta_1')(\Delta' - 2\Delta_2')(\Delta' - 2\Delta_3')}$$

$$= 4R'^4\sin A'\sin B'\sin C'\cos A'\cos B'\cos C',$$

$$\therefore S' = \pi R'^2 = \frac{4\pi\Delta_1'\Delta_2'\Delta_3'}{\sqrt{\Delta'(\Delta' - 2\Delta_1')(\Delta' - 2\Delta_2')(\Delta' - 2\Delta_3')}}.$$

由于 $\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = \Delta'$ 为一定，所以问题就成为在这条件下求

$$z = \frac{\Delta_1'\Delta_2'\Delta_3'}{\sqrt{(\Delta' - 2\Delta_1')(\Delta' - 2\Delta_2')(\Delta' - 2\Delta_3')}}$$

的最小值. 据对数求导法知，当

$$\frac{1}{\Delta_1'}+\frac{1}{2(\Delta'-2\Delta_1')}=\frac{1}{\Delta_2'}+\frac{1}{2(\Delta'-2\Delta_2')}$$
$$=\frac{1}{\Delta_3'}+\frac{1}{2(\Delta'-2\Delta_3')},$$

也即 $\Delta_1'=\Delta_2'=\Delta_3'$ 时，S' 为最小，这时 O' 是 $\triangle A'B'C'$ 的重心，外接圆 O' 的面积是 $\triangle A'B'C'$ 面积的 $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

据平行投影的性质知，外接于 $\triangle ABC$、面积最小的椭圆的中心 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，AO、BO、CO 分别通过 BC、CA、AB 的中点 M_1、M_2、M_3，均为椭圆的直径，而过 $\triangle ABC$ 的顶点且平行于对边的直线 DE、DF、EF 是这椭圆的切线，其面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.

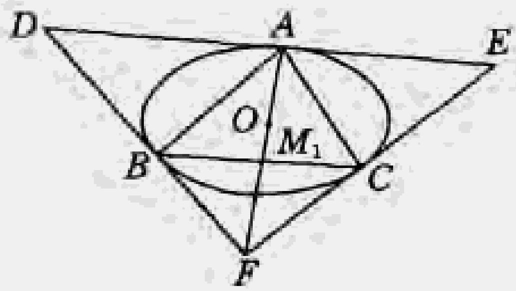


图 4-366

参考文献 [22, pp. 424～425], [13, pp. 413～414].

（郑君文）

葛尔刚-施泰纳问题(Gergonne-Steiner problem) 在已知四边形的所有外接椭圆中，求与圆的偏差最小的一个.

该问题是由葛尔刚提出(见 *Annales de Mathēmatiques*)，为施泰纳所解决(见 *Crelle's Journal*, Vol. Ⅱ; *Gesammelte Werke*, Vol. Ⅰ).

显然，已知四边形必为凸四边形，现设它为四边形 $OPRQ$. 延长 OP 和 QR、PR 和 OQ 各相交于点 H、K，设 $OP=p$, $OQ=q$, $OH=h$, $OK=k$，并取 OP 和 OQ 为 x 轴和 y 轴，建立斜坐标系 xOy，则边 OP 和 OQ 的方程为 $y=0$ 和 $x=0$，PR 和 QR 两边的方程为 $\frac{x}{p}+\frac{y}{k}=1$ 和 $\frac{x}{h}+\frac{y}{q}=1$，也即 $kx+py-kp=0$ 和

$qx+hy-hq=0$. 记 $u=kx+py-kp$, $v=qx+hy-hq$, 则 $u=0$, $v=0$, 所以外接于四边形 $OPRQ$ 的任意一个椭圆的方程可表示为

$$\lambda xu+\mu yv=0\ (\lambda、\mu\text{ 是参数}), \quad ①$$

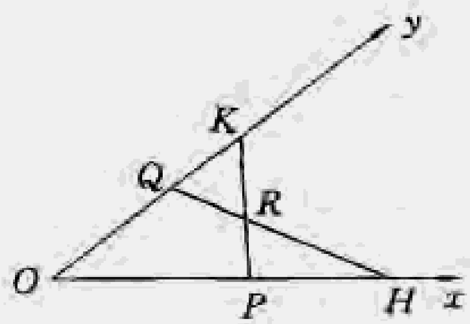


图 4-367

这是由于 O、P、R、Q 四点的坐标都满足二次方程①,从而由①表示的二次曲线 l 通过这四个点,所以 l 是已知四边形的一个外接椭圆. 又若外接椭圆通过第五个点 (x_0, y_0),则可选择 λ 和 μ,使得 $\lambda x_0(kx_0+py_0-kp)+\mu y_0(qx_0+hy_0-hq)=0$, 于是点 (x_0, y_0) 也在 l 上. 因为过五点决定一条二次曲线,所以 l 就是外接椭圆. 因此,四边形 $OPRQ$ 的任何一个外接椭圆都可用①表示.

把 $u=kx+py-kp$ 和 $v=qx+hy-hq$ 代入①,得

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey=0, \quad ②$$

其中 $A=k\lambda$, $2B=p\lambda+q\mu$, $C=h\mu$, $2D=-kp\lambda$, $2E=-hq\mu$.
现来求出该椭圆的具有共同斜率 m 的一组平行弦

$$y=mx+n \quad ③$$

的中点的轨迹,这里 n 是(y 轴上的截距)参数. 将③代入②得

$$(Cm^2+2Bm+A)x^2+2[(Cn+E)m+Bn+D]x+Cn^2+2En=0.$$

设上面的一元二次方程的两个根为 x_1 和 x_2,则据韦达定理有

$$x_1+x_2=-2\cdot\frac{(Cn+E)m+Bn+D}{Cm^2+2Bm+A},$$

所以弦中点的横坐标 X 为

$$X=-\frac{(Cm+B)n+Em+D}{Cm^2+2Bm+A},\qquad ④$$

由于弦中点的坐标(X,Y)满足方程③,从而有$Y=mX+n$,即$n=Y-mX$,把它代入④,得

$$X=-\frac{(Cm+B)(Y-mX)+Em+D}{Cm^2+2Bm+A},$$

化简得

$$Y=m'X+n',\qquad ⑤$$

其中$m'=-\frac{Bm+A}{Cm+B}$, $n'=\frac{Em+D}{Cm+B}$. 因为⑤表示一条直线,所以椭圆的一组斜率为m的平行弦中点的轨迹(即椭圆的直径)位于斜率为m'的直线上. 易知,这椭圆的以m'为共同斜率的一组平行弦中点的轨迹(也即椭圆的直径)位于斜率为m的直线上,像这样的两条直径就是共轭直径,而共轭直径所具有的方向(由斜率m和m'决定)就是共轭方向.

为解决上述问题还需介绍两个引理.

引理1 只有一对共轭方向(共轭直径)属于一个四边形的所有外接椭圆.

把$A=k\lambda$, $B=\frac{1}{2}(p\lambda+q\mu)$, $C=h\mu$代入$m'=-\frac{Bm+A}{Cm+B}$中,得

$$-m'=\frac{(2k+pm)\lambda+qm\mu}{p\lambda+(2hm+q)\mu}.$$

如果对于某指定的m,关于所有的外接椭圆,m'总保持相同的值,就是说,不论λ、μ取什么值,m'都相同,那么当取$\lambda=1$、$\mu=0$及$\lambda=0$、$\mu=1$时必得到这个值,就是

$$-m'=\frac{2k+pm}{p},\ 和\ -m'=\frac{qm}{2hm+q}.\qquad ⑥$$

由此可见这里的m'和λ、μ无关，而m应满足的条件是$\frac{2k+pm}{p}=\frac{qm}{2hm+q}$，即$hpm^2+2hkm+kq=0$，解之得

$$m_1=-\frac{k}{p}+\frac{r}{hp},\ m_2=-\frac{k}{p}-\frac{r}{hp}, \tag{7}$$

其中$r^2=h^2k^2-hp\cdot kq=hk(hk-pq)$. 因为$hk>pq$，所以$r>0$，故$m_1$、$m_2$都是实数，且$m_1+m_2=-\frac{2k}{p}$. 又据⑥知，

$$m_1'=-m_1-\frac{2k}{p}=m_2,\ m_2'=-m_2-\frac{2k}{p}=m_1,$$

所以只有一对斜率m_1和m_2确定的特殊方向，才是每一个外接椭圆的共轭方向.

引理2 椭圆的两条共轭直径所成的锐角，当它们相等时达到最小值，这时最小角一半的正切等于该椭圆的半短轴长与半长轴长之比$b:a$.

设椭圆的两条共轭直径与其长轴所成的角分别为φ与$\pi-\theta$(φ、θ为锐角)，则$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}(\pi-\theta)=-\frac{b^2}{a^2}$，即$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta=\frac{b^2}{a^2}$. 因为两条共轭直径所成的锐角$\Omega=\varphi+\theta$，于是

$$\operatorname{tg}\Omega=\operatorname{tg}(\varphi+\theta)=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}=\frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\theta}{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

所以当$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\theta$，即$\varphi=\theta$(这时两条共轭直径相等)时取得最小值，故当$\varphi=\theta$时$\Omega$达到最小角$\omega$，而$\omega=2\varphi$，因此

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}.$$

现在可来解开始所提出的问题了. 由于椭圆与圆接近的程度

或与圆的偏差，可由半短轴长和半长轴长之比 $b:a$ 与 1 接近的程度来刻画，据引理 2 该比值为 $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$，而 ω 是由共轭直径组成的最小的角，所以最接近圆的或与圆偏差最小的外接椭圆是一个 ω 达到最大可能值的椭圆，这样的椭圆它的两条共轭直径相等，而其斜率由⑦式确定. 如果 ω_0 是这椭圆两条相等共轭直径之间的角，那么对于其他每一个外接椭圆，ω_0 是两条不等共轭直径(具有斜率 m_1 和 m_2)之间的角，它大于这样的椭圆的两条相等共轭直径之间的角，所以 $\omega_{max}=\omega_0$. 因此，一个四边形的外接椭圆中，与圆偏差最小的是其和所有外接椭圆具有共同的共轭方向的那个相等共轭直径的椭圆. 而这特殊方向的斜率由二次方程 $hpm^2+2hkm+kq=0$ 确定.

参考文献 [13, pp. 256～261].

(郑君文)

(七) 高次曲线

蔓叶线(Cissoid)　设 OA 是圆 Q 的直径，过 O 引射线分别与圆 Q 和圆 Q 的切线 AT 相交于 B 和 C，在射线 OC 上取一点 M，使 $|OM|=|BC|$，则点 M 的轨迹称为蔓叶线. 试求这曲线的轨迹方程.

该曲线是由古希腊 Diocles(约公元前 2 世纪)为了解决立方倍积问题而发现的. 公元前 1 世纪由 Geminu 给它命名为蔓叶线，这是因其形状似常青藤的缘故. 17 世纪以后，该曲线被许多数学工作者研究过，如惠更斯、牛顿等都对它作过深入的研究.

以 O 为原点，直径 OA 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系，设 $\odot Q$ 的半径为 a，点 M 的坐标为 (x, y)，点 B 的坐标为 (x_1, y_1)，$AC=t$，则

$$x=2a-x_1,\ y=t-y_1. \qquad ①$$

又点 B 在 $\odot Q$ 上，故有

$$(x_1-a)^2+y_1^2=a^2. \qquad ②$$

因为 O、B、C 三点在一直线上，所以

$$\frac{y}{x}=\frac{t}{2a}, \text{即 } t=\frac{2ay}{x}. \qquad ③$$

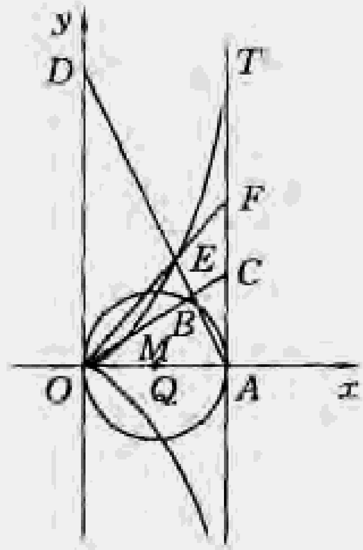


图 4-368

将 ① 和 ③ 代入 ②，消去 t、x_1、y_1，得

$$(a-x)^2+\left(\frac{2a}{x}-1\right)^2y^2=a^2,$$

即 $(2a-x)[(2a-x)\cdot y^2-x^3]=0$.

但 $x\neq 2a$，因此所求曲线的直角坐标方程为

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x},$$

而 $x=2a$ 是它的渐近线.

取 O 为极点，射线 OA 为极轴，则该曲线的极坐标方程为

$$\rho=2a\sin\theta\operatorname{tg}\theta.$$

若在正 y 轴上截取 $OD=2\cdot OA$，连结 AD 交蔓叶线于 E，再连结 OE 并延长交 AT 于 F，则

$$AF^3=2\cdot OA^3, \text{即 } AF=\sqrt[3]{2}\cdot OA.$$

这样就解决了立方倍积问题. 至于为什么有 $AF^3=2\cdot OA^3$，这是因为直线 AD 的方程为

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{4a}=1,$$

设它与蔓叶线 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}\left(\text{即 }\dfrac{y^3}{x^3}=\dfrac{y}{2a-x}\right)$ 交于点 $E(\lambda,\mu)$，于是直线 OE 的方程为 $y=\dfrac{\mu}{\lambda}x$，它和直线 AT 的交点 F 的纵坐标 y

(即 AF)为 $y=\frac{\mu}{\lambda}\cdot 2a$. 即

$$AF^3=\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3\cdot 8a^3.$$

而点 E 在蔓叶线上又在直线 AD 上,所以有 $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3=\frac{\mu}{2a-\lambda}$ 和 $\frac{\lambda}{2a}+\frac{\mu}{4a}=1$, 因此消去 λ、μ,得 $AF^3=16a^3=2\cdot OA^3$.

把上述的曲线加以推广,就得到所谓一般的蔓叶线. 设 C_1 与 C_2 是两条给定的曲线,O 是一个定点,过 O 引一射线 OP 各交曲线 C_1 与 C_2 于 M_1 与 M_2,在 OP 上取一点 M,使 $OM=OM_2-OM_1=M_1M_2$, 则点 M 的轨迹就是一般的蔓叶线. 可见 Diocles 发现的蔓叶线是它的特殊情形,这种特殊的蔓叶线称为 Diocles 蔓叶线.

参考文献　[24, p. 360], [20, pp. 120～121], [17, pp. 54～56].

(郑君文)

卡西尼卵形线(ovals of Cassini)　到两定点 F 和 F' 的距离之积为一定值 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹称为卡西尼卵形线,试求该轨迹方程.

该曲线是意大利人卡西尼于 1680 年引进的,但直到 1749 年才由他的儿子 Jecques Cassini (1677～1756) 在《天文学初步》(*Eléments d'astronomie*)上发表.

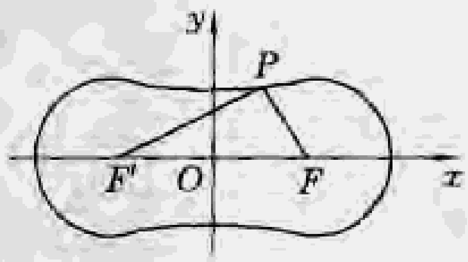


图 4-369

以线段 FF' 所在直线为 x 轴,它的垂直平分线为 y 轴,建立直角坐标系,设 F 与 F' 的坐标为 $(c, 0)$ 与 $(-c, 0)$, $P(x, y)$ 为满足条件的任意一点,则由 $|PF|\cdot|PF'|=a^2$ 得

$$[(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2]=a^4,$$

即
$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)+c^4-a^4=0,$$

这就是卡西尼卵形线的直角坐标方程，它是四次曲线.

取线段 $F'F$ 的中点为极点，射线 OF 为极轴，建立极坐标系，则

$$\rho^4-2\rho^2c^2\cos 2\theta+c^4-a^4=0,$$

这就是卡西尼卵形线的极坐标方程.

卡西尼卵形线的形式由 a 与 c 的大小关系决定，当 $a>c$ 时为图 4-369 所示的没有自交点的卵形线；当 $a<c$ 时，卵形线就分为两支如图 4-370；当 $a=c$ 时，就得到 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$，如图 4-371，这就是伯努利双纽线(lemniscate of Bernoulli)的直角坐标方程和极坐标方程，可见伯努利双纽线是卡西尼卵形线的特例.

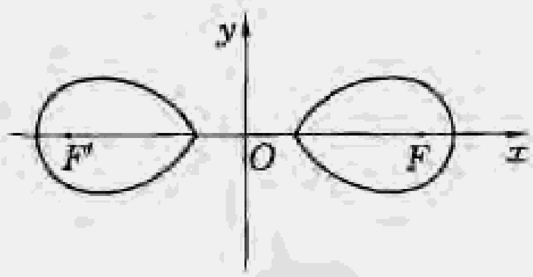


图 4-370

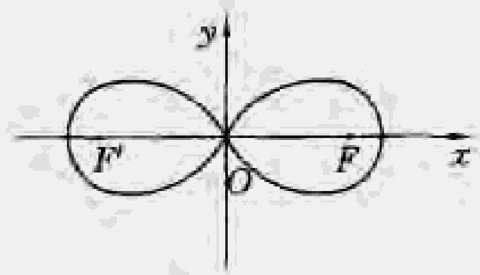


图 4-371

伯努利双纽线是由雅各布·伯努利于 1694 年在《教师学报》上发表的论文中引进的，并讨论了它的性质. 伯努利双纽线也是由等轴双曲线的中心向它的切线引垂线，所得垂足的轨迹. 这曲线在 18 世纪起到过相当大的作用.

参考文献　[24, p. 374], [18, pp. 21～22], [2, pp. 17～18], [20, p. 344].

（郑君文）

伯努利双纽线(lemniscate of Bernoulli)　见卡西尼卵形线.

蚌线(conchoid)　过一定直线 l 外一定点 O 引直线 m,设它与直线 l 相交于点 P,则在直线 m 上距点 P 为定长 b 的点 M 的轨迹叫做蚌线,试求此曲线的方程.

该曲线是古希腊 Nicomedes(约公元前 3 世纪)发现的,并利用这曲线来三等分角和解决立方倍积问题. 他还发明了画蚌线的仪器,这样除圆外,蚌线成为人们所知道的最早能用仪器绘出的曲线. 到了 16 世纪后期,人们再次展开对蚌线的研究,韦达在《几何补论》(*Supplementum geometriae*, 1593)中引入所谓"Nicomedes 引理":"设两直线 x、y 相交成定角,在这角外有一点 O,则可通过点 O 作直线,使它被 x、y 所截取的线段等于给定的长 b"(作法只要以直线 x、y 之一和定点 O 及定长 b 作出蚌线,由它与另一直线的交点,就可作出所求作的直线),以其作为公设,可以解决可导致三、四次方程的问题,包括正七边形的作图. 笛卡尔在《几何学》中讨论蚌线切线的作图法、费马和 Roberval 也讨论同样问题,同时注意到蚌线的两个分支. 惠更斯发现其拐点的简洁求法. 牛顿在他的《普遍算术》中,多次应用"Nicomedes 引理"解决三、四次方程的问题. 17 世纪还将蚌线推广,就是把定直线 l 换成定圆 Q,得到"圆的蚌线"(conchoid of a circle),Roberval 把它称为"帕斯卡蜗线(limacon of Pascal)",一直沿用至今(见**帕斯卡蜗线**).

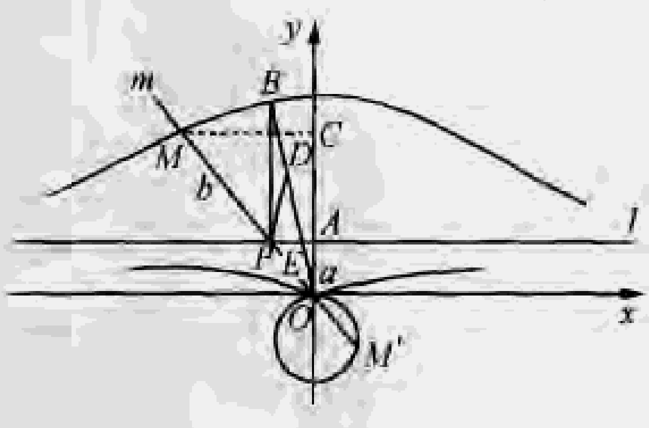


图 4-372

取定点 O 为原点，过点 O 且平行于定直线 l 的直线为 x 轴建立直角坐标系. 设过点 O 的直线 m 与直线 l 交于点 P，设在该直线上距点 P 等于定长 b 的点 M 的坐标为 (x, y)，点 O 到定直线 l 的距离为 a，点 P 和 M 在 y 轴上的射影各为 A 和 C，则 $\triangle OMC \backsim \triangle OPA$，$\therefore \dfrac{OM}{OC}=\dfrac{OP}{OA}$，即

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot a=\left(\sqrt{x^2+y^2}\pm b\right)\cdot y,$$

也即
$$(x^2+y^2)(y-a)^2=b^2y^2,$$

这就是蚌线的直角坐标方程.

如果以 O 为极点，Ox 为极轴建立极坐标系，则蚌线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{a}{\sin\theta}\pm b.$$

因为 $\rho=a\csc\theta+b$ 与 $\rho=a\csc\theta-b$ 表示同一条曲线，所以所求曲线方程为 $\rho=a\csc\theta+b$.

蚌线分两支，一支处于和定点 O 关于定直线 l 的异侧，另一支处于和定点 O 关于定直线 l 的同侧，这两支都以直线 $y=a$ 为其渐近线.

蚌线的形状依 a 与 b 之间的大小关系而定，图 4-372 为 $a<b$ 的情形，当 $a=b$ 和 $a>b$ 的情形如图 4-373 所示.



图 4-373

利用蚌线就可以三等分任意角．如三等分$\angle AOP$（如图 4－372），可取角的顶点O为定点，过角两边上的点A和P的直线为定直线l，$b=2OP$，作出与点O处于直线l异侧的一支蚌线，再过点P作$PB \parallel OA$，交这支蚌线于B，连结OB，交直线l于E，则$\angle AOB=\frac{1}{3}\angle AOP$．事实上，作直角三角形$BPE$斜边上的中线$PD$，则$\angle AOB=\angle OBP=\angle BPD$，而$\angle DOP=\angle PDO=2\angle AOB$，可见

$$\angle AOB=\frac{1}{2}\angle DOP=\frac{1}{3}\angle AOP.$$

参考文献　[17，p. 132]，[1，pp. 188～192]，[7，pp. 56～58]．

（郑君文）

帕斯卡蜗线（Limacon of Pascal）　O是定圆Q上的定点，P是这圆上的任意一点，在OP或其延长线上取一点M，使PM等于定长b，则M点的轨迹叫做帕斯卡蜗线，求这曲线的轨迹方程．

该曲线是由著名数学家B．帕斯卡的父亲E．帕斯卡（Etienne Pascal）发现的，Roberval首称它为帕斯卡蜗线，它也是蚌线的推广（见**蚌线**）．该曲线的特殊情形，即b等于定圆直径时称为心脏线（cardioid），心脏线这一名称是由Castillon于1741年给它命名的，而La Hire已于1708年计算了它的长度．

设定圆Q的半径为a，OQ与圆Q交于另一点A．取点O为极点，射线OQ为极轴建立极坐标系，设点M的极坐标为(ρ,θ)，则

$$\rho=2a\cos\theta\pm b,$$

这就是所求曲线的极坐标方程．把上述方程两边同乘以ρ，得

$$\rho^2=2a\rho\cos\theta\pm b\rho,$$

化成直角坐标方程为

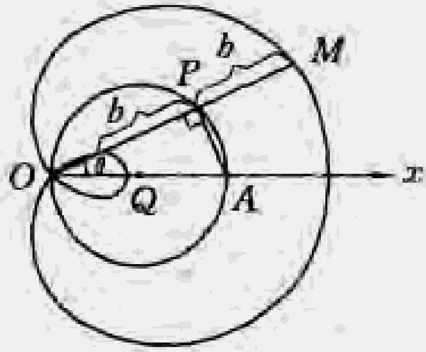


图 4-374

$$x^2+y^2=2ax\pm b\sqrt{x^2+y^2},$$

即 $(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$，
它是一条四次曲线.

该曲线的特殊情形有：

(1) $b=2a$ 时称为心脏线，它的极坐标方程为 $\rho=2a(\cos\theta\pm1)$，直角坐标方程为 $(x^2+y^2-2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$.

(2) $b=a$ 时称为三等分角线(trisectrix)，它可以容易地用来三等分任意角.

如果取圆锥曲线 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$ 的焦点为反演中心，任取 k^2 为反演幂，则由 $\rho\rho'=k^2$ 得

$$\rho'=k^2\cdot\frac{1-e\cos\theta}{ep}=\frac{k^2}{ep}(1-e\cos\theta),$$

因此，以圆锥曲线的焦点为反演中心，施行反演变换，则该圆锥曲线的反形(反像)是帕斯卡蜗线，特别地抛物线的反形(反像)是心脏线.

参考文献 [24, pp. 375~377], [20, p. 123].

(郑君文)

心脏线(Cardioid) 见帕斯卡蜗线.

摆线(Cycloid) 一半径为 a 的圆沿着一条定直线滚动时，这圆周上一个定点 M 的轨迹叫做摆线或旋轮线，这圆滚动一周就得到摆线的一拱，它与定直线间的面积为 $3\pi a^2$.

摆线等在古希腊就已知道，托勒密曾应用它们来描述太空中行星的运动. 1615 年，Mersenne 首次以“点的轨迹”来定义摆线(与今相仿). 1634 年 Roberval 求出了摆线一拱下的面积，之后 Roberval 和

Christopher Wren (1632～1723)算出了它一拱的弧长. 帕斯卡最后的一部数学著作是关于摆线的内容,他对摆线作了更深入的研究. 1673 年,惠更斯在他的《钟表的摆动》一书中,证明倒旋轮线的等时性,即一个质点,不论它从拱的哪一点开始下落,总以同样长的时间达到拱的底;旋轮线的渐屈线是同样大小的另一条旋轮线;在旋轮线摆中,摆动周期与摆动幅度大小无关,而对于单摆的摆动周期来说,这只是近似的. 正由于旋轮线摆作一次完全摆动所用的时间完全相同,所以摆线也叫等时曲线. 约翰·伯努利在 1696 年 6 月号的《教师学报》上提出了最速降线问题:"设不在同一铅直线上的两点 A 和 B,使一质点只在重力作用下从 A 点沿一曲线滑向 B 点,而所用的时间最短(摩擦力和空气阻力不计)."对这个问题,牛顿、莱布尼茨、洛必达、雅格布·伯努利和约翰·伯努利等都得到了正确的解答,他们虽解法各异,但结论都相同,即这条曲线是旋轮线. 因此旋轮线是最速降线.

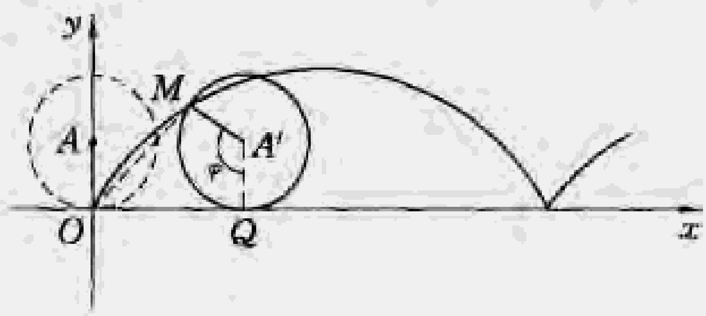


图 4－375

以定直线为 x 轴,取点 M 在 x 轴上时的一个位置(这时动圆处于圆 A)为原点 O 建立直角坐标系. 当圆滚动到任一位置圆 A' 时,它与 x 轴相切于点 Q,设此时 M 点的坐标为(x, y),则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA'}+\overrightarrow{A'M},$$

$$\therefore \begin{cases} x=(\overrightarrow{OM})_{ox}=(\overrightarrow{OQ})_{ox}+(\overrightarrow{QA'})_{ox}+(\overrightarrow{A'M})_{ox}, \\ y=(\overrightarrow{OM})_{oy}=(\overrightarrow{OQ})_{oy}+(\overrightarrow{QA'})_{oy}+(\overrightarrow{A'M})_{oy}. \end{cases}$$

因为$\overrightarrow{AO}$与 x 轴成 $-\frac{\pi}{2}$ 角,圆滚动到$\odot A'$时,设它按顺时针

旋转了 φ 角，这时 $\overrightarrow{A'M}$ 与 x 轴成 $\left(-\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$ 角，而 OQ 等于 $\overset{\frown}{QM}$ 的长，所以有

$$\begin{cases} x = a\varphi + 0 + a\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right) = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = 0 + a + a\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right) = a(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

这就是摆线的参数方程，其中 φ 是参数.

一半径为 a 的圆，沿着一条定直线滚动，这圆内（外）一定点 M 的轨迹称为短（长）幅摆线或旋轮线. 设点 M 到圆心的距离为 l，则其轨迹方程为

$$\begin{cases} x = a\varphi - l\sin\varphi, \\ y = a - l\cos\varphi. \end{cases}$$

当 $l = a$ 时为摆线；当 $l < a$ 时为短幅摆线（如图 4－376 左图）；当 $l > a$ 时为长幅摆线（如图 4－376 右图）.

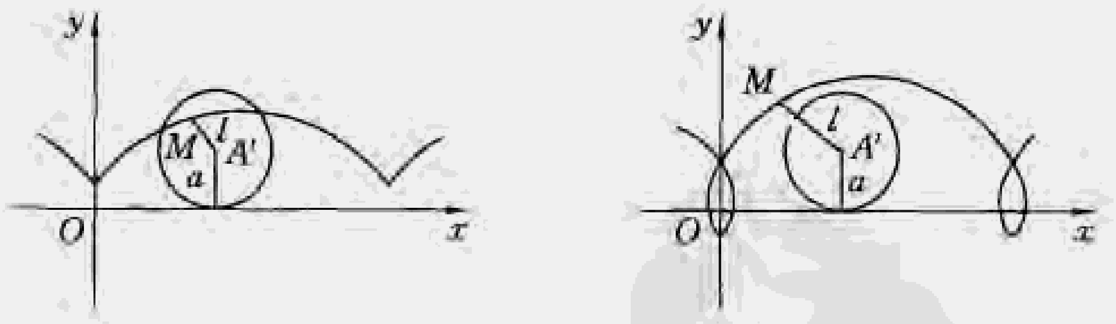


图 4－376

下面介绍求摆线一拱与定直线之间的面积的一种方法（见 Williamson 的 *Integral Caulculus*, p. 187）. 设 OA' 为摆线的半拱，圆 C 的直径为 AA'，圆 O' 是过摆线上任一点 P 的动圆（点 P 到 OA 的距离记为 Δa，不妨设 $\Delta a =$

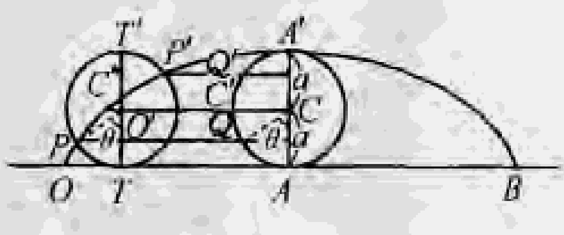


图 4－377

$\frac{a}{n}$，它切 OA 于点 T. 这里圆 O' 可看成由圆 C 以 AT 为平移向量施行平行移动而得，T 与 A、P 与 Q 为对应点，于是 $TA = PQ$，又 $\overset{\frown}{PT}$ 的长等于 OT，$\overset{\frown}{PT} = \overset{\frown}{QA}$，所以 $PQ = TA = \pi a - \overset{\frown}{PT}$ 的长.

再那样取使 $\overset{\frown}{PT} = \overset{\frown}{P'T'}$ 中的 P'，可得 $P'Q'$ 等于 $\overset{\frown}{P'T'}$ 的长，从而 $P'Q' = \overset{\frown}{PT}$ 的长，所以得到 $PQ + P'Q' = \pi a$（事实上这也可从摆线的参数方程 $x = a(\varphi - \sin\varphi)$ 得知），因此由半圆 AQA' 与摆线 $OP'A'$ 及 OA 所围成的面积 S，可分成两部分 $C''OAC'$ 的面积 S_1 与 $A'C''C'$ 的面积 S_2，而

$$S_1 = \sum(PQ \cdot \Delta a),\ S_2 = \sum(P'Q' \cdot \Delta a).$$

$$\therefore S = S_1 + S_2 = \sum(PQ + P'Q')\Delta a = \pi a \sum \Delta a = \pi a^2.$$

故所求摆线一拱与定直线间的面积为

$$\left(\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2\right) \times 2 = 3\pi a^2.$$

参考文献 [24, pp. 390～391], [2, pp. 28～29], [20, p. 313, pp. 341～342], [18, p. 44、63、302, pp. 58～59、323～324], [25, p. 207]

（郑君文）

星形线(Astroid) 定长线段 PQ 的两端点分别在互相垂直的两条固定直线上滑动，则 PQ 的包络是星形线.

包络的理论为莱布尼茨于 1692 年发表的论文中所确定，上述包络的方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 是在 1715 年莱布尼茨的书信中被发现的. 由于该曲线所具形状的缘故，1838 年根据 J. J. Hittrow 的建议，称这曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 为星形线，或根据 M. Simon 的建议，称它为星线.

取两条互相垂直的定直线为 x 轴和 y 轴建立直角坐标系，其交点 O 即为原点. 设 $PQ=a$，它滑动到任一位置 $P'Q'$，有 $P'Q'=PQ$. 再设 M 与 N 各为 PP' 与 QQ' 的中点，且 $OM=m$，$ON=n$，$P'P=2p$，$QQ'=2q$，则 $OP=m+p$，$OP'=m-p$，$OQ=n-q$，$OQ'=n+q$，

$$\therefore (m+p)^2+(n-q)^2=a^2,$$
$$(m-p)^2+(n+q)^2=a^2.$$

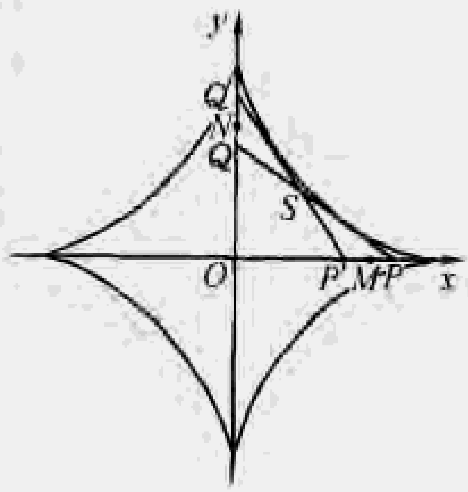


图 4－378

把上述两式相减得

$$mp=nq. \tag{1}$$

现求 PQ 与 $P'Q'$ 的交点 $S(x,y)$. 直线 PQ 与 $P'Q'$ 的方程分别为 $\frac{x}{m+p}+\frac{y}{n-q}=1$ 与 $\frac{x}{m-p}+\frac{y}{n+q}=1$，把它们相加和相减，得

$$\frac{mx}{m^2-p^2}+\frac{ny}{n^2-q^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{px}{m^2-p^2}=\frac{qy}{n^2-q^2}. \tag{3}$$

③ ÷ ①，得

$$\frac{x}{m(m^2-p^2)}=\frac{y}{n(n^2-q^2)}.$$

由上式与 ② 解得

$$x=\frac{m(m^2-p^2)}{m^2+n^2},\ y=\frac{n(n^2-q^2)}{m^2+n^2},$$

这就是交点 S 的坐标. 当点 P' 趋向于点 P，则 S 就趋向包络与 PQ 的切点，也即 S 趋向于包络上的一点，因而这时 p、q 趋于 0，m^2+n^2 趋向于 a^2，$m(m^2-p^2)$ 趋向于 OP^3，$n(n^2-q^2)$ 趋向于

OQ^3，其极限为

$$x=\frac{OP^3}{a^2},\ y=\frac{OQ^3}{a^2},$$

故 $$a^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=a^2,$$

即 $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

这就是所求的包络的方程. 如果把它化为整式方程则为

$$(a^2-x^2-y^2)^3=27a^2x^2y^2.$$

星形线是特殊的内摆线（或称圆内旋轮线）. 所谓内摆线，就是一动圆沿着与之内切的一定圆作无滑动的滚动时，该动圆上一固定点的轨迹. 求出它的方程，就可知星形线与内摆线之间的关系.

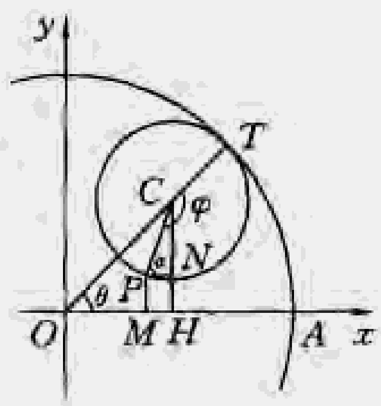


图 4－379

设半径为 b 的动圆 C 内切于半径为 a 的定圆 O $(a>b)$，当圆 C 上的固定点重合于圆 O 上的点 A 时作为开始时的位置. 现取点 O 为原点、OA 为 x 轴建立直角坐标系，设 $P(x, y)$ 为动圆 C 滚动到任一位置时这圆上固定点的坐标，T 为切点，并设 $\angle AOC=\theta$，如图 4－379，则有

$$x=OH-MH=(a-b)\cos\theta-b\cos\alpha,$$
$$y=HC-NC=(a-b)\sin\theta-b\sin\alpha.$$

因为 $\overset{\frown}{AT}$ 的长等于 $\overset{\frown}{PT}$ 的长，所以 $a\theta=b\varphi$，又 $\varphi=\theta+(\pi-\alpha)$，即有 $\alpha=\pi-\dfrac{a-b}{b}\theta$，消去 α 得

$$x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta,$$

$$y=(a-b)\sin\theta-b\sin\frac{a-b}{b}\theta,$$

这就是所求的内摆线的参数方程．如当 $a=4b$ 时，上述方程就成为

$$x=3b\cos\theta+b\cos 3\theta, y=3b\sin\theta-b\sin 3\theta,$$

化简得 $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$. 消去参数 θ，得

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

可见星形线就是定圆的半径为动圆半径 4 倍时特殊的内摆线，通常也称它为四尖内摆线．

如果记 $m=\frac{a}{b}$，则圆内旋轮线的参数方程为

$$x=b[(m-1)\cos\theta+\cos(m-1)\theta],$$
$$y=b[(m-1)\sin\theta-\sin(m-1)\theta].$$

当 $m=2$ 时，得 $x=2b\cos\theta$, $y=0$，这时内摆线变成定圆的一直径，把圆的滚动转换为直线运动．

当 $m=3$ 时，得

$$x=b(2\cos\theta+\cos 2\theta), y=b(2\sin\theta-\sin 2\theta),$$

称为三尖内摆线，因它曾被施泰纳所发现，所以也称为施泰纳三尖内摆线（参见三尖内摆线）．

当 m 为整数时，则内摆线由 m 支组成，这时当动圆绕定圆一周，就可返回原始位置，且描完 m 支；当 m 为分数时（假设 $m=\frac{p}{q}$，p、q 互质），内摆线由 p 支组成，当动圆绕定圆 q 周即可返回开始位置，并描完 p 支；当 m 为无理数时，内摆线有无穷多支，它不能返回到开始时的位置．

内摆线是动圆内切于一定圆滚动时其上一固定点的轨迹，如果这固定点在动圆外（内），就得到次摆线或长（短）幅圆内旋轮线，也就是说次摆线是一动圆沿着与之内切的定圆作无滑动的滚动，该动圆外（内）一固定点 M 的轨迹．设点 M 到动圆圆心 C 的距离为 kb ($k>1$

时点 M 在圆外，$k<1$ 时点 M 在圆内)，则其轨迹方程为

$$x=(a-b)\cos\theta+kb\cos\frac{a-b}{b}\theta,$$

$$y=(a-b)\sin\theta-kb\sin\frac{a-b}{b}\theta.$$

特殊地，当 $a=2b$，且 $k<1$，即点 M 在动圆内时，则

$$x=b(1+k)\cos\theta,\ y=b(1-k)\sin\theta,$$

消去 θ，得

$$\frac{x^2}{b^2(1+k)^2}+\frac{y^2}{b^2(1-k)^2}=1.$$

可见这时轨迹为一椭圆. 由于该轨迹为卡丹所发现，故称它为卡丹圆内旋轮线.

参考文献 [13, pp. 240～241, pp. 247～251], [24, pp. 377～378].

(郑君文)

卡丹圆内旋轮线(Hypocycloid of Cardan) 见星形线.

内摆线(Hypocycloid) 见星形线.

割圆曲线(Quadratrix) 长为 a 的线段 OQ，自初始位置 OA 绕 O 点作匀角速旋转 $\frac{\pi}{2}$，到达 OB 的位置，在相同的时间内，一线段 MN 自初始位置 OA 作匀速平移至 BC 的位置，其平移距离为 a，则 OQ 与 MN 交点 P 的轨迹叫做割圆曲线或圆积线，求其轨迹方程.

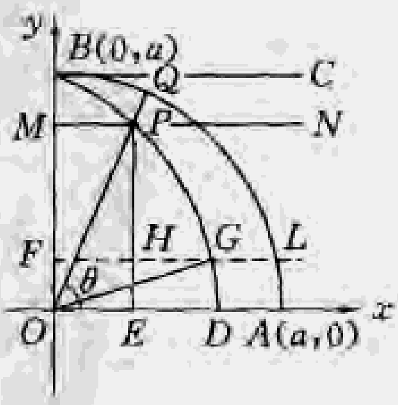


图 4-380

这曲线是古希腊数学家 Hippias(约公元前 5 世纪)为设法三等分角而发现的一种超越曲线，实际上它既能用来三等分角，也可用于化圆为方. 一般认为，

Hippias 用它来三等分角，Dinostratus（约公元前 4 世纪）或以后的几何学家利用它来解化圆为方的问题. 由于该曲线有后者的作用，故有割圆曲线或圆积线之称.

建立如图 4－380 所示的直角坐标系，并设 $P(x, y)$是合条件的任意一点，因为 OA 旋转 θ 角到 OQ 的位置所需的时间，与 OA 平移到 MN 的位置所需的时间相等，所以有 $\frac{\frac{\pi}{2}}{\theta}=\frac{a}{y}$，即 $y=\frac{2a}{\pi}\theta$. 又 $\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，于是 $y=\frac{2a}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，所以

$$y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a}\ (0<y<a),$$

这就是割圆曲线的直角坐标方程.

如果取 O 为极点，OA 为极轴，建立极坐标系，并设 $P(\rho, \theta)$为合条件的任意一点，则由 $OM=\rho\sin\theta$，得$\frac{\frac{\pi}{2}}{\theta}=\frac{a}{\rho\sin\theta}$，所以

$$\rho=\frac{2a\theta}{\pi\sin\theta}\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

这就是割圆曲线的极坐标方程.

如果要把$\angle AOQ$ 三等分，只要作出 OQ 与圆积线的交点 P，再作 $PE\perp OA$（E 为垂足），然后三等分 EP 于 H（H 是其中一个分点，$EH=\frac{1}{3}EP$），过 H 作 OA 的平行线，交圆积线于 G，连结 OG，则 $\angle AOG=\frac{1}{3}\angle AOQ$. 事实上，设 $\angle AOQ=\theta$，$\angle AOG=\varphi$，则据圆积线的定义有$\frac{\frac{\pi}{2}}{\theta}=\frac{a}{EP}$，$\frac{\frac{\pi}{2}}{\varphi}=\frac{a}{EH}$，即 $\theta=\frac{\pi\cdot EP}{2a}$，$\varphi=\frac{\pi\cdot EH}{2a}$. 又 $EH=\frac{1}{3}EP$，所以 $\varphi=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi EP}{2a}=\frac{1}{3}\theta$.

作一正方形，使它的面积等于半径为 a 的圆的面积，如果允许

使用圆积线，则是容易作出的. 因为 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}}=\dfrac{2a}{\pi}$，所以由割圆曲线的直角坐标方程知，该曲线与 x 轴交点 D 的横坐标为 $\dfrac{2a}{\pi}$，即 $OD=\dfrac{2a}{\pi}$. 这样就可以利用 OD 来解决上述作图，参见平面几何中的化圆为方问题.

参考文献 [20, pp. 107～108], [17, pp. 45～46], [8, pp. 162～163, pp. 171～173].

（郑君文）

外摆线(Epicycloid) 一动圆沿着与之外切的一定圆作无滑动的滚动，则动圆上一点的轨迹称为外摆线或圆外旋轮线. 求这曲线的方程.

A. Dürer(1471～1528)在他的著作中，曾介绍了外摆线；牛顿的名著《自然哲学之数学原理・宇宙体系》第一编第十章里给出了计算外摆线长的公式(命题 48)，同时也给出了计算内摆线长的公式(命题 49).

设半径为 b 的动圆外切于半径为 a 的定圆 O，并以动圆上的一定点重合于定圆上的点 A 时作为初始位置. 取点 O 为原点，直线 OA 为 x 轴建立直角坐标系. 设动圆滚动到任一位置圆 C 时（与定圆相切于 T），它上面的定点 P 的坐标为 (x, y)，并设 $\angle AOC=\theta$，$\angle TCP=\varphi$，由于 $\overset{\frown}{AT}$ 的长和 $\overset{\frown}{TP}$ 的长相等，所以 $a\theta=b\varphi$. 如图 4-381，有

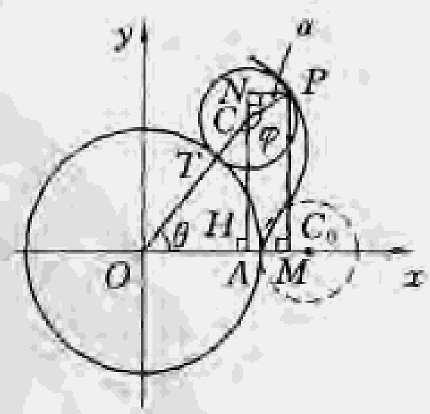


图 4-381

$$x=OH+HM=(a+b)\cos\theta+b\cos\alpha,$$

$$y = HC + CN = (a+b)\sin\theta + b\sin\alpha.$$

因为 $\varphi = \alpha + (\pi - \theta)$，所以 $\alpha = -\pi + \dfrac{a+b}{b}\theta$，因此

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta, \\ y = (a+b)\sin\theta - b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta. \end{cases}$$

这就是外摆线的参数方程. 当然，该方程也可从内摆线的参数方程中以 $-b$ 代 b 而得到.

令 $m = \dfrac{a}{b}$，则外摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = b(m+1)\cos\theta - b\cos(m+1)\theta, \\ y = b(m+1)\sin\theta - b\sin(m+1)\theta. \end{cases}$$

当 $m = 1$ 即 $b = a$ 时，得

$$\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta), \\ y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta), \end{cases}$$

平移坐标轴，把原点移到 $O'(a, 0)$，则

$$\begin{cases} x' = 2a\cos\theta(1 - \cos\theta), \\ y' = 2a\sin\theta(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

消去参数 θ，得

$$(x'^2 + y'^2 + 2ax')^2 = 4a^2(x'^2 + y'^2),$$

可见它是心脏线，就是说心脏线是外摆线的特殊情形 $(a = b)$.

当 m 为整数时，外摆线由 m 支组成，此时动圆绕定圆滚动一周后返回到初始位置，动点 P 就描完了 m 支；当 m 为分数时 $\left(m = \dfrac{p}{q}\right.$、$p$、$q$ 互质$)$，外摆线由 p 支组成，此时动圆绕定圆滚动 q

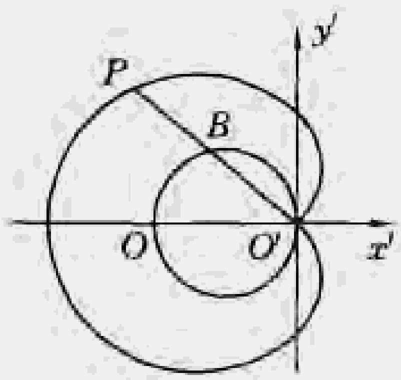


图 4－382

周后返回到初始位置，动点 P 就描完 p 支；当 m 为无理数时，外摆线由无穷多支组成，此时动点 P 不能返回到初始位置.

如果动圆沿着与它外切的定圆作无滑动的滚动，则动圆外（内）一点 P 的轨迹就叫做长（短）幅外旋轮线或外次摆线. 设点 P 到动圆圆心的距离为 λb（$\lambda>1$ 时，P 点在圆外；$\lambda<1$ 时，P 点在圆内），则

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-\lambda b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta, \\ y=(a+b)\sin\theta-\lambda b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta. \end{cases}$$

这就是外次摆线的参数方程.

如果 $a\to\infty$，则定圆就变成为一条定直线，这时动圆沿着定直线作无滑动的滚动，它上面一点的轨迹就是摆线或旋轮线了.

如 $b\to\infty$，则动圆就变成一条动直线，它与定圆相切并作无滑动滚动，这时动直线上一点的轨迹就是圆的渐开线，它的方程为

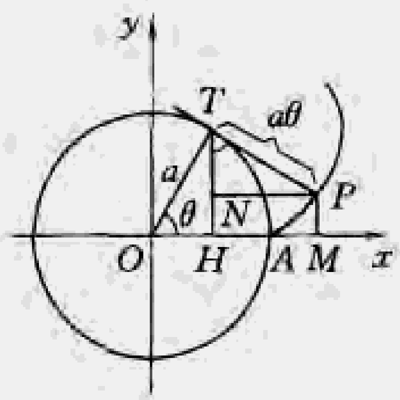


图 4－383

$$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta), \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta). \end{cases}$$

参考文献　[17, p. 272], [24, pp. 377～378], [6, pp. 156～159].

（郑君文）

三尖内摆线(Hypocycloid of three cusps) 三角形的 Simson 线的包络是三尖内摆线.

施泰纳于 1856 年发现三角形的 Simson 线的包络为三尖内摆线,所以也称之为施泰纳三尖内摆线,F. Morley 则把该曲线叫做 deltoid(三角形似的曲线).

设⊙$O(r)$是已知三角形 ABC 的外接圆,P 是该圆上的一点,过点 P 分别作这三角形边 BC、CA、AB 的垂线,D、E、F 为其垂足,则直线 DEF 就是该三角形的 Simson 线. 以 O 为原点,并任取 x 轴建立直角坐标系 xOy. 设 OA、OB、OC 和 OP 与 x 轴正向所成的交角分别为 2α、2β、2γ 和 2φ,则 A、B、C 和 P 的坐标各为 $(r\cos 2\alpha, r\sin 2\alpha)$、$(r\cos 2\beta, r\sin 2\beta)$、$(r\cos 2\gamma, r\sin 2\gamma)$ 和 $(r\cos 2\varphi, r\sin 2\varphi)$,从而直线 BC 的方程为

$$\frac{y - r\sin 2\beta}{r\sin 2\gamma - r\sin 2\beta} = \frac{x - r\cos 2\beta}{r\cos 2\gamma - r\cos 2\beta},$$

而直线 PD 的方程为

$$y - r\sin 2\varphi = -\frac{\cos 2\gamma - \cos 2\beta}{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}(x - r\cos 2\varphi).$$

把上面两个方程联立,解之得 D 的坐标(x_1, y_1):

$$x_1 = b[\cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2\varphi - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)],$$
$$y_1 = b[\sin 2\beta + \sin 2\gamma + \sin 2\varphi - \sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)].$$

这里 $b = \frac{1}{2}r$.

同样可求出 E 点的坐标(x_2, y_2):

$$x_2 = b[\cos 2\gamma + \cos 2\alpha + \cos 2\varphi - \cos(2\gamma + 2\alpha - 2\varphi)],$$
$$y_2 = b[\sin 2\gamma + \sin 2\alpha + \sin 2\varphi - \sin(2\gamma + 2\alpha - 2\varphi)].$$

据 Sylvester(1814~1894)定理(见 **Servois 定理**的推理 5)有 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, 所以 $\triangle ABC$ 的垂心 H 的坐标为

$(r\cos 2\alpha + r\cos 2\beta + r\cos 2\gamma,\ r\sin 2\alpha + r\sin 2\beta + r\sin 2\gamma)$. 又三角形九点圆的圆心为其外心与垂心连线段的中点，所以$\triangle ABC$九点圆的圆心O'的坐标(x_0, y_0)，就有$x_0 = b(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)$，$y_0 = b(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.

为简便起见，建立新坐标系$x'O'y'$，其新旧坐标间有如下关系：

$$x = x' + x_0,\ y = y' + y_0,$$

所以有

$$x_1' = x_1 - x_0 = b[\cos 2\varphi - \cos 2\alpha - \cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)],$$
$$y_1' = y_1 - y_0 = b[\sin 2\varphi - \sin 2\alpha - \sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)],$$
$$x_2' = x_2 - x_0 = b[\cos 2\varphi - \cos 2\beta - \cos(2\gamma + 2\alpha - 2\varphi)],$$
$$y_2' = y_2 - y_0 = b[\sin 2\varphi - \sin 2\beta - \sin(2\gamma + 2\alpha - 2\varphi)].$$

因此在新坐标系$x'O'y'$中，Simson线的方程为$\dfrac{y - y_1'}{y_2' - y_1'} = \dfrac{x - x_1'}{x_2' - x_1'}$，易知

$$x_2' - x_1' = 2r\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \varphi)\cos(\alpha + \beta + \gamma - \varphi),$$
$$y_2' - y_1' = 2r\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \varphi)\sin(\alpha + \beta + \gamma - \varphi).$$

再令$\theta = \alpha + \beta + \gamma - \varphi$，则Simson线方程为

$$x\sin\theta - y\cos\theta = x_1'\sin\theta - y_1'\cos\theta.$$

因为　$x_1'\sin\theta - y_1'\cos\theta$

$$\begin{aligned}
&= b(\sin\theta\cos 2\varphi - \cos\theta\sin 2\varphi) - b(\sin\theta\cos 2\alpha - \cos\theta\sin 2\alpha) - \\
&\quad b[\sin\theta\cos(2\beta + 2\gamma - 2\varphi) - \cos\theta\sin(2\beta + 2\gamma - 2\varphi)] \\
&= b\sin(\alpha + \beta + \gamma - 3\varphi) - b\sin(\beta + \gamma - \alpha - \varphi) \\
&\quad - b\sin(\alpha - \beta - \gamma + \varphi) \\
&= b\sin(\alpha + \beta + \gamma - 3\varphi),
\end{aligned}$$

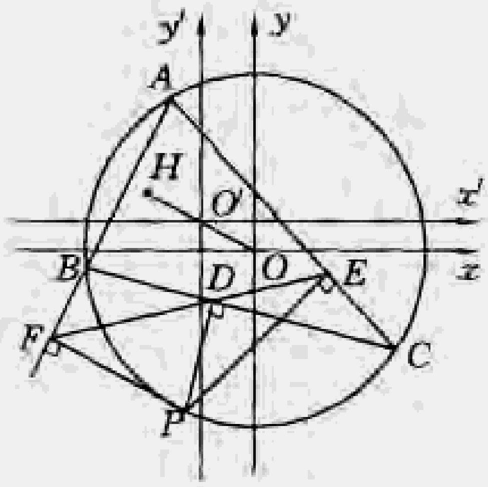


图 4-384

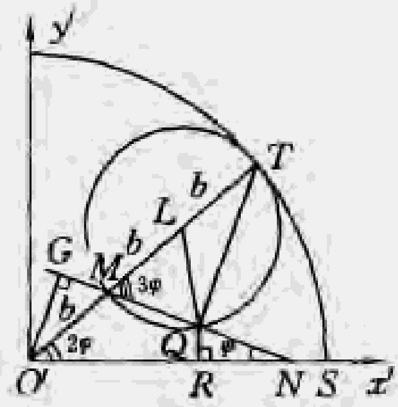


图 4-385

所以，Simson 线方程化为

$$x\sin(\alpha+\beta+\gamma-\varphi)-y\cos(\alpha+\beta+\gamma-\varphi)$$
$$=b\sin(\alpha+\beta+\gamma-3\varphi).$$

为简化上面的方程，可适当选取 x 轴，使得 α、β、γ 之和为 2π 的整数倍. 为此可选取点 O' 为原点，以点 O' 为顶点的圆周角的三等分线之一为 x' 轴，建立直角坐标系 $x'O'y'$，则 Simson 线方程为 $x\sin\varphi+y\cos\varphi=b\sin 3\varphi$.

现在来给出该方程的几何解释. 如图 4-385，作$\triangle O'MN$，使 $O'M=b$，$\angle MO'N=2\varphi$，$\angle O'NM=\varphi$，且 $O'N$ 位于 x 轴的正半轴上，则顶点 M 处的外角为 3φ. 在 MN 上任取一点 $Q(x,y)$，$x=O'R$，$y=RQ$，于是$\overrightarrow{O'R}+\overrightarrow{RQ}$在过点 O' 所引 MN 的垂线上的射影为$O'G$，即 $x\sin\varphi+y\cos\varphi=O'G$，而$\overrightarrow{O'M}$在该垂线上的射影也为$O'G$，即 $b\sin 3\varphi=O'G$，所以 $x\sin\varphi+y\cos\varphi=b\sin 3\varphi$，可见 MN 就是$\triangle ABC$ 的 Simson 线. 延长 $O'M$ 至 T，使 $MT=2b$，特别地如果取点 T 在 MN 上的射影作为 Q 点，则 Q 点在以 MT 的中点 L 为圆心、b 为半径的圆上，$\odot L(b)$与$\triangle ABC$ 的九点圆$\odot O'(b)$相切于 M，而与$\odot O'(3b)$相切于 T. 因为 $\angle TLQ=6\varphi$，所以

$\overset{\frown}{QT}$的长等于$b\cdot 6\varphi$. 设$\odot O'(3b)$与x轴相交于S,则$\overset{\frown}{ST}$的长等于$3b\cdot 2\varphi$,因此$\overset{\frown}{QT}$的长与$\overset{\frown}{ST}$的长相等. 由此可知,当半径为b的动圆,沿着$\odot O'(3b)$内切而滚动,如果动圆上一定点V的初始位置与点S重合,即滚动了弧长$6b\varphi$时,动圆恰好位于$\odot L(b)$,而定点V重合于Q点,所以Q点的轨迹就是动圆上定点V的轨迹,它是一条内摆线. 由于动圆处于$\odot L$时刻,它正围绕着瞬时旋转中心T旋转,位于点Q的V正朝向QM方向运动,QM恰好垂直于QT,这就是说,Simson 线MN与内摆线切于Q点,所以$\triangle ABC$的 Simson 线的全体为所有内摆线切线的全体. 因此$\triangle ABC$的 Simson 线的包络是一条内摆线,它的定圆圆心是$\triangle ABC$九点圆的圆心,半径等于这九点圆半径的 3 倍,而动圆的半径则等于该九点圆的半径;这条内摆线的三个尖点,是定圆切于动圆上定点时的三个点,即定圆上由$\frac{2\pi}{3}$分开的三条半径的端点,其中之一就位于x'轴正半轴上,如图 4-386. 如果令$2\varphi=\theta$,则$\triangle ABC$的 Simson 线的包络为方程

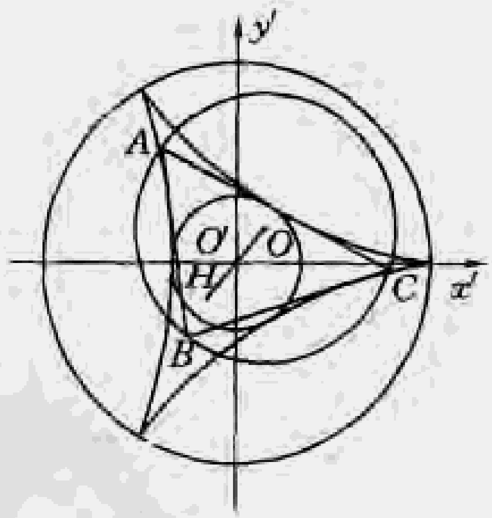


图 4-386

$$\begin{cases}x=b(2\cos\theta+\cos 2\theta),\\ y=b(2\sin\theta-\sin 2\theta).\end{cases}$$

我们也可以把该包络看做为"邻近"的$\triangle ABC$的 Simson 线交点的轨迹. 设$x\sin\varphi'+y\cos\varphi'=b\sin 3\varphi'$是与 Simson 线$x\sin\varphi+y\cos\varphi=b\sin 3\varphi$相邻的 Simson 线,后者减去前者,得

$$x(\sin\varphi-\sin\varphi')+y(\cos\varphi-\cos\varphi')$$
$$=b(\sin 3\varphi-\sin 3\varphi'),$$

化简得

$$x\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}-y\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}$$
$$=b\left(3-4\sin^2\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)\cos\frac{3}{2}(\varphi+\varphi').$$

当 $\varphi'\to\varphi$ 时，上式的极限为

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi=3b\cos 3\varphi,$$

再把它与 $x\sin\varphi+y\cos\varphi=b\sin 3\varphi$ 联立，解出 x 与 y：

$$x=b(2\cos 2\varphi+\cos 4\varphi),$$
$$y=b(2\sin 2\varphi-\sin 4\varphi).$$

令 $2\varphi=\theta$，则

$$\begin{cases}x=b(2\cos\theta+\cos 2\theta),\\ y=b(2\sin\theta-\sin 2\theta).\end{cases}$$

这就是所求 $\triangle ABC$ 的 Simson 线的包络，它是一条三尖内摆线.

参考文献 [13, pp. 251～256], [24, p. 380], [23, p. 478].

（郑君文）

半立方抛物线(Semicubical parabola) 抛物线的法线族的包络为半立方抛物线.

该曲线最早为 W. Neile(1637～1670)所研究，所以又称为 Neile 曲线. Neile 于 1659 年计算出了半立方抛物线的长度，这结果由 J. Wallis(1616～1703)在他所写的《续论》一书中公布于世.

设抛物线的方程为 $y^2=4ax$，它上面一点 P 的坐标为 $(at^2, 2at)$，则过 P 点的切线方程为 $ty=x+at^2$，而其法线方程为

$$y-2at=-t(x-at^2). \quad ①$$

对①关于 t 求导数，得 $3at^2+2a-x=0$，

所以
$$t^2=\frac{x-2a}{3a}. \quad ②$$

把②代入①,得

$$y=\left(2a-x+\frac{x-2a}{3}\right)t,$$

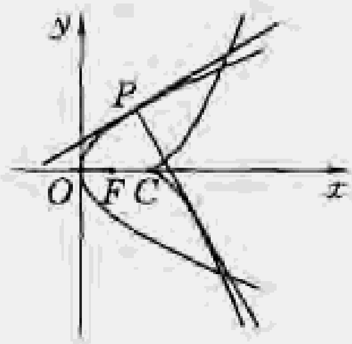


图 4-387

所以 $$t=\frac{3y}{2(2a-x)}.\qquad ③$$

由②、③消去 t,得

$$\frac{9y^2}{4(2a-x)^2}=\frac{x-2a}{3a},$$

即 $27ay^2=4(x-2a)^3$,这就是所求的包络方程,它是一条半立方抛物线,$C(2a,0)$是这曲线的尖点.

上述是运用导数来求包络的,如果利用极限也可求出抛物线上法线族的包络,这时可把它看成为抛物线上"邻近"的法线交点的轨迹.设在抛物线 $y^2=4ax$ 上,点 $P'(at'^2,2at')$是点 $P(at^2,2at)$相邻近的点,它们的法线方程分别为

$$y-2at=-t(x-at^2),\qquad ④$$

与 $$y-2at'=-t'(x-at'^2).\qquad ⑤$$

由⑤-④,得 $2a(t-t')=x(t-t')-a(t^3-t'^3)$,所以

$$x=a(t^2+tt'+t'^2)+2a,$$
$$y=-at^2t'-at'^3.$$

当 t' 趋于 t 时,x 和 y 分别以 $3at^2+2a$ 和 $-2at^3$ 为其极限,我们仍记为 $x=3at^2+2a$ 和 $y=-2at^3$,于是消去 t 得

$$27ay^2=4(x-2a)^3,$$

这就是所求抛物线上法线族包络的方程.

参考文献 [24,p.390],[18,p.63],[17,p.111].

(郝君文)

阿基米德螺线(Spiral of Archimedes) 一条射线绕着它的端点

作匀速转动,同时有一动点从端点出发沿着该直线做匀速直线运动,那么这动点的轨迹叫做阿基米德螺线.射线开始时的位置称为初始线;端点为圆心,以转动一圈末时动点到端点的距离为半径的圆称为第一圆.求其轨迹方程和转动第一圈所产生的螺线与初始线所围成的面积.

阿基米德著有《论螺线》一书,他在该书中定义了螺线(现称为阿基米德螺线),并在其命题 24 中,证明了转动第一圈形成的螺线与初始线所围成的面积,等于第一圆面积的三分之一.据说阿基米德曾用他得到的螺线解决"化圆为方"的问题.

以初始线 OA 为极轴,取端点 O 为原点建立极坐标系.设射线 l 绕 O 点转动的匀角速度为 ω,动点 M 沿着射线 l 运动的线速度为 v,经过时间 t,点 M 的位置为(ρ,θ),则据定义得

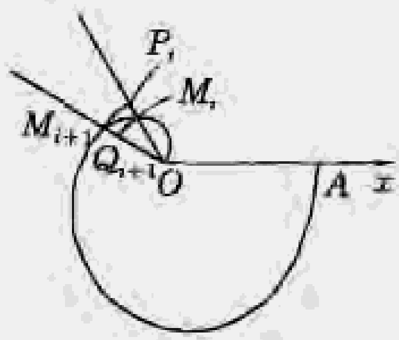


图 4-388

$$\begin{cases}\rho = vt,\\ \theta = \omega t.\end{cases}$$

这就是所求轨迹的极坐标参数方程.消去 t,得

$$\rho = a\theta.$$

其中 $a = \dfrac{v}{\omega}$ 为常数,它就是阿基米德螺线的极坐标方程.

绕 O 点转动一圈得圆周角 2π,现把它分为 n 等份,每一等份为 $\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{n}$,相应地就将转动第一圈形成的螺线与初始线所围成的面积 S 分成 n 个部分,在每一部分内作螺线的内接和外接扇形,如在第 i 部分,内接扇形为 OM_iQ_{i+1},外接扇形为 OP_iM_{i+1}.设所有内接扇形的面积之和为 S_n,所有外接扇形的面积之和为 S_n',则 $S_n < S < S_n'$.据扇形面积公式,得内接扇形 OM_iQ_{i+1} 的面积为

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot i\cdot a}{n}\right)^2\cdot\frac{2\pi}{n}=\frac{4\pi^3a^2}{n^3}\cdot i^2,$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{4\pi^3a^2}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{2\pi^3a^2}{3}\cdot\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}.$$

同样可得

$$S_n'=\frac{4\pi^3a^2}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+n^2]$$

$$=\frac{2\pi^3a^2}{3}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，S_n 与 S_n' 的极限就是 S，

$$\therefore S=\frac{4\pi^3a^2}{3}.$$

因为第一圆半径 $OA=2\pi a$，它的面积为 $\pi\cdot(2\pi a)^2=4\pi^3a^2$，所以转动一圈所形成螺线与初始线所围成的面积为第一圆面积的三分之一.

作一正方形，使它的面积等于半径为 a 的圆面积，即所谓化圆为方问题，如果利用阿基米德螺线 $\rho=a\theta$，是很容易作出的.

以 O 为圆心、a 为半径作圆，交初始线于 P. 在螺线上任取一点 $M(\rho,\theta)$，连结 OM 交圆于 Q，则线段 OM 的长等于 $\overset{\frown}{PQ}$ 的长，它们都等于 $a\theta$. 当取 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，则 ON 的长等于圆的周长的 $\frac{1}{4}$. 因为圆的面积 A 等于其半径与圆周长的乘积的一半，所以

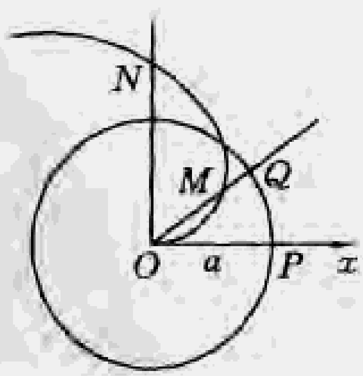


图 4－389

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(4ON)=2a\cdot ON,$$

因此所求正方形的边长为 $2a$ 与 ON 的比例中项，即已知圆的直径与垂直于 OP 时的螺线的极径的比例中项，而比例中项是很容易作出的.

利用阿基米德螺线也可以等分任意角$\angle POQ$. 设 OQ 与螺线交于 M，并三等分线段 OM，设其分点为 O_1 和 O_2，然后以 O 为圆心分别以 OQ_1 和 OQ_2 为半径画圆，各交螺线于 P_1 和 P_2，则 OP_1 和 OP_2 就三等分$\angle POQ$(图略).

参考文献 [17, pp. 128～129], [1, pp. 146～147], [20, pp. 108～109].

（郑君文）

空间部分

Serret 定理(Serret's theorem) 直线 g 分别交四面体 $ABCD$ 的面(或所在平面)于 A'、B'、C'、D'，则线段 AA'、BB'、CC'、DD' 的四个中点共面.

该定理是法国数学家 J. A. Serret (1819～1885)给出的，它实为平面几何中牛顿线在空间的推广.

以四面体 $ABCD$ 的 D 为原点，DA、DB、DC 为 x 轴、y 轴、z 轴建立坐标系，则点 A、B、C 的坐标各为 $(a,0,0)$、$(0,b,0)$、$(0,0,c)$.

设直线 g 的方程为

$$\frac{x-p}{l}=\frac{y-q}{m}=\frac{z-r}{n}, \qquad ①$$

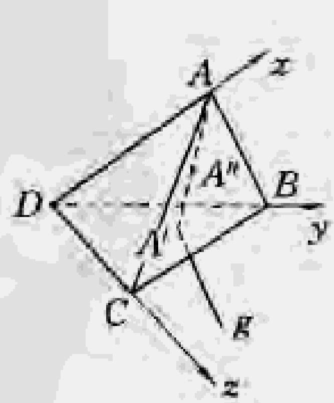


图 4-390

则它与平面 BCD、CAD、ABD 的交点分别为 $A'\left(0,q-\frac{mp}{l},r-\frac{np}{l}\right)$、$B'\left(p-\frac{lq}{m},0,r-\frac{nq}{m}\right)$、$C'\left(p-\frac{lr}{n},q-\frac{mr}{n},0\right)$.

平面 ABC 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，设①式的比值为 t，则平面 ABC 与直线 g 的交点 D' 的坐标可表为 $(p+lt,q+mt,r+nt)$，这里 t 需满足

$$\frac{p+lt}{a}+\frac{q+mt}{b}+\frac{r+nt}{c}=1. \qquad ②$$

设 A''、B''、C''、D''各是线段 AA'、BB'、CC'、DD'的中点，则它们的坐标各为

$$A''\left(\frac{a}{2},\frac{q}{2}-\frac{mp}{2l},\frac{r}{2}-\frac{np}{2l}\right),$$

$$B''\left(\frac{p}{2}-\frac{lq}{2m},\frac{b}{2},\frac{r}{2}-\frac{nq}{2m}\right),$$

$$C''\left(\frac{p}{2}-\frac{lr}{2n},\frac{q}{2}-\frac{mr}{2n},\frac{c}{2}\right),$$

$$D''\left(\frac{p}{2}+\frac{lt}{2},\frac{q}{2}+\frac{mt}{2},\frac{r}{2}+\frac{nt}{2}\right).$$

所以要证明 A''、B''、C''、D''四点共面，只要证明下面行列式为零.

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & q-\frac{mp}{l} & r-\frac{np}{l} & 1 \\ p-\frac{lq}{m} & b & r-\frac{nq}{m} & 1 \\ p-\frac{lr}{n} & q-\frac{mr}{n} & c & 1 \\ p+lt & q+mt & r+nt & 1 \end{vmatrix}=0.$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & q-\frac{mp}{l} & r-\frac{np}{l} & 1 \\ p-a-\frac{lq}{m} & b-q+\frac{mp}{l} & n\left(\frac{p}{l}-\frac{q}{m}\right) & 0 \\ p-a-\frac{lr}{n} & m\left(\frac{p}{l}-\frac{r}{n}\right) & c-r+\frac{np}{l} & 0 \\ p-a+lt & m\left(t+\frac{p}{l}\right) & n\left(t+\frac{p}{l}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=lmn\begin{vmatrix} \frac{p-a}{l}-\frac{q}{m} & \frac{b-q}{m}+\frac{p}{l} & \frac{p}{l}-\frac{q}{m} \\ \frac{p-a}{l}-\frac{r}{n} & \frac{p}{l}-\frac{r}{n} & \frac{c-r}{n}+\frac{p}{l} \\ \frac{p-a}{l}+t & t+\frac{p}{l} & t+\frac{p}{l} \end{vmatrix}$$

$$=lmn\begin{vmatrix} -\frac{a}{l} & \frac{b}{m} & \frac{p}{l}-\frac{q}{m} \\ -\frac{a}{l}-\frac{c}{n} & -\frac{c}{n} & \frac{c-r}{n}+\frac{p}{l} \\ -\frac{a}{l} & 0 & t+\frac{p}{l} \end{vmatrix}$$

$$=lmn\begin{vmatrix} 0 & \frac{b}{m} & -\left(t+\frac{q}{m}\right) \\ -\frac{c}{n} & -\frac{c}{n} & \frac{c-r}{n}-t \\ -\frac{a}{l} & 0 & t+\frac{p}{l} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & b & -(q+mt) \\ -c & -c & c-(r+nt) \\ -a & 0 & p+lt \end{vmatrix}$$

$$=-ab[c-(r+nt)]+ca(q+mt)+bc(p+lt)$$

$$= -abc + abc\left(\frac{p+lt}{a} + \frac{q+mt}{b} + \frac{r+nt}{c}\right).$$

由②可知$\triangle=0$，所以线段AA'、BB'、CC'、DD'的四个中点共面.

参考文献 [23，pp.134～135].

（郑君文）

麦比乌斯定理(Möbius' theorem) 设A、B、C、D、E、F为空间的六个点，$(ABDF)$表示由$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FD}$为棱组成的平行六面体的有向面积(其他仿此)，则

$$(ABDF)(CDEF)+(BCDF)(ADEF)$$
$$+(CADF)(BDEF)=0.$$

该定理是麦比乌斯于1827年得到的.

取F为原点，设$\overrightarrow{FA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{FB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{FC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{FD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{FE}=\vec{e}$，则据双重向量积有

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d},$$

和 $$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}+(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b},$$

于是得 $$[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot(\vec{d}\times\vec{e})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{d},\vec{e})$$ 和

$$[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot(\vec{d}\times\vec{e})$$
$$=-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})(\vec{a},\vec{d},\vec{e})+(\vec{a},\vec{c},\vec{d})(\vec{b},\vec{d},\vec{e}).$$

因为后两个等式的左边相同，所以它们的右边必相等.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{d},\vec{e})$$
$$=-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})(\vec{a},\vec{d},\vec{e})+(\vec{a},\vec{c},\vec{d})(\vec{b},\vec{d},\vec{e}),$$

即 $$(\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{d},\vec{e})+(\vec{b},\vec{c},\vec{d})(\vec{a},\vec{d},\vec{e})-(\vec{a},\vec{c},\vec{d})(\vec{b},\vec{d},\vec{e})$$
$$=0.$$

注意到三向量的混合积$(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$，就等于以$\overrightarrow{FB}$、$\overrightarrow{FC}$、$\overrightarrow{FD}$为棱组成的平行六面体的有向体积，也就是$(\vec{b},\vec{c},\vec{d})=(BCDF)$，其余仿此.

又 $(\vec{a},\vec{c},\vec{d})=-(\vec{c},\vec{a},\vec{d})$，所以

$$(ABDF)(CDEF)+(BCDF)(ADEF)+(CADF)(BDEF)=0.$$

参考文献 [23,p.146].

（郑君文）

拉格朗日定理(Lagrange's theorem) 设 A_i $(i=1,2,3,4,5)$ 是空间五个点，$A_iA_j=d_{ij}$ 为点 A_i 与点 A_j 间的距离，则

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & d_{15}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & d_{45}^2 & 1 \\ d_{51}^2 & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

该定理是拉格朗日发现的.下面的证明为凯莱所给出，见 *Cambridge Math. Journ.* 2 (1841)和 *Collected Math. papers*1, *p.*1.

设(x_i,y_i,z_i)是五个点 A_i 的直角坐标，两个矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 0 \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

与 $$\begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & -2x_5 & 0 \\ -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & -2y_4 & -2y_5 & 0 \\ -2z_1 & -2z_2 & -2z_3 & -2z_4 & -2z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

相乘，它的行列式

$$\begin{vmatrix} -2(x_1^2+y_1^2+z_1^2) & -2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) & \cdots & -2(x_1x_5+y_1y_5+z_1z_5) & 1 \\ -2(x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1) & -2(x_2^2+y_2^2+z_2^2) & \cdots & -2(x_2x_5+y_2y_5+z_2z_5) & 1 \\ -2(x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1) & -2(x_3x_2+y_3y_2+z_3z_2) & \cdots & -2(x_3x_5+y_3y_5+z_3z_5) & 1 \\ -2(x_4x_1+y_4y_1+z_4z_1) & -2(x_4x_2+y_4y_2+z_4z_2) & \cdots & -2(x_4x_5+y_4y_5+z_4z_5) & 1 \\ -2(x_5x_1+y_5y_1+z_5z_1) & -2(x_5x_2+y_5y_2+z_5z_2) & \cdots & -2(x_5^2+y_5^2+z_5^2) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

把最后一行乘以 $(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$ 加到第 i 行，同时将最后一列乘以 $(x_j^2+y_j^2+z_j^2)$ 加到第 j 列，则得

$$(x_i^2+y_i^2+z_i^2)+(x_j^2+y_j^2+z_j^2)-2(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)$$
$$=(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2=d_{ij}^2,$$

于是把全部元素都换成这样的形式，就获得所要证的结果.

参考文献 [23，pp. 248～249].

（郑君文）

蒙日定理（Monge's theorem） 在单叶双曲面或双曲抛物面中，同族的直母线不相交，异族的直母线必相交.

蒙日证明了单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面，且给出了上述定理，载于 Monge，Hachette，*Traité des surfaces du second degré* (1802)中.



图 4-391

把单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 写成

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

易知它有两族直母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \quad ①$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \quad ②$$

这里 λ 与 μ 是不等于零的参数.

取同族母线①中的任意两条直母线 ($\lambda_1\neq\lambda_2$)

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda_1\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda_1}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \text{与} \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda_2\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda_2}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}$$

假设它们相交于点 $P(x_0,y_0,z_0)$,则得

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left(1+\frac{y_0}{b}\right)=0,$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right)=0,$$

所以必有 $\lambda_1=\lambda_2$,这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾,所以它们不可能相交.

同样可证同族直母线②中的任意两条直母线也不相交.

任意取异族直母线①与②中的各一条直母线,则由它们组成的方程组可得

$$\begin{cases}\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right)-\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right)=0,\\[2mm] \dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)-\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right)=0,\end{cases}$$

解之,得 $\quad x=\dfrac{a(1+\lambda\mu)}{\lambda+\mu},y=\dfrac{b(\mu-\lambda)}{\lambda+\mu},z=-\dfrac{c(1-\lambda\mu)}{\lambda+\mu}$,

这就是异族直母线的交点,当 $\lambda+\mu=0$ 时,可认为交于无穷远点,

因此异族直母线必相交.

双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 的两族直母线为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\lambda,\end{cases} 与 \begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\mu\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{\mu},\end{cases}$$

其中 λ、μ 为不等于零的参数.

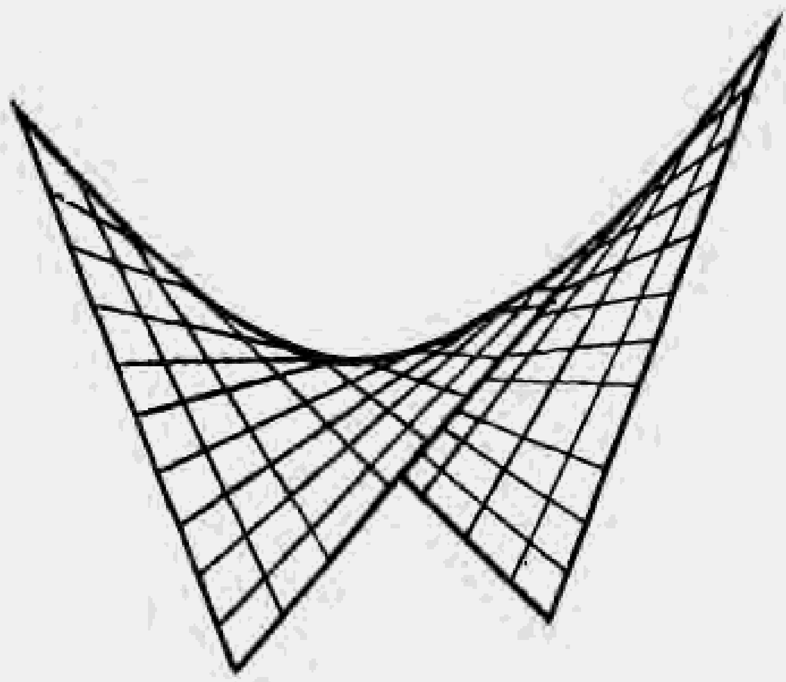


图 4－392

同样可以证明同族的任意两条直母线不相交，且这两族直母线分别平行于定平面 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$.

对任意两条异族的直母线，可求出交点

$$x=a(\lambda+\mu),y=b(\mu-\lambda),z=2\lambda\mu,$$

所以必相交.

注意，当不引进无穷远点时，单叶双曲面上异族的任意两条直母线为共面.

参考文献 [23,pp. 316～317],[18,p. 292].

（郑君文）

Dupin 定理(Dupin's theorem) 单叶双曲面或双曲抛物面的切平面,与其过切点的两条直母线所确定的平面相一致.

该定理是法国数学家 P. C. F. Dupin(1784～1873)于 1813 年得到的.

设 l、m 是相交于切点 P 的两条单叶双曲面或双曲抛物面的直母线,π 是由 l 和 m 确定的平面.与 m 同族的直母线 m_1、m_2、…它们各与 l 相交于点 M_1、M_2、…但不再和平面 π 有交于直母线 l 以外的点,否则将出现与 m 同族的两条直母线共面,这是不可能的.同样,与 l 同族的直母线 l_1、l_2、…它们除与 m 相交外,也不再和平面 π 有其他的交点.这样该曲面与平面 π 的公共点,除直母线 l、m 上的点外,再没有其他的点.又单叶双曲面与双曲抛物面的直母线都是相应曲面的切线,所以平面 π 就是该曲面的切平面,也就是说过切点的两条直母线确定的平面与其切平面相一致.

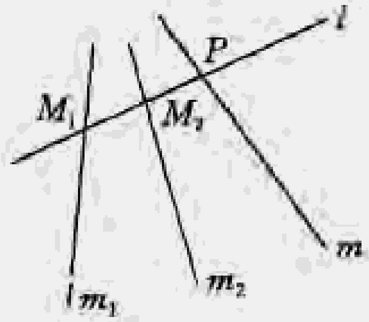


图 4-393

上述结论也可用解析法得到.设单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上的切点 P 是它的不同族的直母线 l:

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases}$$

与直母线 m: $\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases}$

的交点：$x=a\cdot\dfrac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, y=b\cdot\dfrac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}, z=-c\cdot\dfrac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}$，则过该点的切平面 α 为

$$\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}\cdot x+\frac{1}{b^2}\cdot b\cdot\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}\cdot y+\frac{1}{c^2}\cdot c\cdot\frac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}\cdot z-1=0,$$

即

$$bc(1+\lambda\mu)x+ca(\mu-\lambda)y+ab(1-\lambda\mu)z-abc(\lambda+\mu)=0.$$

要证明直线 l 与 m 确定的平面 π 与平面 α 相一致，只要证 l 与 m 全在平面 α 上就可以了，为此把直母线 l 与 m 改写成

$$\frac{x-\dfrac{a(\lambda^2+1)}{2\lambda}}{a(\lambda^2-1)}=\frac{y}{2b\lambda}=\frac{z-\dfrac{c(\lambda^2-1)}{2\lambda}}{c(\lambda^2+1)},$$

与

$$\frac{x-\dfrac{a(1+\mu^2)}{2\mu}}{a(1-\mu^2)}=\frac{y}{2b\mu}=\frac{z-\dfrac{c(\mu^2-1)}{2\mu}}{-c(\mu^2+1)},$$

据直线在平面上的充要条件，容易通过计算得知 l 和 m 全在平面 α 上.

同样可证得双曲抛物面上过切点两条直母线所确定的平面，与这切平面相一致.

参考文献　[23，p. 317].

（郑君文）

准平面和准球面(directrix plane and director sphere)　常态二次曲面三个两两互相垂直的切平面的交点的轨迹是一个平面或球面，这个平面或球面称为准平面或准球面，准球面又叫做蒙日球面.

该轨迹是蒙日于 1801 年得到的，载于 Monge，Hachette，*Traité des surfaces du second degré* 中. 它是平面解析几何中准线

和准圆在空间中的推广.

先对有心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 来考察.易知平面 $lx+my+nz=p$ 与二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 相切的充要条件是

$$\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}=p^2. \quad ①$$

设 $l_ix+m_iy+n_iz=p_i \quad (i=1,2,3)$ 是有心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 的三个两两互相垂直的切平面,据①有

$$\frac{l_i^2}{a}+\frac{m_i^2}{b}+\frac{n_i^2}{c}=p_i^2,$$

即
$$(l_ix+m_iy+n_iz)^2=\frac{l_i^2}{a}+\frac{m_i^2}{b}+\frac{n_i^2}{c}, \quad ②$$

这里 $l_i^2+m_i^2+n_i^2=1, l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,$

$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0, l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0.$

将②中三式相加,再利用空间坐标系旋转中旧轴对于新坐标系的方向余弦的关系式,即得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

因此所求的轨迹是一个球面.

对于无心二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 可同样来求.易知平面 $lx+my+nz=p$ 与二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 相切的充要条件是

$$\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+2pn=0. \quad ③$$

设 $l_ix+m_iy+n_iz=p_i \quad (i=1,2,3)$ 是无心二次曲面 $ax^2+by^2=2z$ 的三个两两互相垂直的切平面,据③有

$$\frac{l_i^2}{a}+\frac{m_i^2}{b}+2n_i(l_ix+m_iy+n_iz)=0, \quad ④$$

这里 l_i、m_i、n_i 仍满足前述的关系式. 把④中三式相加，再利用空间坐标系旋转中有关的关系式，即得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2z=0,$$

因此，所求的轨迹是平行于 xOy 坐标平面的一个平面.

参考文献 [23, p. 321].

（郑君文）

欧拉轨迹问题(Euler problem of locus) 求常态二次曲面的平行弦中点的轨迹. 该轨迹为一平面，称它为共轭于平行弦方向的径面.

径面为欧拉于 1748 年得出，此后曾被蒙日等进行过详细的研究.

设 l、m、n 为二次曲面

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz\\+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\end{aligned} \quad ①$$

非渐近方向的一组平行弦的方向余弦，$P(x_0,y_0,z_0)$ 为这组中任意弦的中点，则该弦的方程为

$$\begin{cases}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt.\end{cases} \quad ②$$

现把 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$ 记为 $\zeta(x,y,z)$，再将②式代入①得

$$\zeta(l,m,n)t^2+2[(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})l+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24})m+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34})n]t+f(x_0,y_0,z_0)=0.$$

设 t_1 和 t_2 是上面关于 t 的二次方程的两个根，则 $t_1+t_2=0$，所以

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n = 0,$$

即
$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x_0 + (a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n)y_0 + (a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n)z_0 + (a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n) = 0. \quad ③$$

这里 $a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n$、$a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n$ 和 $a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n$ 不全为零，因此把 ③ 中 x_0、y_0、z_0 改为 x、y、z，即得所求的轨迹方程，且是一个三元一次方程，它表示一个平面.

对于有心二次曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$，共轭于平行弦方向 l、m、n 的径面为 $alx + bmy + cnz = 0$，它是一个通过中心的平面.

对于无心二次曲面 $ax^2 + by^2 - 2z = 0$，共轭于平行弦方向 l、m、n 的径面为 $alx + bmy = n$.

参考文献 [23, pp. 320～321].

（郑君文）

Dupin 轨迹问题(Dupin problem of locus) 一直线上的三个定点，分别在两两互相垂直的三个定平面上移动，求该直线上另一定点 P 的轨迹.

该轨迹问题是 Dupin 于 1813 年提出并解决的，它是平面解析几何中椭圆规原理在空间的推广.

设 A、B、C 是直线 l 上的三个定点，它们分别在 yOz、zOx 和 xOy 平面上移动，$P(x,y,z)$ 是直线 l 上的另一个定点，且 $PA = a$，$PB = b$，$PC = c$，则

$$z = c\cos\gamma = cn,$$

这里 $n = \cos\gamma$.

同样可得

$$x = al, \quad y = bm,$$

且 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

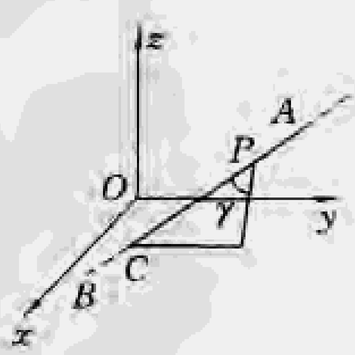


图 4-394

消去 l、m、n，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

这就是所求的轨迹方程，显然它表示一个椭圆面.

参考文献　[23，p. 319].

（郑君文）

Moorman 轨迹定理（Moorman theorem of locus）　到异面直线 l 与 m 等距离的点的轨迹是双曲抛物面.

该轨迹定理是由 R. H. Moorman 提出 W. R. McEwen 解答的，见 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 70 (1963)的问题 E 1569.

取异面直线 l、m 的公垂线 AB 为 z 轴，线段 AB 的中点 O 为原点，过 O 点分别作 l、m 的平行线 l'、m'，以直线 l' 和 m' 的相交所成两双对顶角的平分线为 x 轴和 y 轴，建立空间直角坐标系，并设两条异面直线 l、m 之间的距离为 $2a$，它们的交角为 2θ，则直线 l、m 的方程各为

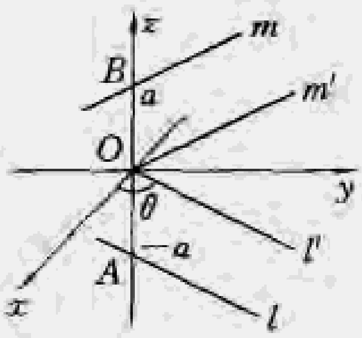


图 4－395

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta},z-a=0;$$

$$\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{-\sin\theta},z+a=0.$$

由于动点 $P(x,y,z)$到直线 l、m 的距离相等，因此据点到直线的距离公式得

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+(z-a)^2-(x\cos\theta+y\sin\theta)^2\\=&x^2+y^2+(z+a)^2-(x\cos\theta-y\sin\theta)^2,\end{aligned}$$

化简得　$xy\sin\theta\cos\theta=-az$.

这就是所求的轨迹方程.

令 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, z=z'$，得

$$x'^2\sin 2\theta - y'^2\sin 2\theta = -4az',$$

由此可知，该轨迹是双曲抛物面.

参考文献 [24,pp. 407～408].

（郑君文）

Monsky 轨迹定理（Monsky theorem of locus） 直三面角的三条棱都与一定圆相交，则它的顶点的轨迹是旋转椭圆面.

该轨迹定理是 P. Monsky 获得的，它是 *Amer. Math. Monthly*, Vol. 11 (1954)的问题 E 1103.

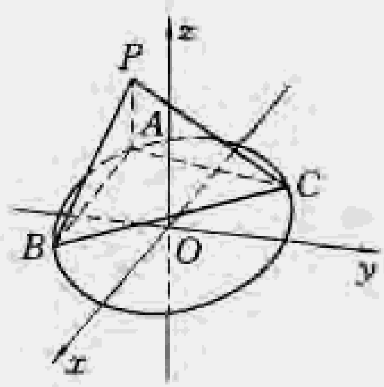


图 4-396

取定圆的圆心 O 为原点，它所在的平面为 xOy 平面，建立空间直角坐标系. 设定圆的半径为 r，直三面角顶点为 $P(x,y,z)$，各棱交定圆 O 于 A、B、C，并设直线 PA、PB、PC 的方程为

$$\frac{X-x}{l_i}=\frac{Y-y}{m_i}=\frac{Z-z}{n_i} \quad (i=1,2,3).$$

由于直三面角的三条棱互相垂直，所以

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \tag{*}$$

为正交矩阵. 又三条棱与圆 O 相交于 A、B、C，则其立坐标 Z 均为零，而各点的横坐标与纵坐标分别为

$$X=x-\frac{l_i}{n_i}z, Y=y-\frac{m_i}{n_i}z \quad (i=1,2,3),$$

且 $$\left(x-\frac{l_i}{n_i}z\right)^2+\left(y-\frac{m_i}{n_i}z\right)^2=r^2 \quad (i=1,2,3). \tag{①}$$

把①式的两边分别乘以 $n_i^2(i=1,2,3)$，三式相加，得

$$(n_1^2+n_2^2+n_3^2)x^2-2(n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3)xz+(l_1^2+l_2^2+l_3^2)z^2+(n_1^2+n_2^2+n_3^2)y^2-2(n_1m_1+n_2m_2+n_3m_3)yz+(m_1^2+m_2^2+m_3^2)z^2=(n_1^2+n_2^2+n_3^2)r^2.$$

据(*)，上式化为

$$x^2+y^2+2z^2=r^2.$$

这就是所求的轨迹方程. 由这轨迹方程可知，该轨迹是旋转椭圆面，它是由椭圆 $x^2+2z^2=r^2, y=0$ 或 $y^2+2z^2=r^2, x=0$，绕 z 轴旋转所产生的曲面.

参考文献 [24,pp. 409～410].

(郑君文)

参考文献

1 吴文俊主编. 世界著名科学家传记·数学家(Ⅰ). 北京：科学出版社，1992

2 吴文俊主编. 世界著名科学家传记·数学家(Ⅱ). 北京：科学出版社，1992

3 孙泽瀛编. 解析几何学. 北京：高等教育出版社，1958

4 《数学百科全书》编译委员会编译. 数学百科全书，第一卷. 北京：科学出版社，1994

5 [法]勒内·笛卡尔著. 几何学. 武汉：武汉出版社，1992

6 [英]伊萨克·牛顿著. 自然哲学之数学原理. 宇宙体系. 武汉：武汉出版社，1994

7 F·克莱因著. 几何三大问题. 北京：商务印书馆，1951

8 林鹤一著. 初等几何作图不能问题. 北京：商务印书馆，1956

9 [法]J. 阿达玛著. 初等数学教程·几何(立体部分). 上海：上海科学技术出版社，1980

10 [苏]H. M. 别斯金著. 解析几何学教程. 北京：高等教育出版社，1956

11 [苏]И. И. 勃立瓦洛夫著. 解析几何. 北京：高等教育出版社，1956
12 [苏]Д. И. 别列标尔金著. 初等几何学教程(下卷). 北京：高等教育出版社，1955
13 [德]H. 德里著. 100个著名初等数学问题——历史和解. 上海：上海科学技术出版社，1982
14 [美]Ivan Niven 著. 极大极小. 成都：四川教育出版社，1988
15 [德]W. 盖勒特等著. 简明数学全书(Ⅰ. 基础数学). 上海：上海科学技术出版社，1981
16 [美]R. 亨斯贝尔格著. 数学中的智巧. 北京：北京大学出版社，1985
17 [美]M. 克莱因著. 古今数学思想(第1册). 上海：上海科学技术出版社，1979
18 [美]M. 克莱因著. 古今数学思想(第2册). 上海：上海科学技术出版社，1979
19 [美]M. 克莱因著. 古今数学思想(第3册). 上海：上海科学技术出版社，1980
20 [美]H. 伊夫斯著. 数学史概论. 太原：山西人民出版社，1986
21 Ross Honsberger. *Mathematical Morsels*, *The Dolciani Mathematical Expositions No. 3*, Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 1978
22 岩田至康編. 幾何学大辞典(第1卷). 槇書店，1979
23 岩田至康編. 幾何学大辞典(第2卷). 槇書店，1979
24 岩田至康編. 幾何学大辞典(第6卷). 槇書店，1982
25 [美]R. 柯朗，H. 罗宾著. 数学是什么？北京：科学出版社，1985

四 其 他

不可公度线段(Incommensurable line segments) 等腰直角三角形的斜边与直角边是不可公度的,即不存在某线段 e,使斜边和直角边都是线段 e 的正整数倍.

不可公度线段是古希腊的毕达哥拉斯学派发现的. 不可公度线段必然导致无理数(非有理数)的产生,这对于一切全靠正整数(有理数看做是两个整数的比)的毕达哥拉斯学派的哲学无疑是一个致命的打击,因为毕达哥拉斯学派的比例及相似形理论是完全基于"任何两线段都可公度"这一貌似正确的论断之上的. 因此,不可公度线段的发现,使大量原本认为正确无疑的证明顿时失去了基础,从而导致了数学史上的第一次数学危机. 正因为如此,在相当一段时期内,毕达哥拉斯学派对此发现竭力保守秘密. 传说,其门人 Hippasus 由于把这个秘密泄露给外界而渎犯了门规,结果被抛入了大海之中(也有一种说法是把他驱逐出会,视为亡人,并立了墓碑). 由此可见,毕达哥拉斯学派对不可公度线段是何等的忌讳.

不可公度线段,除了前面提到的外,以后又陆续发现了很多,例如正五边形的半径和一边也是不可公度线段. 为了解决由不可公度线段带来的一连串问题,公元前 370 年左右,古希腊数学家 Eudoxus 提出了关于比例的新理论,从几何学的角度解决了不可公度问题,但是他力避把不可公度线段和数(无理数)联系起来.

下面用几何方法证明等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 和直角边 AC 是不可公度线段.

用反证法. 如若不然,则存在某一线段 e,使 AB、AC 都是 e 的正整数倍. 今在 AB 上截取 $C_1B = AC$,作 $B_1C_1 \perp AB$ 交 AC 于 B_1,则 $AC_1 = B_1C_1 = B_1C$. 由于 $AC_1 = AB - AC$,而 AB、AC

都是 e 的正整数倍，所以 AC_1 也是线段 e 的正整数倍. 由于 $AB_1 = AC - B_1C = AC - B_1C_1 = AC - AC_1$，所以 AB_1 也应是线段 e 的正整数倍，从而较小的 Rt$\triangle AB_1C_1$ 的斜边 AB_1 和直角边 AC_1 也应是可公度的. 对 Rt$\triangle AB_1C_1$ 再重复上述过程，我们又可以得到一个更小的 Rt$\triangle AB_2C_2$，其斜边 AB_2 和直角边 AC_2 也是线段 e 的正整数倍. 如此重复 n 次，可得 Rt$\triangle AB_nC_n$，其斜边 AB_n 和直角边 AC_n 还是线段 e 的正整数倍，因而 $AC_n \geqslant e$. 但是根据作法，$AC_n < \frac{1}{n}AC$，当 n 足够大时，AC_n 可以任意地小，这就与 $AC_n \geqslant e$ 产生了矛盾. 可见 AB 和 AC 不可能有公度.

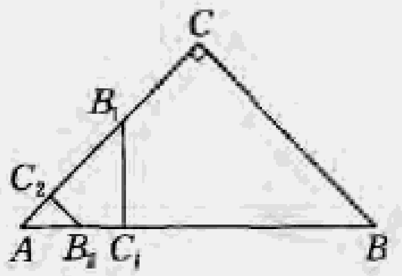


图 4-397

证明等腰直角三角形的斜边和直角边不可公度，也可以用代数(数论)方法. 若设 $AC = BC = 1$，则根据勾股定理(西方称之为毕达哥拉斯定理)，$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2$，$AB = \sqrt{2}$. 再用反证法证明 $\sqrt{2}$ 不可能表为两个整数的比即可.

参考文献　[15，pp. 37～38]，[16，pp. 54～73].

(张文华)

海伦三角形(Heron triangle)　试求边长为连续整数、面积也为整数的三角形.

海伦在他的代表作《度量论》中，提出了著名的求三角形面积的“海伦公式”，他同时得到了一类特殊三角形，其边长和面积都是整数，这类三角形被称为海伦三角形.

下面我们来找这类三角形.

以正整数 $x-1, x, x+1$ 表示海伦三角形的各边长，代入海伦公式 $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，得

$$S_{\triangle}=\sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)}=\frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}.$$

设 $\frac{x}{2}=m,\frac{x^2}{4}-1=3n^2$，其中 m、n 是整数. 从上述两式中消去 x，得 $m^2-3n^2=1,(m+n\sqrt{3})(m-n\sqrt{3})=1$.

由于对于任何正整数 $k,(2+\sqrt{3})^k(2-\sqrt{3})^k=1$，故可设

$$\begin{cases}m+n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^k,\\ m-n\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^k.\end{cases}$$

于是，$x=2m=(2+\sqrt{3})^k+(2-\sqrt{3})^k$.

令 $k=1$，则 $x=4,S_{\triangle}=6$. 故边长为 3,4,5 的三角形是海伦三角形.

令 $k=2$，则 $x=14,S_{\triangle}=84$，故边长为 13,14,15 的三角形是海伦三角形.

令 $k=3$，则 $x=52,S_{\triangle}=1\,170$，故边长为 51,52,53 的三角形是海伦三角形.

令 $k=4,5,\cdots$ 则可得一系列海伦三角形.

由 Pell 方程的理论可知，用上述方法可以得到 $m^2-3n^2=1$ 的全部解，因而也就得到了全部的海伦三角形.

参考文献 [1,pp. 201～215],[10,pp. 83～84].

（张文华）

Hipparchus 球极投影（Hipparchus stereographic projection） 球极投影把球面上的圆变换成地图平面上的圆（过极点的圆则变换成直线），并且这种变换是保角的.

这个问题很可能是古希腊的天文学家 Hipparchus 提出的. 球极投影思想在托勒密的《平球法》(*Planisphaerium*)一书中得到了应用. 19 世纪初，法国数学家 Michel Chasles 则提出了如下定理：

在球极投影下，球面上不通过极的圆 R 的映像是一个圆，这个圆的中心 S' 是沿圆 R 与球相切的圆锥的顶点 S 在该球极投影下的映像.

如图 4－398，设球 O'（地球）切平面 π（地图平面）于 O，OZ 是球的直径. 对于球面上任意异于 Z 的点 P，射线 ZP 必与平面 π 相交. 记交点为 P'，P' 就是点 P 在地图平面 π 上的像. 这种从地球面上的点 P 到地图平面 π 上的点 P' 的变换就是球极平面投影. 它有如下两个性质：

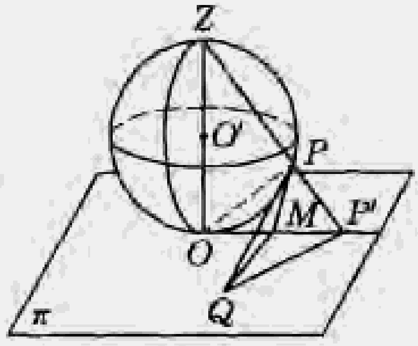


图 4－398

(1) 球面上的圆（不通过点 Z）在地图平面上的像仍是圆；

(2) 用球极投影法制成的地图是保角的.

为了叙述方便，先证明一个辅助命题：介于球面与地图平面间的球的切线（线段）与它在地图平面上的像，其长度相等.

如图 4－398，若球的切线 PM 在平面 ZOP' 内，$P'M$ 是 PM 的像，由于 $\angle OPP' = 90°$，且切线 $MP = MO$，故 M 是 $\text{Rt}\triangle OPP'$ 的斜边中点，$MP' = MO = MP$. 若球的切线 PQ 不在平面 ZOP' 内，$P'Q$ 是 PQ 的像. ∵ 平面 $\pi \perp$ 平面 OZP'，平面 $PMQ \perp$ 平面 OZP'，∴ $QM \perp$ 平面 OZP'，$\angle QMP' = \angle QMP = 90°$.

∵ $MP = MP'$，∴ $\text{Rt}\triangle MQP \cong \text{Rt}\triangle MQP'$，$PQ = P'Q$.

(1) 设 R 是球面上的一个小圆（不通过点 Z），点 S 是沿圆 R 与球相切的圆锥的顶点，S' 是射线 ZS 与平面 π 的交点. 我们来证明：球面圆 R 的像是地图平面上的以 S' 为中心的一个圆.

设 P 是球面圆 R 上的一点，SP 交地图平面于 Q（图 4－399），PQ 是球的切线，由辅助命题知，$PQ = P'Q$.

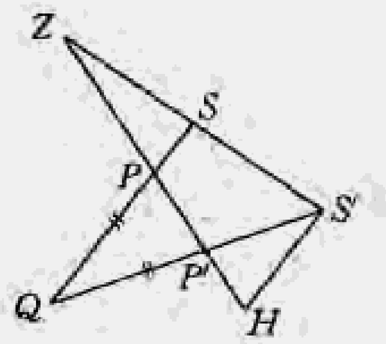


图 4－399

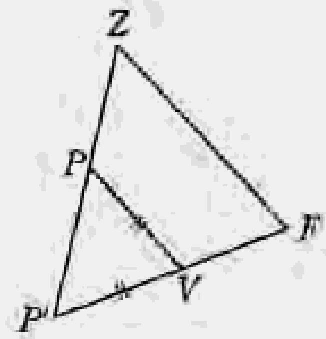


图 4－400

若过 S' 作 $S'H /\!/ SP$，交 ZP' 的延长线于 H，则 $S'P' = S'H$，$S'H : SP = ZS' : ZS$. $\therefore S'P' = S'H = SP \cdot \dfrac{ZS'}{ZS}$. 当点 P 在圆 R 上移动时，SP 保持定值，因此 $S'P'$ 也保持定值，P' 在地图平面内绘出一个圆.

若 R 是球面上的不过 Z 点的大圆. 过 Z 作圆 R 所在平面的垂线交地图平面于 F，再过圆 R 上的点 P 作 $PV /\!/ ZF$ 交地图平面于 V（图 4－400）. 则 P'、V、F 共线，且 PV 必是球面的切线，由辅助命题知 $PV = P'V$. 从而知 $FP' = FZ =$ 定值，故 P' 点在地图平面上也绘出一个圆.

若 R 是过 Z 点的大圆，则它在地图平面上的像是一直线（可认为是中心在无穷远的圆）.

（2）设 P 是球面上的点，PA_1、PA_2 是球面的切线，A_1、A_2 是切线与地图平面的交点，又 P' 是 P 点在地图平面上的像，$P'A_1$、$P'A_2$ 分别是 PA_1、PA_2 的像. 由辅助题知 $P'A_1 = PA_1$，$P'A_2 = PA_2$，$\triangle A_1PA_2 \cong \triangle A_1P'A_2$，$\therefore \angle A_1P'A_2 = \angle A_1PA_2$. 又由于球极平面投影是一对一的，若 PA_1、PA_2 分别是球面圆 R_1、R_2 的切线，则 $P'A_1$、$P'A_2$ 分别是它们的像圆 R_1'、R_2' 的切线，因此球面圆 R_1、R_2 的交角等于它们的像圆 R_1'、R_2' 的交角. 这就证明了球极平面投影是保角的.

应说明的是，在很多情况下，常把地球的赤道平面作为投影平

面. 设连结北极 $N(0,0,a)$ 与球面上的点 $P(x,y,z)$ 的直线与赤道平面交于点 $P'(u,v)$，则映射 $\pi:\{S-N\}\to R^2, P(x,y,z)\to P'(u,v)$ 就是球极投影，它给出一个由挖去北极的球面到平面的同胚.

参考文献 [9,pp. 340～344].

（张文华）

欧拉的多边形剖分问题(Euler problem of dissection polygon) 用互不交叉的对角线将凸 n 边形剖分成三角形，有多少种剖分方法?

此问题是欧拉于 1751 年向哥德巴赫提出的. 欧拉在得出最初七种剖分数后又把其结论告知了 Segner，Segner 于 1758 年建立了关于可能剖分数 E_n 的一个递推公式：

$$E_n = E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \cdots + E_{n-1}E_2.$$

欧拉关于剖分数的公式是

$$E_n = \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-10)}{(n-1)!}.$$

他是用归纳的方法得到的，他自己说："我的归纳过程是相当费力的."1941 年，H. Urban 运用归纳的方法得到了 E_n 的一个递推公式，利用它可以很快地得到欧拉的公式.

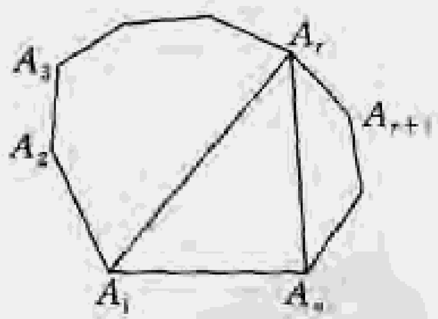


图 4-401

(1) Segner 的递推公式.

记凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的剖分方式数为 E_n. 对于每一种可能的剖分法来说，总有一个三角形以 A_1A_n 为底边，其对角顶点 A_r 则可能是 $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$. 对于某个确定的 r，$\triangle A_1A_nA_r$ 的一侧是一个 r 边形，另一侧是一个 $n-r+1$ 边形. 假定 r 边形的剖分方式有 E_r 种，$n-r+1$ 边形的剖分方式有 E_{n-r+1} 种，故剖分后具有 $\triangle A_1A_nA_r$ 的剖分方式应有 $E_r\cdot E_{n-r+1}$ 种. 令 $r=2,3,\cdots,n-1$，则得总剖分方式数

$$E_n = E_2 \cdot E_{n-1} + E_3 \cdot E_{n-2} + \cdots + E_{n-1} \cdot E_2. \qquad ①$$

其中 $E_2 = 1$. 这就是 Segner 的递推公式.

(2) H. Urban 的递推公式是

$$E_n = \frac{4n-10}{n-1} E_{n-1}. \qquad ②$$

它可以用数学归纳法予以证明.

当 $n = 2,3,4,5,6$ 时,容易验证公式是成立的.

今假设②式对于任意 $r \leqslant n-1$ 均成立,考察

$$S = 1 \cdot E_2 \cdot E_{n-1} + 2 \cdot E_3 \cdot E_{n-2} + \cdots + (r-1)E_r E_{n-r+1} + \cdots + (n-2)E_{n-1}E_2, \qquad ③$$

及 $$S = (n-2)E_{n-1}E_2 + (n-3)E_{n-2}E_3 + \cdots + 1 \cdot E_2 \cdot E_{n-1}, \qquad ④$$

$$2S = (n-1)[E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \cdots + E_{n-1}E_2]. \qquad ⑤$$

由 Segner 公式,方括号中的算式等于 E_n,从而

$$2S = (n-1)E_n. \qquad ⑥$$

根据假设,当 $r \leqslant n-1$ 时,$E_r = \dfrac{4r-10}{r-1}E_{r-1}$. 现将③式中每个乘积中的左边一个因子 E_r 用 $\dfrac{4r-10}{r-1}E_{r-1}$ 来代替,得到

$$S = E_2E_{n-1} + \lambda_2E_2E_{n-2} + \lambda_3E_3E_{n-3} + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2}E_2, \qquad ③'$$

其中 $\lambda_r = 4r - 6$.

对④进行同样的处理,得

$$S = \lambda_{n-2}E_{n-2}E_2 + \lambda_{n-3}E_{n-3}E_3 + \cdots + E_2E_{n-1}. \qquad ④'$$

②、⑧两式相加,由于 $\lambda_r + \lambda_{n-r} = 4n - 12$,得

$$2S = E_{n-1} + (4n-12)[E_2E_{n-2} + E_3E_{n-3} + \cdots + E_{n-2}E_2] + E_{n-1}$$
$$= (4n-10)E_{n-1}.$$

由⑥、⑦两式知 $E_n = \frac{4n-10}{n-1}E_{n-1}$. ⑦

即当 $r=n$ 时公式也成立.

(3) 由递推公式②就能很容易地得到欧拉的计算公式

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}.$$

顺便提及,欧拉的上述剖分方式数 E_n 与 Catalan 数(n 个预先给定顺序的不同因子,用两两结合的方式计算其乘积,其计算方式的种数)C_n 有密切的关系.

参考文献 [9,pp.24~31].

(张文华)

消失的区域(Disappeared region) 在一个圆上取 n 个点,用弦把它们两两连结起来,若其中任何三条弦都不共点,这些弦把整个圆域分成多少个区域?

本题选自西班牙数学家 Guzman M. de 的《数学探奇》一书. Guzman M. de 是西班牙科学院院士,曾任国际数学教育委员会主席(1991~1994). 据他介绍,这个问题曾在 Ogilvy 的一本引人入胜的书 *Tomorrow's Math*(1972)中作了有趣的讨论,但没有完全解决. 1973 年,Gibbs 在《欧拉、帕斯卡和消失的区域》一文中才最终解决了这个问题.

本题在 Ross Honsbeger 所著的 *Mathematical Morsels* 一书中也有类似的介绍,但其题目是"圆内的区域"(*Regions in A Circle*). 它选自《美国数学月刊》1973 年,问题 E 2359,由 T.C.Brown提出,由 Norman Bauman 解答.

为什么把这个区域划分问题称为"消失的区域"问题?记点数为 n 时相应的区域数为 F_n. 用试验的方法易知,$F_2 = 2 = 2^1$,$F_3 = 4 = 2^2$,$F_4 = 8 = 2^3$,$F_5 = 16 = 2^4$. 据此自然会猜想:$F_6 = 2^5$? $F_7 = 2^6$? 可实际上,$F_6 = 31 < 2^5$,$F_7 = 57 < 2^6$,似乎随着 n 的增

加，有一些区域消失了.

（1）我们先讨论一个辅助命题.用弦把圆上的 n 个点两两连结起来，如果其中任意三条弦都不共点，这些弦在圆内一共有多少个交点？这些弦被这些交点分成的线段（不重叠）共有多少条？

圆内的一个交点由两条相交弦确定，或者说由一个四点组确定，圆上 n 个点可以组成 C_n^4 个不同的四点组，故圆内的交点数为 $P = C_n^4$.

圆上 n 个点可确定 C_n^2 条弦.当两弦在圆内相交时，这两弦被分成 4 条线段，$4 = 2 + 2 \times 1$，即圆内的每一个交点均使线段数增加 2.因此，

$$\text{线段数} = \text{弦数} + \text{交点数的 2 倍},$$

即圆内线段数 $L = C_n^2 + 2C_n^4$.

（2）下面我们利用欧拉公式来解决原问题.

由欧拉公式，对于一个平面网络，其面数、顶点数和棱数之间有如下关系：

$$\text{面数} = \text{棱数} - \text{顶点数} + 1.$$

对于由圆上 n 个点、n 条弧以及由这 n 个点所决定的相交弦所得到的线段和交点所组成的平面网络而言，其顶点数为圆上的 n 个点及圆内的交点，共有 $C_n^4 + n$ 个，其棱为圆上 n 条弧及圆内诸弦相交所得的线段，共有 $C_n^2 + 2C_n^4 + n$ 条.故面数

$$\begin{aligned} F_n &= (C_n^2 + 2C_n^4 + n) - (C_n^4 + n) + 1 \\ &= 1 + C_n^2 + C_n^4 \\ &= C_n^0 + C_n^2 + C_n^4, \end{aligned}$$

或者，写成更和谐的形式：

$$F_n = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4.$$

这就是问题的答案.

(3) 本问题也可以利用如下著名公式来解决：

若 L 条直线在圆内有 P 个交点，其中任何三条在圆内无公共点，则这 L 条直线把圆内区域划分成 $P+L+1$ 个区域.

(这个公式可以用数学归纳法证明，这里从略)

显然，对于圆周上 n 个点，两两连结，共有 C_n^2 条弦，这些弦在圆内有 C_n^4 个交点，故圆域被划分成 $C_n^4+C_n^2+1$ 个区域.

参考文献 [12,pp.120～127],[17,pp.4～6].

(张文华)

施泰纳的用平面划分空间问题(Steiner problem of dissection space with planes) 用 n 张平面划分空间，最多能划分成多少部分？

本题是瑞士数学家施泰纳在题为《划分平面和空间的几个法则》的论文中提出的.

1. 先讨论平面划分问题. 平面上 n 条直线，最多将平面划分成多少部分？

平面被 k 条直线划分，最多区域数记为 E_k.

平面被 k 条直线划分时，可以先用 $k-1$ 条直线划分，然后再添上第 k 条直线. 第一步得到的区域数是 E_{k-1}，第二步增加的区域数是 k(因为第 k 条直线被原先的 $k-1$ 条直线分成 k 段，且每一段都将原来的某个区域一分为二)，故 $E_k=E_{k-1}+k\quad(k=2,3,4,\cdots)$. 又 $E_1=2$，故

$$\begin{aligned}E_n&=(E_n-E_{n-1})+(E_{n-1}-E_{n-2})+\cdots+\\&\quad(E_3-E_2)+(E_2-E_1)+E_1\\&=n+(n-1)+\cdots+3+2+2\\&=\frac{1}{2}n(n+1)+1.\end{aligned}$$

2. 空间划分问题.

记空间被 k 张平面划分，其区域数的最大值为 F_k. 先用 $k-1$ 张平面划分空间，最多有 F_{k-1} 个区域，接着添上第 k 张平面，它与

原先的 $k-1$ 张平面最多交于 $k-1$ 条直线，而这 $k-1$ 条直线将第 k 张平面划分成 $E_{k-1}=\frac{1}{2}k(k-1)+1$ 块平面区域，每一块这样的平面区域把原先所在的一个空间区域分为两个，因此，当添上第 k 张平面时，相应地增加了 E_{k-1} 个空间区域，因而有递推关系

$$F_k=F_{k-1}+E_{k-1},\quad k=2,3,4,\cdots$$

利用这个递推关系及 $F_1=2$，可得

$$\begin{aligned}F_n&=\sum_{k=1}^{n-1}(F_{k+1}-F_k)+2\\&=\sum_{k=1}^{n-1}E_k+2\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)+(n+1)\\&=n+1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=n+1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{4}n(n-1)\\&=n+1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\\&=\frac{1}{6}(n^3+5n+6).\end{aligned}$$

用 n 张平面划分空间，最多能分得 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 个部分.

参考文献　[9,pp. 310～312].

（张文华）

完全正方形(Squaring the square)　能否把一个正方形分解成有限多个各不相同的正方形？

一个正方形，如果能被分解成有限多个大小互不相同的正方形，就称为完全方解的正方形，或简称完全正方形. 是否存在完全正方形？

图 4－402、图 4－403 给出了正方形完全方解的例子.

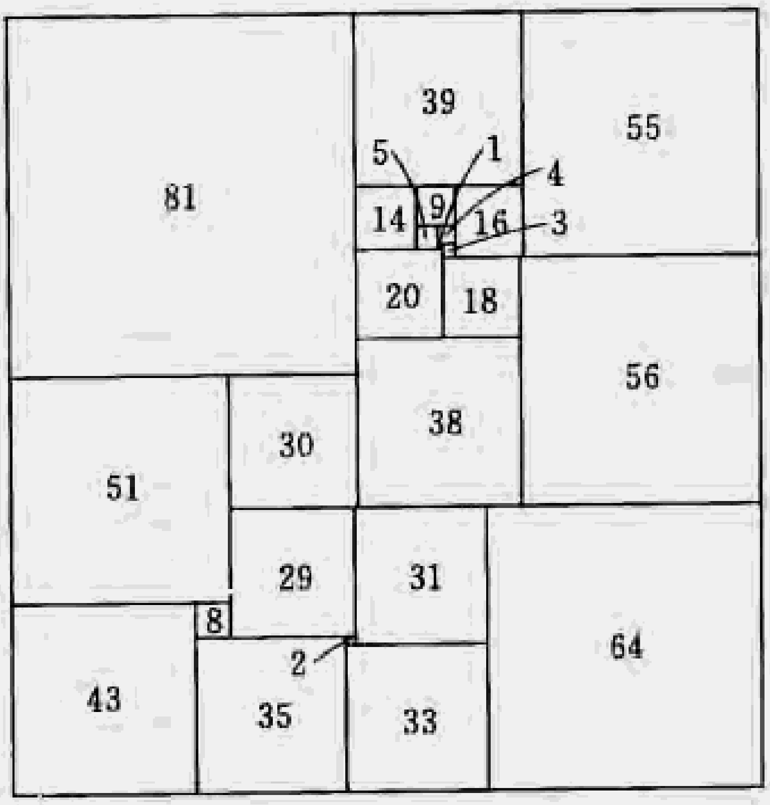


图 4－402　24 阶复合完全正方形

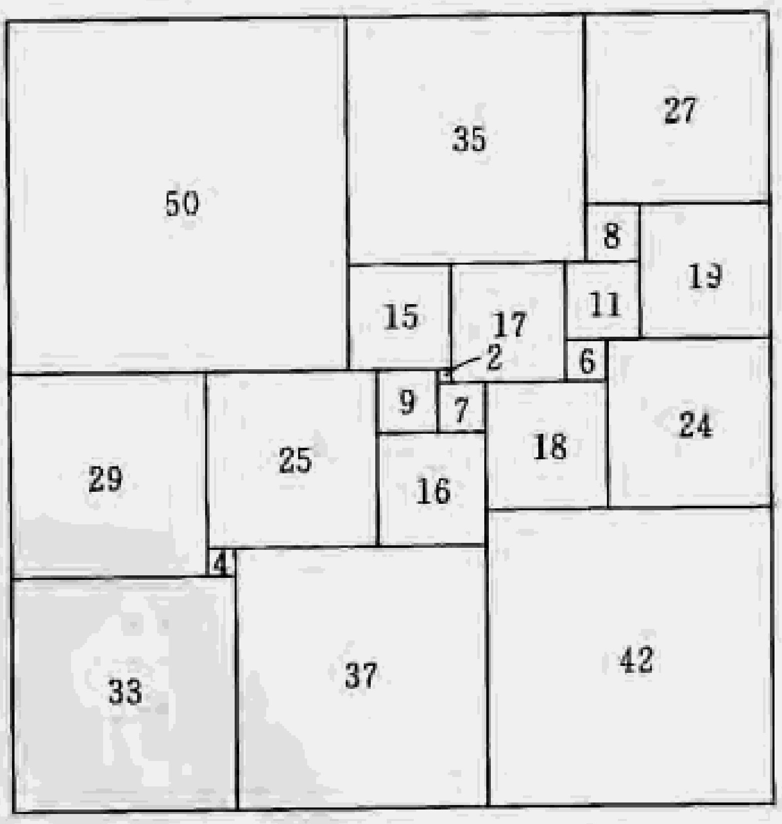


图 4－403　21 阶简单完全正方形

图 4－402 是 24 阶复合的完全正方形，图 4－403 是 21 阶简单的完全正方形．这里，“简单的”一词是指“分解得到的这些小正方形在原图形内部不构成任何小矩形”；“复合的”一词则是指“分解得到的这些小正方形中有某些正方形在原图形内部构成小矩形”．“阶数”则是指被分成的小正方形的个数．

关于完全正方形问题，迄今见到的最早文献是 1925 年 Zbigniew Moron 的论文，它主要讨论矩形的正方形分解问题，并给出了两个这样的矩形．Moron 指出，如果同一个矩形有两个不同的正方形分解，使得一个分解中的每一个正方形都不同于另一分解中的正方形，那么由这两个分解再添上两个正方形就可以拼成一个大正方形．也就是说，只要矩形的这两种分解所含的正方形都不等于新添的两个正方形，所拼成的新正方形就是完全正方形．

1939 年，柏林的 R. Sprague 找到了一个完全正方形，此正方形有 55 个小正方形组成，边长为 4 205 单位，它含有五组互不相交的正方形，每组正方形拼成一个矩形．

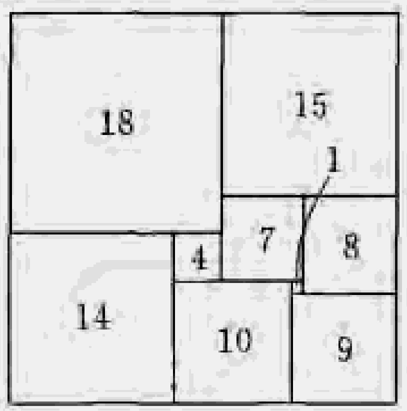


图 4－404　9 阶完全矩形

此后只过了几个月，又一个完全正方形发表了，它是剑桥大学三一学院的四个大学生 R. L. Brooks，C. A. B. Smith，A. H. Stone 和 W. T. Tutte 的研究成果．这个完全正方形有 28 个小正方形组成，边长为 1015 单位．在 1936～1938 年间 Tutte 等四人一直在研究把矩形和正方形分解成小正方形问题．他们为简单方解矩形问题的研究奠定了理论基础．他们证明了：具有 n 个分解元的任何简单方解矩形，都可以由 $n+1$ 阶三连通平面图的完全集构造出来．其作法是：把图看成一个电路，在一个分电路上接入电动势，别的分电路则各具单位电阻．在这些分电路中，电流的相应值由克希霍夫(Kirchhoff)定律计算．这些值表

示一个分解所含小正方形诸边的相应值，而电路诸分路的连通性则表示这些小正方形的拼合方式. 1940 年，他们给出了 9 至 11 阶的完全矩形的明细表，并且证明了完全矩形的最低阶数为 9，其具体拼法见图 4－404.

1948 年，美国业余数学家 T. H. Willcocks 构造出一个 24 阶复合完全正方形.

1967 年，J. C. Wilson 用电子计算机构造了一个 25 阶的简单完全正方形.

1978 年，荷兰斯切温特大学教师 A. J. W. Duijrestijn 宣布：他已证明 20 阶以下(包括 20 阶)的完全正方形不存在. 接着，他借助于电子计算机，使用极其复杂的程序，终于找到了一个 21 阶的简单完全正方形，并且证明了这样的正方形有且只有一个.

21 阶完全正方形如图 4－403，它的边长是 112，组成它的小正方形的边长为 2，4，6，7，8，9，11，15，16，17，18，19，24，25，27，29，33，35，37，42，50.

正方形可以完全方解. 那么正方体是否也可以完全方解呢? 即，能否把一个正方体分割成有限多个彼此不等的小正方体呢?

答案是否定的.

用反证法来说明. 假如分割是可能的，有一个正方体已经被分割成有限个彼此不等的小正方体. 考察底面上的那些小正方形，此时底面正方形被分割成了一些彼此不等的小正方形. 今考虑其中最小的那一个，并把与其相应的小正方体记作 K_1，小正方体 K_1 被四周一些较大的正方体围在中间，显然这些小正方体的竖立面都比 K_1 要高. 可见 K_1 上面的空隙应有另一些彼此不等的、比 K_1 更小的正方体来填补. 于是 K_1 的上底面正方形又被分割成彼此不等的小正方形. 再考虑其中最小的那个小正方形以及相应的小正方体 K_2，K_2 的四周也是一些比它大的正方体，它们的竖立面都比 K_2 的高. 于是 K_2 的上面又应由一些更小的正方体来填补. 如此进

行下去,显然是一个没有穷尽的过程.可见,一个正方体不可能被分解成有限个彼此不等的小正方体.

参考文献 [11,pp.48~60],[12,p.133],[13,pp.170~176],[18,p.83],[22],[23].

(谈祥柏 张文华)

Barbier 定理(Barbier's theorem) 所有宽度为 b 的等宽线有相同的周长,其周长为 πb.

这个定理是由 Barbier(1830~1889)提出的,它是有关等宽线的一个基本定理.

等宽线是这样一种凸封闭曲线,它的任意方向的宽度(即能夹住它的两条平行线的距离)都相等.圆是最简单的等宽线.此外,分别以正三角形 ABC 的三个顶点为中心、以三角形的边长为半径画三条弧,使它们相接于原三角形的三个顶点,由这样三条圆弧组成的图形,也是等宽线,这个图形叫做 Reuleaux 三角形.

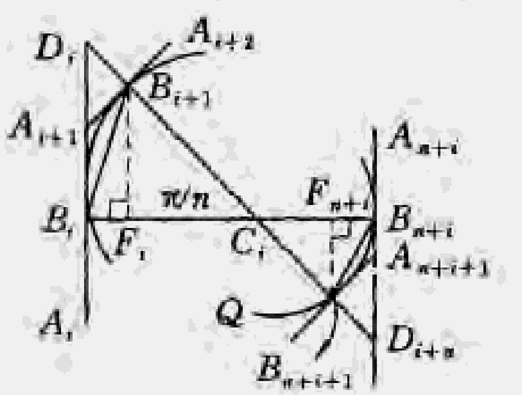


图 4-405

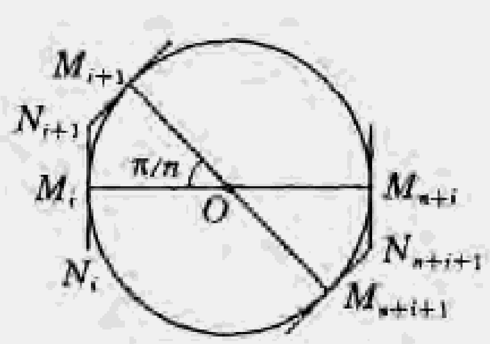


图 4-406

如图 4-405、406,设 Q 为任意宽度为 b 的等宽曲线,$\odot O$ 是直径为 b 的圆.作$\odot O$ 的外切正 $2n$ 边形 $N_1N_2\cdots N_{2n}$,其中 N_iN_{i+1} 切$\odot O$ 于 M_i $(i=1,2,\cdots,2n)$,对等宽线 Q 作 n 对平行支撑直线 A_iA_{i+1}、$A_{n+i}A_{n+i+1}$,使 $A_iA_{i+1}/\!/N_iN_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,n$,这 n 对平行支撑直线构成等宽线 Q 的一个外切 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$,而切点 B_1、B_2、$\cdots$、B_{2n}则构成 Q 的一个内接 $2n$ 边形.下面计算这两个多边

形的周长.

因为平行支撑直线之间的距离恰好等于等宽线的宽度,故 $B_iB_{i+n}=b$,$B_{i+1}B_{n+i+1}=b$. 设直线 B_iB_{n+i} 与 $B_{i+1}B_{n+i+1}$ 交于点 C_i,直线 $B_{i+1}B_{n+i+1}$ 与直线 A_iA_{i+1} 及 $A_{n+i}A_{n+i+1}$ 分别交于点 D_i、D_{n+i}. 则在 $\mathrm{Rt}\triangle B_iC_iD_i$ 中,$\angle B_iC_iD_i=\frac{\pi}{n}$,$B_iD_i=B_iC_i\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$. 同理,$B_{n+i}D_{n+i}=C_iB_{n+i}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$. 从而 $B_iD_i+B_{n+i}D_{n+i}=B_iB_{n+i}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}=b\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$. 若记等宽线 Q 的外切 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的周长为 Q_{2n},由于 $A_{i+1}B_{i+1}<A_{i+1}D_i$,$A_{n+i+1}B_{n+i+1}<A_{n+i+1}D_{n+i}$,则有

$$Q_{2n}=\sum_{i=1}^{n}(B_iA_{i+1}+A_{i+1}B_{i+1}+B_{n+i}A_{n+i+1}+A_{n+i+1}B_{n+i+1})$$
$$<\sum_{i=1}^{n}(B_iD_i+B_{n+i}D_{n+i})=nb\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}. \quad ①$$

作 $B_{i+1}F_i\perp B_iB_{n+i}$ 于 F_i,$B_{n+i+1}F_{n+i}\perp B_iB_{n+i}$ 于 F_{n+i},则

$$B_iB_{i+1}+B_{n+i}B_{n+i+1}>B_{i+1}F_i+B_{n+i+1}F_{n+i}$$
$$=B_{i+1}C_i\sin\frac{\pi}{n}+C_iB_{n+i+1}\sin\frac{\pi}{n}=B_{i+1}B_{n+i+1}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$=b\sin\frac{\pi}{n}.$$

记等宽线 Q 的内接 $2n$ 边形 $B_1\cdots B_{2n}$ 的周长为 q_{2n},则

$$q_{2n}=\sum_{i=1}^{n}(B_iB_{i+1}+B_{n+i}B_{n+i+1})>nb\sin\frac{\pi}{n}. \quad ②$$

由①、②,知 $nb\sin\frac{\pi}{n}<q_{2n}<Q_{2n}<nb\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$. ③

但 $P_n=nb\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}$ 是 $\odot O\left(\frac{b}{2}\right)$ 的外切正 n 边形的周长,$p_n=nb\sin\frac{\pi}{n}$ 是 $\odot O\left(\frac{b}{2}\right)$ 的内接正 n 边形的周长,且 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\pi b$. 故由 ③ 式得

$$\lim_{n\to\infty}Q_{2n}=\lim_{n\to\infty}q_{2n}=\pi b.$$

∴ 宽度为 b 的等宽曲线 Q 的周长是 πb.

参考文献 [11,pp.162~169].

（张文华）

Sylvester 三点共线问题（Sylvester problem of collinear three points） 平面上是否存在这样的有限点集 S，它不全在一条直线上，但通过 S 中任意两点的直线至少还包含 S 中的另一点？

这个问题是由美国数学家 J.J. Sylvester（1814～1897）于 1893 年提出的. 1933 年，T. Gallai 证明了下述结论：对于平面上任意不全在一直线上的有限点集 S，必定存在这样的一条直线，它只通过 S 中的两个点（这种直线称为寻常直线）. 但他的证明非常复杂. 大约又经过了 10 年，L. M. Kelly 给出了一个较为简明的证明. Kelly 和 Morse（1892～1977）还进一步证明：任何含有 n 个点的集合中，至少有 $\frac{3n}{7}$ 条寻常直线.

下述证明的思路源于 Kelly.

由于 S 中的点不全在一条直线上，故对于通过 S 中两点的任意直线 l 而言，S 中必有不在 l 上的点 P 存在. 因此，可以编制一个"线点组合"(l,P) 表，并把点 P 到直线 l 的距离记为 $d(l,P)$，称之为伴随距离. 因为 S 中的点数有限，所以上述线点组合的个数也有限，伴随距离只有有限个，故其中必有最小的，记为 d. 假定以 d 为伴随距离的线、点为 l^* 与 A，下面来证明 l^* 只通过 S 中的两个点.

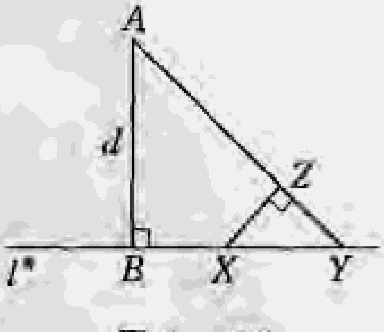


图 4－407

过 A 作 $AB\perp l^*$ 于 B，$AB=d$，但 B 必不属于点集 S. 因为，若 $B\in S$ 的话，对于直线 AX（$X\in S$，$X\in l^*$）和点 B，其伴随距离就小于 d，这与 d 是最小伴随距离的假设相矛盾.

因此，如果 l^* 上有 S 中的三点的话，其中至少有两点在 B 的同侧，不妨记为点 X 和 Y（如图 4－407）．今作 $XZ \perp AY$ 于 Z，则对于直线 AY 和点 X 而言，其伴随距离为 $|XZ|$．由于 $\frac{XZ}{AB}=\frac{XY}{AY}<\frac{XY}{BY}<1$，$|XZ|<d$．这与 d 是最小伴随距离相矛盾．

这说明，任何不全在一条直线上的有限点集必有寻常直线．因此，平面上不可能找到这样的有限点集 S，它不全在一直线上，但通过其中任两点的直线必含有 S 中的另外一点．

参考文献　[11，pp．14～17]．

（张文华）

Helly 定理（Helly's theorem）　平面上 n 个（$n \geqslant 3$）凸图形（闭的，有界），若其中任意三个都有公共点，则这 n 个凸图形必有公共点．

此定理由奥地利数学家 Eduard Helly（1884～1943）提出，它是有关凸图形的一个基本定理．

这个定理可以用数学归纳法证明．

1．当 $n=3$ 或 4 时，命题是成立的．

当 $n=3$ 时，命题显然成立．今考虑 $n=4$ 的情况．

设凸图形 $\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$ 有公共点 P，$\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_4$ 有公共点 Q，$\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_3$、$\mathscr{D}_4$ 有公共点 R，$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$、$\mathscr{D}_4$ 有公共点 S．

（1）若 P、Q、R、S 四点中有三点在一直线上，譬如 P 在线段 QR 上，由于 Q、$R \in \mathscr{D}_4$，故线段 QR 上的点均属于 $\mathscr{D}_4$，从而点 P 也属于 $\mathscr{D}_4$，但 P 是 $\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$ 的公共点，故 P 是 $\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$、$\mathscr{D}_4$ 的公共点．

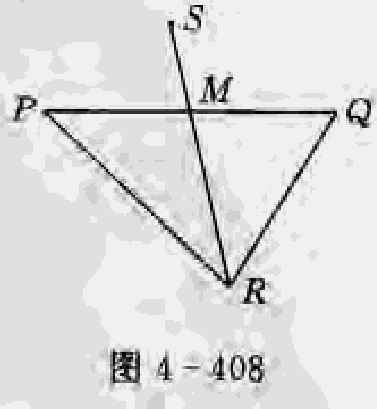


图 4－408

（2）若 P、Q、R、S 四点中，任意三点均不共线，且任意一点都不属于其他三点形成的三角形，例如，S 在 $\triangle PQR$ 外，如图 4－408．这时线段 SR 与 PQ 的交点 M 就

是 $\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$、$\mathscr{D}_4$ 的公共点. 因为线段 PQ 既在 $\mathscr{D}_1$ 内,又在 $\mathscr{D}_2$ 内,线段 RS 既在 $\mathscr{D}_3$ 内,又在 $\mathscr{D}_4$ 内,故 $M = PQ \cap RS$ 是四个凸图形的公共点.

(3) 若 P、Q、R、S 四点中有一点位于其他三点形成的三角形内,比如 S 在 $\triangle PQR$ 内,如图 4-409. 此时整个 $\triangle PQR$ 在凸图形 $\mathscr{D}_1$ 内,故 S 亦应在 $\mathscr{D}_1$ 内,但 S 是 $\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$、$\mathscr{D}_4$ 的公共点,故 S 是 $\mathscr{D}_1$、$\mathscr{D}_2$、$\mathscr{D}_3$、$\mathscr{D}_4$ 的公共点.

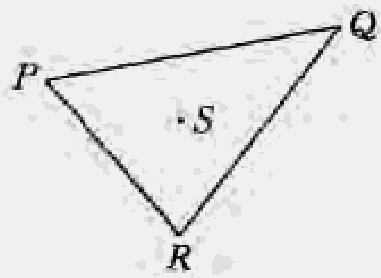


图 4-409

2. 如果 $n = k$ 时命题成立,则 $n = k + 1$ 时命题也成立:

(1) 设 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_{k+1}$ 是凸图形,其中任意三个都有公共点,特别地 $\mathscr{D}_k$ 与 $\mathscr{D}_{k+1}$ 有公共点. 设 $\mathscr{D} = \mathscr{D}_k \cap \mathscr{D}_{k+1}$, $\mathscr{D}$ 也是凸图形. 先证明对于 i、j($1 \leqslant i \leqslant k-1, 1 \leqslant j \leqslant k-1, i \neq j$), $\mathscr{D}_i$、$\mathscr{D}_j$ 和 $\mathscr{D}$ 必有公共点. 这是因为 $\mathscr{D} = \mathscr{D}_k \cap \mathscr{D}_{k+1}$, 而 $\mathscr{D}_i$、$\mathscr{D}_j$、$\mathscr{D}_k$、$\mathscr{D}_{k+1}$ 是四个三三相交的凸图形,根据 $n = 4$ 时的结论,它们有公共点.

(2) 考察 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_{k-1}, \mathscr{D}$ 这 k 个凸图形,由(1)知其中任意三个都有公共点,于是根据归纳假设,k 个凸图形 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_{k-1}$ 及 $\mathscr{D}$ 有公共点. 这个公共点当然也是$(k+1)$个凸图形 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_k, \mathscr{D}_{k+1}$ 的公共点.

由以上可知,对于任意 $n(n \geqslant 3)$,命题均成立.

推广 1 一簇(无限个)有界闭凸图形,若其中任意三个都有公共点,则这簇图形有公共点.

推广 2 $\mathbf{R}^3$ 空间中的 $n(n \geqslant 4)$ 个凸集,若其中任意四个的交集均非空,则这 n 个凸集的交集非空.

推广 3 $\mathbf{R}^n$ 空间的 N 个凸集,若其中任意 $n+1(n+1 \leqslant N)$ 个凸集的交集非空,则这 N 个凸集的交集也非空.

参考文献 [5, pp. 36~37], [18, p. 131].

(张文华)

Pick 定理(Pick's theorem) 顶点都在格点上的简单多边形 π 的面积 $S = I + \frac{1}{2}B - 1$,其中 I 是在多边形 π 内部的格点数,B 是在 π 边界上的格点数.

这个定理是由 Georger Pick 在 1899 年提出的,它是格点几何学中的一条基本定理.

以格点为顶点、其边界上和内部都没有其他格点的三角形,称为本原三角形.可以证明,任何本原三角形的面积都等于 $\frac{1}{2}$.

由于简单多边形都可以用这个多边形内部的、彼此不相交的对角线将其剖分成若干个三角形,而格点三角形又总可被剖分成若干个本原三角形,因此简单多边形总能被剖分成本原三角形.故计算简单多边形 π 的面积时,只需计算剖分得到的本原三角形的个数即可.

设多边形 π 有 p 个顶点(格点),边上(不包括顶点)共有 q 个格点,内部有 I 个格点.

∵ 顶点在多边形 π 内部的所有内角之和 $= I \times 360°$,

顶点在多边形 π 边上的所有内角之和 $= q \times 180°$,

顶点在 π 的顶点处的所有内角之和 $= (p - 2)180°$,

∴ 所有本原三角形的内角之和

$$\sum = I \times 360° + q \times 180° + (p - 2) \times 180°.$$

∴ 本原三角形的个数

$$n = \sum \div 180° = 2I + p + q - 2.$$

由于 $p + q = B$(周界上的格点数),且每个本原三角形的面积为 $\frac{1}{2}$,所以

$$S = \frac{1}{2}(2I + B - 2) = I + \frac{1}{2}B - 1.$$

参考文献 [11,pp. 28~32],[17,p. 100].

(张文华)

闵科夫斯基定理(Minkowski's theorem) 在单位正方形点格

中，任何一个面积大于 4 的中心对称的闭凸区域，如果它的中心在一个格点上，那么它至少还包含另外两个格点.

这个定理是闵科夫斯基提出的，它记载于 1911 年才被发现的闵氏的遗著中，它的发表引起了一连串关于平面闭凸域的显著成果的发现. 数论上许多用别的方法难以解决的问题都能利用这个定理来解决.

关于平面格点的研究，可追溯到高斯. 高斯企图找出在半径等于 r 的圆面中的格点的数目 $f(r)$，并得到公式：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2}=\pi.$$

为了容易明白，这里我们只讨论这个定理的一个特殊情况：一个边长为 2 的正方形，如果其中心与一个格点重合，则这个正方形的内部或边上必定还有其他格点.

设想以点格平面上的某一个格点为中心、充分大的 r 为半径画一个圆，再对圆内及圆周上的每个格点各作一个正方形，使其中心在该格点、边长为 S(不妨设这些正方形都平行地放置着). 如果这些正方形都互不重叠，则它们的面积之和为 $S^2f(r)$，其中 $f(r)$ 表示在半径为 r，圆心在格点上的圆的内部或周界上的格点数. 又，这些正方形都落在以 $r+2S$ 为半径的同心圆内，故

$$S^2f(r)\leqslant\pi(r+2S)^2,\text{即}\quad S^2\leqslant\frac{\pi r^2}{f(r)}\left(1+\frac{2S}{r}\right)^2.$$

现在将 S 固定，让 $r\to\infty$. 由于 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{f(r)}{r^2}=\pi$，故 $S\leqslant 1$. 这就从反面说明：如果在每个格点上作边长为 $1+\varepsilon(\varepsilon>0)$、中心在格点的正方形(且平行地放置这些正方形)，不管 ε 多么小，这些正方形必然会相互部分重叠. 又由于这些正方形都处于同等的地位，所以对于其中任何一个正方形而言，必有另一个正方形与之部分重叠.

设以 A 和 B 为中心的两个正方形部分重叠(如图 4-410),则 AB 的中点 M 必同时在这两个正方形的内部(或周界上).这说明:以格点为中心、以 $1+\varepsilon$ 为边长的正方形(不管如何放置)总包含一个"平分点"(相邻两格点连线的中点).(*)

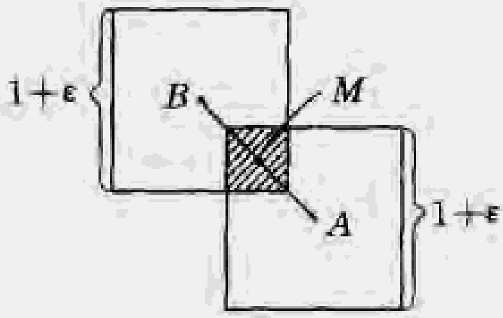


图 4-410

为了最终证明以格点为中心、2 为边长的正方形内部或边界上必定还有其他格点,我们运用反证法.假如以格点 A 为中心、以 2 为边长的正方形内部或边界上没有任何其他格点的话,只要 ε 小于其他格点到这个正方形各边的最短距离,那么把这个正方形的边长扩大为 $2+2\varepsilon$(边保持原来方向、中心仍在 A)以后,它仍不包含其他格点.现在把边长为 $2(1+\varepsilon)$ 的正方形再缩为边长为 $1+\varepsilon$ 的正方形(中心仍在 A,边的方向也不变),则得到的边长为 $1+\varepsilon$ 的正方形不会含有"平分点",但这是与前面导出的结果(*)直接相悖的.

只要稍作调整,上述证明思路可以用来证明一般性命题.

推广 在 n 维空间中,任意一个以原点为对称中心、且体积大于 2^n 的闭凸域 R,必包含一个异于原点的格点.

参考文献 [2,p.97],[6,pp.43~46],[14,p.54].

(张文华)

最小覆盖圆(Minimal covering circle) 平面上直径为 d 的有限点集的最小覆盖圆的半径不大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

这个定理是由 W.H.Young(1863~1942)提出并解决的,称为 Young 定理,它是点集覆盖理论中的一条基本定理.

设平面上的一个有限点集 $E=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$,其直径为 d,

C 是点集 E 的最小覆盖圆. 易知，最小覆盖圆是唯一的.

首先指出，圆周 C 上至少存在 E 中的两个点，理由如次：(1) 如果任意点 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都不在圆周 C 上，则 $OP_i<r$（这里，O 是圆 C 的圆心，r 是圆 C 的半径）. 若取 $r'=\max(OP_1, OP_2,\cdots,OP_n)$，则 $r'<r$. 于是 $\odot O(r')$ 是比 $\odot O(r)$ 更小的覆盖圆，这与 C 是最小覆盖圆的假设相悖. (2) 如果 C 上只有 E 中的一个点，例如 P_1，过 P_1 作圆 C 的切线 l，再分别过 $P_i(i=2,3,\cdots,n)$ 作圆，使它们与 l 相切于 P_1（如图 4－411），这些圆都在圆 C 内部，其中最大的一个（记为 C'）必覆盖 E，但它却比 C 还小，与 C 是最小覆盖圆的假设相悖.

其次，如果最小覆盖圆 C 上只有 E 中的两个点 P_1、P_2，P_1P_2 必是圆的直径；如果 C 上有 E 的三个或三个以上点，则圆周 C 被这些点所分成的圆弧一定全不大于半圆. 其理由如次：如果最小覆盖圆 C 上有大于半圆的弧段 P_1mP_2（如图 4－412），过 P_1、P_2 及圆 C 内的另一点 P_i 作圆，这些圆中的最大者 C' 也是 E 的覆盖圆，但它比 C 更小，这与 C 是最小覆盖圆的假设相悖.

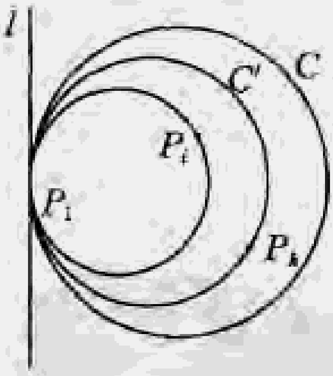


图 4－411

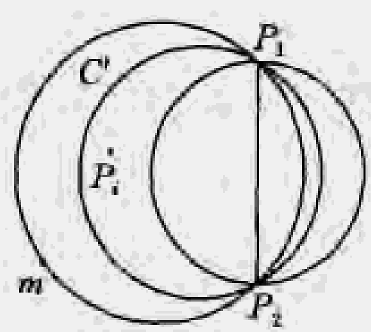


图 4－412

最后，通过计算来估计最小覆盖圆的半径 r.

若圆周 C 上恰有两点 P_1、P_2，则 P_1P_2 是圆 C 的直径. ∵ d 是点集 E 的直径，P_1、$P_2\in E$，∴ $P_1P_2\leqslant d$.

$$\therefore r=\frac{1}{2}P_1P_2\leqslant\frac{1}{2}d<\frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

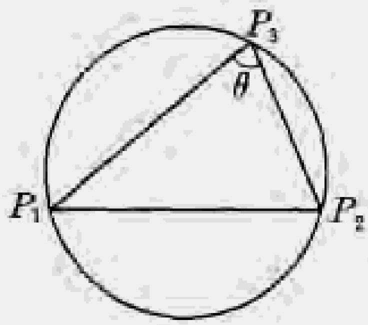


图 4-413

若圆周 C 被 E 中的点 P_1、P_2、P_3 所分成的圆弧都不大于半圆，则 $\triangle P_1P_2P_3$ 是非钝角三角形. 设边 P_1P_2 最长，记 $\angle P_1P_3P_2=\theta$，$60^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$. 于是

$$2r=\frac{P_1P_2}{\sin\theta},$$

$$r=\frac{P_1P_2}{2\sin\theta}\leqslant\frac{P_1P_2}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}P_1P_2\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

顺便提一句，Young 还研究了 n 维空间中的类似问题，指出：若直径为 d 的 n 维有限点集的最小覆盖球的半径为 r，则

$$r\leqslant d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}.$$

参考文献 [7,pp.116～124].

（张文华）

直尺刻度问题(Marks on the ruler) 一根一定长度的直尺上，至少标出几条刻度线，才能利用已给刻度线“一次地”(即一次利用已给刻度线的差)找出其他刻度线？

号称“游戏数学三大师之一”的美国人 H. E. Dudeney(1857～1931)指出，一把 13 厘米长的尺子，只要有四条刻度线(1,4,5,11)，就能一次性地读出 1～13 厘米的整数长度：

$2=13-11$，$3=4-1$，$6=11-5$，$7=11-4$，$8=13-5$，$9=13-4$，$10=11-1$，$12=13-1$.



图 4-414

这个问题也可以利用另外四条刻度线来解. 例如标出 1、2、6、

10 四个刻度，其他刻度线就可以利用它们“一次性”地得出.

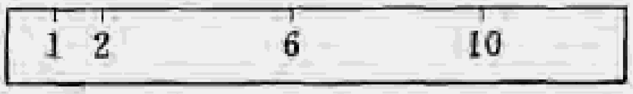


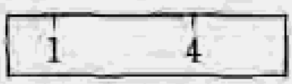
图 4－415

这个解法是由矩阵博士(Dr. Matrix，马丁·加德纳笔下的一个虚构人物)给出的.

在 36 厘米长的直尺上至少要有八个刻度，才能量出 1～36 厘米的一切整数长度，这八个刻度应分别标在 1，3，6，13，20，27，31，35 处. 该解法由 John Leech 首先发现. 他的论文《1，2，3，…，n 的差数表示》被认为是经典性的，刊载于《伦敦数学会杂志》(*Journal of the London Mathematical Society*)第 31 卷.

如果只有三个刻度，则最大限度只能测到 10 厘米. 因为这三个刻度，连同尺子两端的两个刻度，实质上是五个刻度，而能测量的长度，显然是这五个数字中每两个数字的差，由于组合数 $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$，所以 10 厘米显然是最大限度.

美国数学家 Solomon W. Golomol 指出了直尺刻度问题与图论中的完全图之间的联系(见图 4－416、417)：



6厘米的直尺

图 4－416

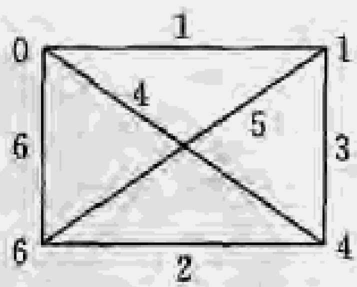


图 4－417

在任意长的尺子上，需要标记刻度的最小个数及其具体刻法，这个问题迄今还未解决.

由于问题的复杂性，一些名家给出的解法也往往有不足之处

而受到后人的批驳. 例如,Dudeney 认为,只要有六个中间刻度,就可以从 1 厘米一直量到 22 厘米,并指出了两种具体刻法:

(甲):1,2,3,8,13,18;

(乙):1,4,5,12,14,20.

一般认为,Dudeney 的解法是最好的结果了. 然而,日本的藤村幸三郎先生指出,Dudeney 的结果还可改进:中间刻六个刻度的话,可测量的长度可以是 23 厘米,具体刻法是:

1,4,10,16,18,21.

藤村先生说,这个方法是日本富士市的一个名叫山本富男的小人物想出来的,此人还在研究圆形尺的刻度问题呢.

参考文献 [20,pp. 160~169],[21].

(谈祥柏 张文华)

潜入侦察问题(The Scout problem) 在敌人占领的小岛(图 4-418 中以 O 点表示)上有一个探照灯,其照射半径为 $a=1$ 千米,绕垂直轴匀速旋转一周所需的时间为 $T=1$ 分. 现我方一艘侦察快艇要潜入该岛. 试问:为避开敌人的探照灯,该艇的最低速度应多少? 应如何行驶?

在军事上,探照灯能照射到的以 O 为圆心、以 a 为半径的圆域称为"暴露区". 无疑,快艇潜入的最有利时机是探照灯刚扫过潜入点 A 的时刻. 如果快艇沿直线径直驶向小岛,想不被探照灯发现,必须在探照灯绕完一周之前到达,即

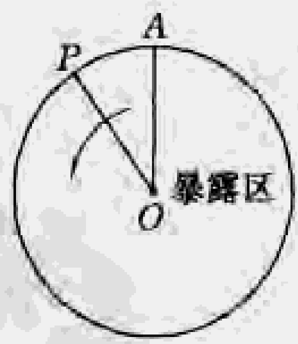


图 4-418

$$\frac{a}{v} < T, v > \frac{a}{T} = 60 \text{ 千米 / 时},$$

即快艇的速度必须不小于 60 千米/时.

为了安全潜入小岛,这个速度能不能减小呢?

请注意，对于探照灯光线 OP 来说，虽然它的角速度 $\omega=\frac{2\pi}{T}$ 是固定不变的，但是对于 OP 上的不同点来说，其旋转时的线速度都是不同的，点离圆心 O 越近，其线速度就越小．因此，速度为 v 的快艇若能在探照灯旋转一周之前到达半径为 $r=\frac{vT}{2\pi}$ 的圆上，以后便可以在这个圆上行驶而不被发现了．以 O 为圆心、$r=\frac{vT}{2\pi}$ 为半径的圆就是“安全区”．在安全区内，光点旋转的线速度小于快艇的速度 v，在图 4－419 中，我们用由长到短的箭头来表示线速度的递减情况．

如果快艇径直驶向小岛，要赶在探照灯再次照到之前到达安全区，快艇的速度 v 必须满足条件

$$\frac{a-\frac{vT}{2\pi}}{v}<T.$$

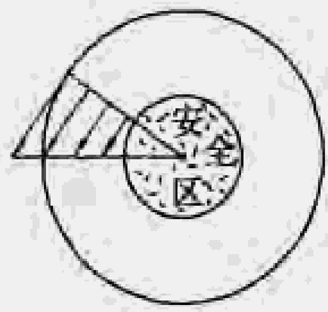


图 4－419

即 $$v>\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2\pi}\right)}\cdot\frac{a}{T}\approx 51.7\text{ 千米 / 时}.$$

换句话说，只要快艇的速度不小于 51.7 千米/时，它就能顺利完成任务．

现在问：这个速度还能减小吗？

回答是：可以，但要运筹得当．

设所需最低速度（临界速度）为 v_0，安全区的圆半径为 $\frac{T}{2\pi}v_0$，快艇从 A 点潜入到达安全区所需的时间为 t_0，快艇可能到达的区域是以 A 为圆心、v_0t_0 为半径的圆弧形区域 D（图 4－420 中的阴影区域）．从 O 作这个圆弧

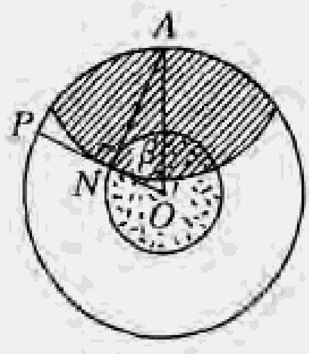


图 4－420

的切线 OP，切点为 N，记 $\angle AON = \beta$. 如果快艇沿 AN 方向行驶，t_0 小时后到达 N 点，而 N 点应在安全区的边界上．于是

$$NO = r = v_0 \frac{T}{2\pi}, \tag{1}$$

$$AN = v_0 t_0, \tag{2}$$

$$\frac{AN}{NO} = \operatorname{tg} \beta, \tag{3}$$

$$NO = a \cos \beta. \tag{4}$$

又由于探照灯要照到快艇，其旋转角应为 $2\pi + \beta$，其间所需时间为 $(2\pi + \beta) \div \frac{2\pi}{T}$，因此

$$(2\pi + \beta) \div \frac{2\pi}{T} = t_0, \text{即} \quad 2\pi + \beta = \frac{2\pi t_0}{T}. \tag{5}$$

因此，
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0 t_0}{\frac{v_0 T}{2\pi}} = \frac{2\pi t_0}{T} = 2\pi + \beta. \tag{6}$$

解超越方程　$\operatorname{tg} \beta = 2\pi + \beta$，得 β 的近似值

$$\beta \approx 0.46\pi.$$

又由①、④可得

$$v_0 = \frac{2\pi a \cos \beta}{T}. \tag{7}$$

将 β 的值代入，得

$$v_0 \approx \frac{0.8a}{T} \approx 48 \text{ 千米 / 时}.$$

因此，快艇的最低速度应为 48 千米/时，应沿 AN 方向行驶.

参考文献　[8,pp.63～68].

（谈祥柏　张文华）

干酪问题(The Cheese problem)　一块多孔的正方形干酪，能

否分切成若干凸多边形小块，使每小块都含有一个小孔？或者说，若在正方形内部排列着若干个互不相交的圆，能否将此正方形分割成若干个凸多边形，使每个凸多边形刚好含有一个圆？

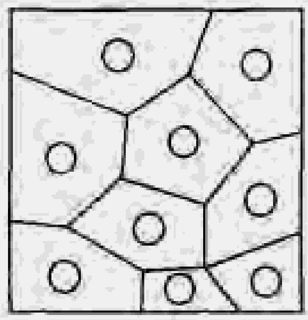


图 4-421

当各圆半径均相等时，可以如下进行. 设已知圆的圆心为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$. 显然，到圆 C_i 的距离小于到圆 $C_j(j\neq i)$ 的距离的点，在以连心线 C_iC_j 的中垂线 l_{ij}（即这两圆的根轴）为界的、包含点 C_i 的那个半平面 E_{ij} 内. 于是 $n-1$ 个半平面 $E_{ij}(j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$ 的交集 $\{M \mid |MC_i|\leqslant|MC_j|$，对于所有的 $j\neq i\}$ 是一个凸多边形（在正方形内部分），这个凸多边形包含了圆 C_i，但不包含其他的圆. 若依次令 $i=1,2,\cdots,n$，则得到 n 个凸多边形，其中每一个凸多边形只包含一个圆. 显然，这些多边形覆盖了整个正方形，而且没有公共的内点.

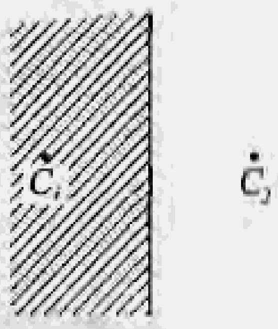


图 4-422

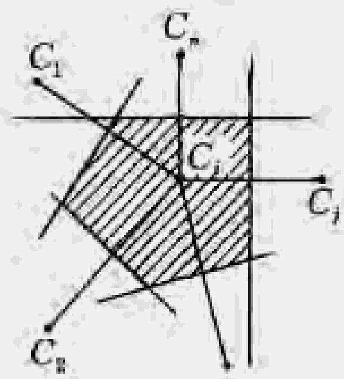


图 4-423

当各圆半径不全相等时，只要用两圆的等幂轴（根轴）来替代上述连心线的中垂线，问题同样可以解决. 设已知圆为 $\odot C_1(r_1), \odot C_2(r_2), \cdots, \odot C_n(r_n)$，半径 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 不全相等. 设 l_{ij}' 为 $\odot C_i(r_i)$ 和 $\odot C_j(r_j)$ 的等幂轴，F_{ij} 为以

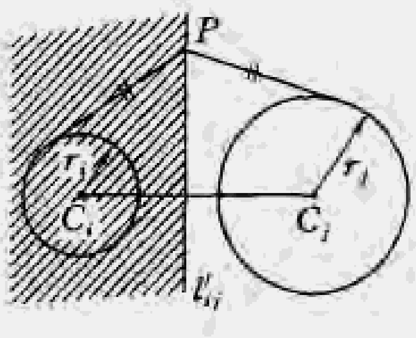


图 4-424

l_{ij}'为界的、包含$\odot C_i(r_i)$的那个半平面，则 $n-1$ 个半平面 $F_{ij}(j=1,2,i-1,i+1,\cdots,n)$的交集$\{M|(MC_i^2-r_i^2)\leqslant(MC_j^2-r_j^2)$，对于所有的 $j\neq i\}$是一个凸多边形(正方形内部分)，它含且只含$\odot C_i(r_i)$.

参考文献 [8,pp.54～56].

(谈祥柏 张文华)

行星凿洞问题(The holing of a planet) 在一个小实心球和一个行星上分别凿一个 6 寸高的圆柱形洞(圆柱的轴线过球心)，各自剩下部分的体积那个大?(注：寸是中国古代计量单位，1 米 = 30 寸)

本题原出处不明，但由于科普大师马丁·加德纳的报导而传遍世界.

如图 4-425，球体被凿掉的部分由一个圆柱和两个球缺组成.

圆柱的高是 6 寸，底面圆的半径为 $\sqrt{R^2-9}$寸，其体积为 $V_{柱}=6\pi(R^2-9)$ 寸^3.

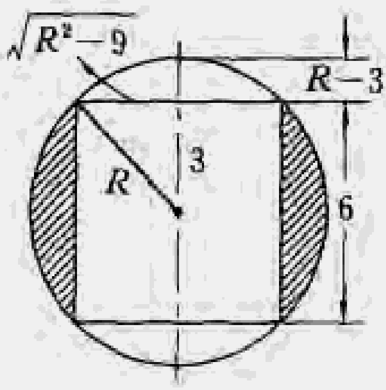


图 4-425

球缺的高是$(R-3)$寸，底面圆半径是$\sqrt{R^2-9}$寸，其体积为

$$V_{球缺}=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2)$$

$$=\frac{1}{6}\pi(R-3)[(R-3)^2+3(R^2-9)]$$

$$=\frac{\pi}{3}(2R^3-9R^2+27)(寸^3).$$

所以剩下部分的体积是

$$\begin{aligned}V&=V_{球}-V_{圆柱}-2V_{球缺}\\&=\frac{4}{3}\pi R^3-6\pi(R^2-9)-\frac{2\pi}{3}(2R^3-9R^2+27)\\&=36\pi(寸^3).\end{aligned}$$

这真是一个出乎意料的结果，它竟然是一个常数，与球半径的大小完全无关！这个结果告诉我们，在硕大无朋的行星上打洞跟在一个

小球上打洞一样，只要两个洞的高度相等，剩下的体积就一样大.

其实，只要认真想一想，你就不会感到奇怪了. 因为在行星上打一个高度仅为 6 寸的洞的话，这个洞一定大得不可思议，这时行星的 99.999 999 99%将被打掉，剩下的就只有 36π 寸^3 了.

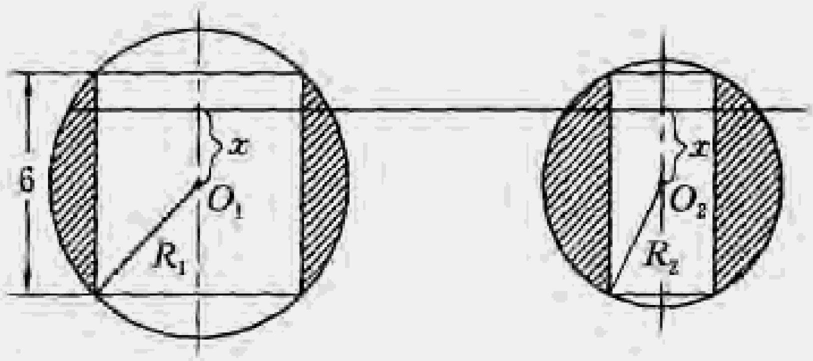


图 4－426

上述事实也可以用祖暅原理来解释. 如图 4－426，设想把两个球的球心置于同一水平面上，然后用水平面(垂直于洞的轴线)截打洞后两个球的剩余部分，显然截得的是两个圆环，它们的面积都是 $\pi(9-x^2)$，其中 x 是球心到截面的距离，$-3\leqslant x\leqslant 3$. 根据祖暅原理，剩余部分的体积是相等的，与球半径的大小无关. 本文可参考 *Mathematical carnival*, Simon & Schuster, New York, 1966.

(谈祥柏　张文华)

参考文献

1　吴文俊主编. 世界著名科学家传记・数学家(Ⅱ). 北京：科学出版社，1992

2　谷超豪主编. 数学词典. 上海：上海辞书出版社，1992

3　上海教育出版社编. 初等数学论丛(第 6 辑). 上海：上海教育出版社，1983

4　上海教育出版社编. 初等数学论丛(第 9 辑). 上海：上海教育出版社，

1986

5 吴利生,庄亚栋编著.凸图形.上海:上海教育出版社,1982

6 D.希尔伯特,S.康福森著.直观几何(上册).北京:高等教育出版社,1959

7 [德]汉斯·拉德梅切,奥托·托普利茨著.数学欣赏.北京:北京出版社,1981

8 [苏]H.Б.瓦西里也夫,B.П.库金马赫尔.趣话曲线.福州:福建人民出版社,1983

9 [德]H.德里.100个著名初等数学问题——历史和解.上海:上海科学技术出版社,1982

10 [苏]B.Д.契斯佳可夫著.初等数学古代名题集.北京:科学普及出版社,1984

11 [美]R.亨斯贝尔格著.数学中的智巧.北京:北京大学出版社,1985

12 [西班牙]米盖尔·德·古斯曼著.数学探奇.上海:上海教育出版社,1993

13 [美]R.D.莫尔丁著.数学探索(苏格兰咖啡馆数学问题集).成都:四川教育出版社,1987

14 [美]R.洪斯贝格尔著.数学瑰宝(第1辑).成都:四川教育出版社,1985

15 [美]M.克莱因著.古今数学思想(第1册).上海:上海科学技术出版社,1979

16 [美]H.伊乌斯著.数学史菁华(上卷).成都:四川教育出版社,1988

17 Ross Honsberger. *Mathematical Morsels. The Dolciani Mathematical Expositions No.* 3, Published and Distributed by The Mathematical Association of America, 1978

18 T. Croft, J. Falconer, K. Gug. *Unsolved problem in Geometry*

19 V. Boltionskii. *Hilbert Third problem*, 1978

20 John Leech. *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 31 (1956)

21 Martin Gardner. *The Incredoble Dr. Matix*, *Scientific American*, 1966,1

22 A. J.W. Duijvestijn. *Plue-prefect Square*, *Scientific American* 中的 *Scien and the Citizen* 专栏,1978,6

23 *Scientific American*, 1958,11

高等数学

一 极限和连续

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=?$

16 世纪末，苏格兰人纳皮尔编制了世界上第一个对数表．纳皮尔对数是相当于底数为 $(1.000\,000\,1)^{10\,000\,000}$ 的对数，其底数可写成

$$\left(1+\frac{1}{10\,000\,000}\right)^{10\,000\,000}$$

的形式．

把 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 作为对数的底数，如果 n 越大，真数 N 的间隔就越小，这样的对数表达就越有用，从而人们必然要考察极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，并试图用其极限值作为对数的底．

这个极限存在性的证明可归结为证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增且有上界．

根据平均值不等式，当若干个正数不全相等时，其几何平均数小于算术平均数，所以

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

从而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

这就是说,数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增.

根据平均值不等式,当 $n>5$ 时有

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot 1^{n-5}}<\frac{6\cdot\frac{5}{6}+(n-5)\cdot 1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

从而 $\left(\frac{5}{6}\right)^6<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,

所以 $\left(\frac{6}{5}\right)^6>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{6}{5}\right)^6<3$.

上式是在 $n>5$ 时导出的,但由于数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 递增,所以当 $n\leqslant 5$ 时也成立. 这就表明了数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有上界. 从而存在极限,它是一个无理数. 1727 年,欧拉用"e"来表示这个极限,即

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

利用公式

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

可以算得

$$e=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$$

无论在理论上还是在实用上,e 这个数都有特殊的重要性.

在一些具有复利率的现象中，例如，化学反应，放射性物质的衰变，物体的冷却，电容器上电压的变化，微生物的增长，等等，人们研究量的变化时，往往是由 $A\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^k$ 型结构式，经过极限过程与数 e 相联系．

以 e 为底的对数叫自然对数，自然对数的求导运算特别方便，所以在理论研究时宁愿采用自然对数而不用常用对数．

参考文献　[37,pp.296～299],[41,pp.28～29].

（刘云章）

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=?$

17 世纪，微积分问世后，人们经常要考察两个无穷小量之比的极限．

设 $x>0$，如图 5-1 所示，AB 弧是半径为 1 的圆的一部分．$\triangle OAC$ 的面积显然等于 $\frac{1}{2}\sin x\cos x$，它小于扇形 OAB 的面积 $\frac{1}{2}x$，而这个扇形的面积又小于 $\triangle ODB$ 的面积

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}x=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}.$$

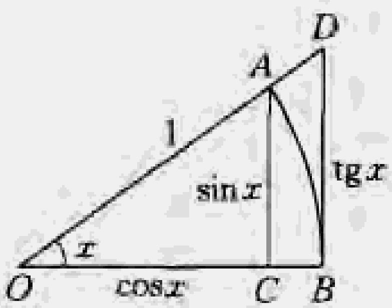


图 5-1

因此，　$\frac{1}{2}\sin x\cos x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$，

即　　$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$.　　①

当 $x\to 0$ 时，$\cos x\to 1$，$\frac{1}{\cos x}\to 1$，因此

$$\frac{x}{\sin x}\to 1\text{，从而}\frac{\sin x}{x}\to 1.$$

因为比式 $\frac{\sin x}{x}$ 在用 $-x$ 代 x 时不改变，由此可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

上述推导过程，借助于初等几何中图形面积的知识．下面是一个分析的解法，其方法是用分析法定义三角函数，使它们摆脱几何直观性．例如，用无穷级数来定义，规定

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad ②$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad ③$$

有了这个定义，就可以不依赖不等式①而直接导出所需极限．实际上，由②可得（$x \neq 0$ 时）

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

显然右边的幂级数的和在 $x = 0$ 处是连续的，于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right) \\ &= 1 - 0 + 0 - \cdots \\ &= 1. \end{aligned}$$

该极限与 $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 合称为"微积分中两个重要极限"．

参考文献 [24, pp. 38～39], [42, pp. 15～16].

（刘云章）

黎曼函数(Riemann function) 在区间[0,1]内定义函数 $f(x)$：若 x 是有理数而表示为不可通约分数 $\frac{p}{q}$，则 $f(x) = \frac{1}{q}$；对于无理数 x，令 $f(x) = 0$，则函数在任一有理点有普通间断，同时在任一无理点它是连续的．

19 世纪黎曼考察了该函数．

设 x_0 是所考察的区间内的任意一点. 若指定任意数 $\varepsilon>0$,则不超过 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数 q 仅有有限个数存在. 意即,在区间内只能找出有限个有理点 $\frac{p}{q}$ 使 $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$. 点 x_0 可以用不含任一个这种点在内(或许要除去点 x_0 本身)的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 来包围住. 那么只要 $|x-x_0|<\delta(x\neq x_0)$, 不论 x 是否是有理数,在任何情形下常有 $|f(x)|<\varepsilon$. 意即,对于任意点 x_0 存在着

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 是无理点,则又有 $f(x_0)=0$,即函数在这点为连续;又若 x_0 是有理点,则 $f(x_0)$ 异于 0,故有两方的普通间断.

参考文献 [19, pp. 145~146].

(刘云章)

二 微分和积分

怎样求抛物线弓形的面积(How to calculate bow-shaped area)

在阿基米德之前,有些数学家已能推导圆弓形或双曲弓形的面积,但是从未有人试图求抛物线弓形的面积. 阿基米德用穷竭法来计算抛物线弓形的面积.

阿基米德的方法接近于现行的积分法. 如图 5-2,过弦 AB 的中点 L,作平行于抛物线对称轴的直线交抛物线于点 C;同理,过 CA、CB 的中点 M、N 作同样的平行线得点 D、E. 阿基米德根据抛物线的几何性质证明了

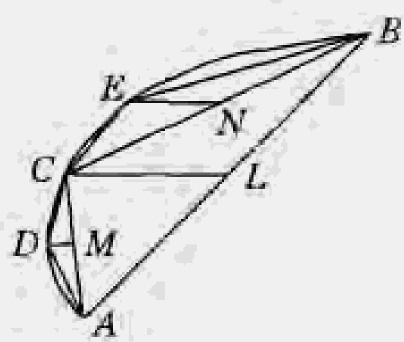


图 5-2

$$S_{\triangle CAD}+S_{\triangle CEB}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACB},$$

重复地应用此方法就可得抛物线弓形的面积.

用现代的说法,这弓形的面积就等于下面无穷级数的和:

$$S_{\triangle ABC}+\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{4^2}S_{\triangle ABC}+\frac{1}{4^3}S_{\triangle ABC}+\cdots$$

$$=\frac{4}{3}S_{\triangle ABC}.$$

古希腊人对无限过程缺乏认识,不懂得无限运算.阿基米德没有运用无穷级数进行计算,他先算出前 n 项,巧妙地加上一个余项,估算出弓形的面积是 $\frac{4}{3}S_{\triangle ABC}$,最后再用归谬法加以证明.

阿基米德计算抛物弓形面积的方法是创立定积分的先声,只要用现代的极限方法,就可使阿基米德的方法严格化,使其成为和现代积分法本质上相同的东西.

参考文献 [39,pp.48~54].

(刘云章)

怎样作曲线的切线(How to draw the tangent line of curve)

古希腊人曾经研究过圆锥曲线的切线,阿基米德还给出螺线的切线构造法,他们把圆锥曲线的切线定义为和曲线只接触于一点而且位于曲线的一边的直线.

到了17世纪,人们对光学的研究,需要研究光线通过透镜的通道,必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律.重要的是光线同曲线的法线间的夹角,法线是垂直于切线的,所以问题在于求出法线或者是求出切线.另外,人们对运动物体的研究也牵涉到切线问题.运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向,是轨迹的切线方向.

古希腊人的切线定义,对于17世纪所碰到的较复杂的曲线已不适用了.这时法国几何学家、物理学家Roberval提出一种看法,他认为曲线是一个动点在两个速度作用下运动的轨迹.例如,

从炮筒里发射的炮弹是在水平速度和垂直速度的作用下运动的．他把切线定义为合速度方向的直线．这样的定义比古希腊人的定义要复杂些，但它能适用于较多的曲线．一方面，这个概念是有价值的，它把纯几何同力学联系起来了．但在另一方面，这个切线定义在数学领域内是令人讨厌的，因为它是在物理概念上定义切线的．很多曲线是在与运动无关的情况下产生的，切线的这个定义就相应地不适用了．

费马对确定函数的极值问题很感兴趣．函数的图像中，极大点对应一个峰顶，它比相邻的其他一切点都高，而极小点对应一个谷底，它比相邻的其他一切点都低．为了刻画极大点和极小点的特征，很自然地要用到曲线的切线概念．人们在费马 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》中发现，他曾设计了一个求切线的方法．他认为切线是当两个交点重合时的割线．费马的看法和现代的切线定义还稍有出入．事实上，切线只是割线的极限，它本身不是割线．

巴罗和莱布尼茨都给出了求曲线的切线的方法．巴罗用曲线的方程，例如 $y^2 = px$，设 x 取得一个增量 e，则 y 得到一个相应的增量 a，这时

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

然后他去掉 a 和 e 的高次幂（如果有的话），这相当于用图 5－3 中的$\triangle PRP'$代替曲边三角形 PRQ，即用直线代替曲线，由此得出

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}.$$

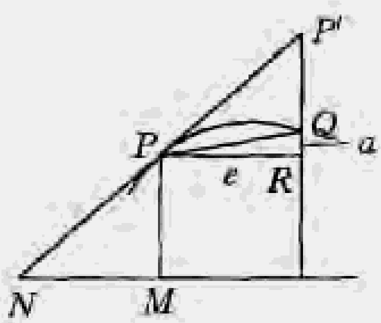


图 5－3

巴罗说，当点 Q 无限接近点 P 时，$\frac{a}{e} = \frac{PM}{NM}$，因而

$$\frac{PM}{NM}=\frac{p}{2y}.$$

因为 PM 是 y，所以他算出 NM（所谓“次切距”），从而知道 N 的位置，即可作出切线．巴罗和莱布尼茨实质上已得到了一个结果：一点切线的斜率可以用此点的导数来表示．不过，用极限概念来表述切线定义则还是 19 世纪极限概念明确之后的事．

参考文献 [34，pp.51～54].

（刘云章）

弧长计算问题(Arc length calculation problem)

曲线的求长问题早就引起了人们的注意．但是，长期以来一直认为一段代数曲线决不会和一段可以画出的直线具有同样的长度．也就是说，一直认为代数曲线的求长问题——画出一段直线使其长度等于给定的曲线长——是不可解的．到了 17 世纪 50 年代，一些数学家应用无穷小方法证明了这种悲观的看法是不正确的．

最早的曲线求长法是英国人 W. Neile(1637～1670)在 1657 年提出的半立方抛物线 $y^2=x^3$ 的求长法．用一般的术语说，Neile 的方法是，为了计算曲线 $y=f(x)$ 在区间$[0,a]$上的一段的长度，先设法引进一条辅助曲线 $z=g(x)$，使得在$[0,a]$上，这条曲线下的面积是

$$A_i=\int_0^{x_i}g(x)\mathrm{d}x=f(x_i)=y_i. \qquad ①$$

最后，得到所求曲线长为

$$S=\int_0^a\sqrt{1+[g(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

由微积分基本定理可以看出，为了得到①式，辅助曲线的适当选择就是取 $g(x)=f'(x)$. W. Neile 没有得到这个一般性的

结论.

还有一些数学家求出了摆线的一个拱的长度,等角螺线的长度……这些人一般是用内接折线去逼近曲线的,先求出折线各边的和,然后随着每条边长的缩小而使边数成为无穷大.这正是用定积分求曲线长的萌芽.

曲线的求长问题,包括两个问题,一是要给曲线弧长下定义,二是要提供求弧长的实际的计算方法.解决这些问题是微积分问世以后的事.

为了考虑 AB 弧的长,在 AB 弧中作一个有 n 个短边的内接折线,测出这个折线的总长度 L_n,把 L_n 作为一个近似值;令 n 无限增大,且让折线的最大边的边长趋于零,则

$$L=\lim_{n\to\infty}L_n,$$

就叫弧 AB 的长.如果这个数 L 有穷,那么 AB 弧叫做可求长的.

人们首先发现,假设平面曲线弧 AB 的参数方程为

$$x=\varphi(t),y=\psi(t),t_0\leqslant t\leqslant T, \qquad ②$$

其中 φ 和 ψ 及其微商均在$[t_0,T]$上连续,则该曲线弧可求长,且长度为

$$S=\int_{t_0}^{T}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

为了寻求曲线可求长的充分必要条件,数学家 Jordan 引进了有界变差函数概念,并且给出了如下定理:

Jordan 定理 曲线②可求长的充分必要条件为函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 在区间$[t_0,T]$上皆为有界变差.

17 世纪,在研究天文学的过程中,需要求出椭圆的周长.这就难住了 17 世纪的数学家们.当时,有的数学家声称椭圆的周长不能用已知函数表出.有一段时期数学家们对此问题的进一步工作表示失

望，由此导致了后世对椭圆积分的研究．

参考文献 [20，pp. 567～568]，[23，pp. 82～85]，[34，pp. 132～133]，[39，pp. 159～163].

（刘云章）

Jordan 定理（Jordan theorem） 见弧长计算问题.

无穷小悖论（Infinitesimal paradox）

17 世纪微积分刚一形成，就在各个领域得到广泛应用．但是另一方面，微积分的理论基础还很不完善，特别是一些定理和公式的推导，在逻辑上前后矛盾，不好理解，因此受到非难和攻击. 这些矛盾集中体现在无穷小这个概念上．无穷小量是微积分的基本概念之一，牛顿在一些典型的推导过程中：第一步，他用了无穷小量作分母进行除法；第二步，他又把无穷小量看做零，去掉那些包含它的项，从而得到所要的公式．例如，为了求函数 $x=t^2$ 的导数，按牛顿的流数术，先给 t 添加一个增量 o（无穷小量，牛顿称它叫"刹那"），相应地，x 便从 t^2 变为 $(t+o)^2$，故 x 获得增量为 $(t+o)^2-t^2=2t\cdot o+o^2$．计算两者的比值

$$\frac{(t+o)^2-t^2}{o}=\frac{2t\cdot o+o^2}{o}=2t+o.$$

最后，再在所得的结果中把 o 项去掉．这样便得到牛顿所说的"最终比"

$$\dot{x}=2t.$$

显然，这就是 x 关于 t 的导数．用莱布尼茨的记法，就是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t$．

1734 年，英国哲学家、大主教贝克莱发表《分析学家》一文，对当时的微积分进行了猛烈的抨击．贝克莱指出：牛顿算法中的增量 o 究竟是零还是非零？如果说是零，怎么能用它去作分母？如果它不是零，则 $2t+o$ 式中的 o 就不能舍掉．这就是数学史上著名的无穷小悖论，

又叫“贝克莱悖论”. 贝克莱嘲弄牛顿的流数(即导数)是“逝去的量的鬼魂”,攻击微积分的推导是“分明的诡辩”. 贝克莱之激烈攻击微积分,一方面是出于他极端恐惧当时自然科学的发展所造成的对宗教信仰的威胁;另一方面是由于当时的微积分理论缺乏牢固的基础,连牛顿自己也无法摆脱概念上的混乱. 在整个18世纪,对于微分和积分运算的研究具有一种“特殊的痛苦”,在数学界形成混乱局面,造成了数学史上的第二次危机. 数学家们不得不认真对待贝克莱悖论,借以解除数学的第二次危机. 当时,有的人试图弄清无穷小量的本质,有的人主张排除无穷小量,但是都没有解决问题. 这是由于数学的研究对象已从常量扩展到变量,而人们对变量数学特有的规律还不十分清楚,对变量数学和常量数学的区别和联系还缺乏了解,对有限和无限的对立统一关系也还不明确. 习惯于处理常量数学的传统思想方法,就不能适应变量数学的新要求,仅用旧的概念无法认识这种“零”与“非零”相互转化的辩证关系.

到了19世纪,柯西、魏尔斯特拉斯详细而有系统地发展了极限理论后,这个危机才算基本解决. 极限概念揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系. 从极限的观点看来,无穷小量不过是极限为零的变量. 这就是说,在变化过程中,它的值可以是“非零”,但它变化的趋向是“零”,可以无限地接近于“零”.

参考文献 [34,pp.150~158],[10,pp.130~131].

(刘云章)

贝克莱悖论 见无穷小悖论.

阶乘 $n!$ 的推广问题(Problem of spreading $n!$)

18世纪,由于研究插值理论与反微分两个问题,欧拉对非整数的 n 给出 $n!$ 的意义.

起初欧拉发现

$$n!=\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n\frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n\frac{3}{n+3}\right]\cdots$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^n \frac{k}{k+n}, \qquad ①$$

如果将这无穷乘积中的公因子约去，上面的等式形式上看来是正确的. 然而，这个$n!$的分析表达式却不像基本定义$n(n-1)\cdots\cdot 2\cdot 1$那样，它对所有的$n$(除了$n$是负整数外)都有意义.

欧拉曾用①作为阶乘概念的推广，并给出其等价形式

$$n! = \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}.$$

后来，欧拉又发现，对正整数n，

$$\int_0^1 x^e (1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{n!}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}.$$

从而，找到了$n!$的另一个表达式

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n \mathrm{d}x. \qquad ②$$

右边的积分对几乎任意一个n都有意义. 到了1781年，欧拉给出了它现在的形式，那是在②中令$t = -\log x$而得到的

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

不难证明积分

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

对任意的$\alpha > 0$都收敛，并确定出α的函数. 勒让德称它为伽马函数，用$\Gamma(\alpha)$表示，即

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$$

伽马函数是继初等函数之后，在分析及分析应用中最重要的函数

之一.

利用分部积分,可得

$$\alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx,$$

这就是说

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

重复应用这个公式,就得出

$$\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdots(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha),$$

利用这个公式计算 Γ,对于无论多么大的 α 值,总可以化为是对于 $\alpha<1$ 的情形来计算 Γ.

在这式中取 $\alpha=1$,并注意到

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1,$$

那么就发现 $\Gamma(n+1)=n!$, 也就是

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx \ (n\text{ 为自然数}). \qquad ③$$

按照通常的规定,$0!=1$,所以这个公式在 $n=0$ 的情形下也还是对的. 但是等式③右端的积分究竟不同于表达式 $n!$,它不仅对于整数 n,而且对于任何大于 -1 的数 n 都有意义. 因此很自然地对于大于 -1 的任何非整数 n,我们可以利用公式③来定义表达式 $n!$. 因此,Γ 函数乃是阶乘 $n!$ 的推广.

参考文献 [34,pp.144~146],[25,pp.548~549].

(刘云章)

怎样估算 $n!$ (How to estimate $n!$)

大数的阶乘,无论在理论研究上,还是在实际计算中,都起着重要的作用. 但是,大数的阶乘,按照它的定义,是很复杂且不便

于估计其数值的．不要说它的精确数值，就连它大小的级，人们也无法直接求得．所以无论对于理论还是实际应用来说，当 n 很大时，能找出一个 $n!$ 的既简单而又便于估计的近似表达式，是一件很重要的事情，公式

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \tag{①}$$

给出了 $n!$ 的分析表达式，为这项工作奠定了基础．

根据①式，可以导出 $n!$ 的一个简单近似公式，即斯特灵公式：

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}[1 + o(1)].$$

首先在积分①中，令 $x = n(1+z)$，得

$$n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{\infty} \{(1+z)e^{-z}\}^n dz.$$

再令 $(1+z)e^{-z} = \phi(z)$，于是

$$n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{\infty} \{\phi(z)\}^n dz. \tag{②}$$

为了估计积分

$$I(n) = \int_{-1}^{\infty} \{\phi(z)\}^n dz, \tag{③}$$

我们把整个积分区间 $(-1,+\infty)$ 分成三个部分：$(-1,-\lambda)$，$(-\lambda,\lambda)$ 以及 $(\lambda,+\infty)$，其中 $\lambda = n^{-\theta}\left(\frac{1}{3} < \theta < \frac{1}{2}\right)$．与此相应，积分③也分成了三项，下面分别地估计它们的值．

(1) 估计积分 $I_1(n) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \{\phi(z)\}^n dz$．

因为 $\theta > \frac{1}{3}$，$1-3\theta<0$，所以有

$$|nz^3| \leqslant n\lambda^3 = n^{1-3\theta} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

在整个区间$(-\lambda,\lambda)$上，

$$\{\phi(z)\}^n = e^{-\frac{nz^2}{2}}\{1+\gamma nz^3\},$$

其中量γ当$n\to\infty$时在区间$(-\lambda,\lambda)$上保持一致有界：

$$|\gamma| < c \quad (n\to\infty, |z|\leqslant\lambda),$$

这里c是一个正的常数．因此

$$\left|I_1(n) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz\right|$$

$$\leqslant cn\lambda^3\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz < cn^{1-3\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz.$$

但是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz = \sqrt{\frac{2}{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{n}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}},$$

所以当$n\to\infty$时

$$\left|I_1(n) - \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz\right| < cn^{1-3\theta}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad ④$$

积分

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz$$

与我们上面算出来的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$$

之差是积分

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{nz^2}{2}}dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\int_{\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{-u^2}du$$

的值的两倍；由于 $\lambda = n^{-\theta}$，最后这个积分的下限等于 $\dfrac{n^{\frac{1}{2}-\theta}}{\sqrt{2}}$，从而根据 $\theta<\dfrac{1}{2}$，当 n 无限增大时，这个下限也无限增大，因此，整个这最后一个积分当 $n\to\infty$ 时是一个无穷小量，从而上述等式的右端是一个 $o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 型的量．因此，关系式④就给出

$$\left|I_1(n)-\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\right|<2\int_{\lambda}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{nz^2}{2}}\mathrm{d}z+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

或即

$$I_1(n)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad ⑤$$

如此，积分 $I_1(n)$ 被表为一个很简单的"主要项"与某一个余项之和，当 $n\to\infty$ 时，这个余项是一个比主要项更高阶的无穷小量．

(2) 估计积分 $I_2(n)=\int_{-1}^{-\lambda}\{\phi(z)\}^n\mathrm{d}z$.

因为函数 $\phi(z)$ 在积分区间上递增，所以

$$I_2(n)<\{\phi(-\lambda)\}^n(1-\lambda)<\{\phi(-\lambda)\}^n. \qquad ⑥$$

但是

$$\phi(-\lambda)=(1-\lambda)\mathrm{e}^{\lambda},$$

$$\ln\phi(-\lambda)=\lambda+\ln(1-\lambda)=\lambda-\left[\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{3}+\cdots\right]$$

$$<-\frac{\lambda^2}{2},$$

$$n\ln\phi(-\lambda)<-\frac{n\lambda^2}{2}=-\frac{n^{1-2\theta}}{2},$$

$$\{\phi(-\lambda)\}^n<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{1-2\theta}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\tau}},$$

其中 $\tau=1-2\theta>0$．我们知道，对于无论怎样小的数 $\tau>0$，当$n\to$

∞时,上式右端都是一个比 n 的任何负幂(特别说来,$\dfrac{1}{\sqrt{n}}=n^{-\frac{1}{2}}$)都要高阶的一个无穷小量.因此由不等式⑥可以得到

$$I_2(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{7}$$

(3) 估计积分 $I_3(n)=\int_\lambda^\infty\{\phi(z)\}^n\mathrm{d}z$.

这里再把积分区间分成$(\lambda,4)$与$[4,\infty)$两部分,于是得

$$I_3(n)=I_3'(n)+I_3''(n)=\int_\lambda^4\{\phi(z)\}^n\mathrm{d}z+\int_4^\infty\{\phi(z)\}^n\mathrm{d}z.$$

在区间$(\lambda,4)$上,函数 $\phi(z)$递减,因而在整个区间上都不大于$\phi(\lambda)$,所以有

$$I_3'(n)=\int_\lambda^4\{\phi(z)\}^n\mathrm{d}z\leqslant\{\phi(\lambda)\}^n(4-\lambda)<4\{\phi(\lambda)\}^n. \tag{8}$$

但是根据泰勒公式可知,当 $n\to\infty$时,

$$\ln\phi(\lambda)=-\frac{\lambda^2}{2}+o(\lambda^2),$$

这就表明,当 n 充分大时,

$$\ln\phi(\lambda)<-\frac{\lambda^2}{3},$$

从而

$$\{\phi(\lambda)\}^n<\mathrm{e}^{-\frac{n\lambda^2}{3}}=\mathrm{e}^{-\frac{n^{1-2\theta}}{3}}=\mathrm{e}^{-\frac{n^\tau}{3}},$$

其中 $\tau=1-2\theta>0$,跟 $I_2(n)$的情形一样,根据⑧我们就知道,当 $n\to\infty$时

$$I_3'(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{9}$$

要估计积分 $I''_3(n)$，我们首先注意，当 $x\geqslant 4$ 时，不难算出，$1+x<e^{\frac{x}{2}}$，因而 $\phi(x)<e^{-\frac{x}{2}}$。因此，当 $n\to\infty$ 时

$$I''_3(n)=\int_4^{\infty}\{\phi(z)\}^n dz<\int_4^{\infty}e^{-\frac{nx}{2}}dx$$
$$<\int_0^{\infty}e^{-\frac{nx}{2}}dx=\frac{2}{n}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad ⑩$$

合并⑨与⑩，就有

$$I_3(n)=I'_3(n)+I''_3(n)=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad ⑪$$

从关系式⑤、⑦与⑪可得到

$$I(n)=\int_{-1}^{\infty}\{\phi(z)\}^n dz=I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)$$
$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}[1+o(1)].$$

由此根据②就可得到

$$n!=n^{n+1}e^{-n}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}[1+o(1)]$$
$$=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}[1+o(1)].$$

这就是所谓斯特灵公式，它有很多的应用，是数学分析中最重要的公式之一．

斯特灵公式也常常写成下列等价的对数形式：

$$\ln(n!)=n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\ln 2\pi+o(1).$$

参考文献 [22,pp.712～716],[25,pp.553～561].

（刘云章）

伯努利-莱布尼茨诡论(Bernoulli-Leibniz paradox)

1702 年,约翰·伯努利发现了部分分式积分法. 部分分式积分法的有效应用,使约翰·伯努利等人力图扩大其应用范畴,结果引出复数的对数. 因为当实系数多项式 ax^2+bx+c 为不可约多项式时,它的一次因子将是复的. 如果一定要按部分分式法积分,那么就不可避免地会出现复数求对数的问题. 对于复数有没有对数,以及如何求复数的对数等问题,当时数学家并不清楚. 于是就产生如下的怪论:

由于

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

我们把分式 $\frac{1}{1+x^2}$ 分解为部分分式

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}-\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right),$$

积分后,就求出

$$\operatorname{arctg}x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{\mathrm{i}-x}{\mathrm{i}+x}.$$

令 $x=1$,我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\ln\left(\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\right)^2\\&=\frac{1}{4\mathrm{i}}\ln(-1)=\frac{1}{8\mathrm{i}}\ln(-1)^2=\frac{1}{8\mathrm{i}}\ln1=0,\end{aligned}$$

这就是说 $\frac{\pi}{4}=0$.

伯努利-莱布尼茨诡论刺激了人们对复变量对数函数的研究. 后来,欧拉指出了指数函数 e^z 的周期性之后就揭破了这个诡论. 事实上,用 $-\mathrm{i}z$ 来代替欧拉等式中的 x,我们得到

$$\begin{aligned} e^z &= \cos(-iz) + i\sin(-iz) \\ &= \cos iz - i\sin iz. \end{aligned}$$

在这个等式中用 $z+2\pi i$ 代替 z，我们就有

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= \cos(iz - 2\pi) - i\sin(iz - 2\pi) \\ &= \cos iz - i\sin iz = e^z, \end{aligned}$$

这表明 $2\pi i$ 是这个函数的周期．因此，从等式 $e^z = w$ 所确定的自然对数 $z = \ln w$，对于每一个确定的 w 的值，由于 e^z 的周期性，z 就有无穷多个不同的值，每两个值相差一个 $2\pi i$ 的倍数．当 $w>0$ 时，$z = \ln w$ 有一个值是实数，其他的值全是虚数；当 $w<0$ 时，$z = \ln w$ 全是虚数．所以对数函数是多值的，假如我们取 $\ln 1 = 2\pi i$，那么，$\frac{1}{8i}\ln 1 = \frac{\pi}{4}$，诡论就无从立脚了．

参考文献 [16,pp.464～465],[26,pp.3～4].

（刘云章）

三 无穷级数

欧拉常数(Euler's constant) 设 H_n 是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 前 n 项的和，则 $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$，式中 $\gamma = 0.577\,215\,664\cdots$ 称为欧拉常数.

1740 年，欧拉首先提出这个数列的极限．

人们早就发现调和级数有无穷和数；当 n 增大时，其部分和 H_n 增加得很慢，欧拉曾经计算过 $H_{1\,000} = 7.48\cdots$，$H_{1\,000\,000} = 14.39\cdots$，等等，他利用对数函数来求调和级数前 n 项和．首先，他从

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots$$

出发，得到

$$\frac{1}{x}=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}-\cdots,$$

用 $x=1,2,3,\cdots,n$ 代入上式，就得到

$$\frac{1}{1}=\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1}{5\cdot 32}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}-\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{4\cdot 81}-\frac{1}{5\cdot 243}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n}=\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}+\cdots$$

以上各式相加，并注意到每一个对数项都是两个对数之差，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\\&=\ln(n+1)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\&\quad-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)\\&\quad+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right)-\cdots\end{aligned}$$

或

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C, \qquad ①$$

其中 C 表示无穷多个有限算术和的和．这个 C 就是现在通称的欧拉常数，通常记为 γ. γ 的一个更精确的表示，现代是如下得到的．从①的两边减去 $\ln n$. 而 $\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，当 $n\to\infty$ 时它趋向于 0. 因此

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n).$$

为了证明当 $n\to\infty$ 时 $H_n - \ln n$ 存在极限，考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right).$$

用微分学的方法容易确立不等式

$$\ln(1+x) < x \ (x \neq 0, -1 < x < +\infty).$$

利用这不等式，可以得到

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

同时

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

于是

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

由于级数 $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，因而，给定级数也收敛.

如果用 γ 表示这个级数的和数，那么部分和数

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = H_n - \ln(n+1) \to \gamma,$$

这里可以用 $\ln n$ 代替 $\ln(n+1)$，因为它们的差数等于 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，这个差数趋于 0. 这个公式表明，当 n 无限增大时，调和级数的部分和数 H_n 像 $\ln n$ 一样增大.

根据伽马函数的积分表达式，可以推得

$$D\ln\Gamma(\alpha) = \ln\alpha - \frac{1}{2\alpha} + \omega'(\alpha)$$

其中 $\omega'(a)=\int_{-\infty}^{0} x e^{ax} f(x)\mathrm{d}x, f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4k^2\pi^2}$.

另外,高斯公式表明

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\gamma=\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\mathrm{d}t.$$

欧拉借助于这些公式,求出了具有 15 位小数的 γ 的值

$$\gamma=0.577\,215\,664\,901\,532\cdots$$

欧拉常数是数学中一个著名的常数,它与 Γ 函数、黎曼 ζ 函数以及伯努利数等有密切关系,具有广泛的应用,欧拉猜测它是超越数,然而,至今人们尚不知 γ 是有理数还是无理数. 利用电子计算机于 1974 年人们已算出它的 7 000 位以上的近似值.

欧拉常数 γ 也可用积分表达为

$$\gamma=\int_0^1(1-e^{-x})\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^{+\infty}e^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

现在,人们还把欧拉常数的定义加以推广,给出如下的定义

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k(i-1)+a}-\frac{1}{k}\ln\frac{k(n-1)+a}{a}\right]=C(a,k),$$

其中 a 与 k 都是正整数. 当 $a=1,k=1$ 时,$C(1,1)$就是通常所见的欧拉常数.

从常数 $C(a,k)$的定义可直接推得一个重要的结果

$$2C(a,2k)-C(a,k)=A(a,k),$$

其中 $A(a,k)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{k(n-1)+a}$.

该公式给出 $C(a,k)$与 $A(a,k)$之间的关系,使得常数 $C(a,k)$的定义可以作为无穷级数求和的有力工具,由此将直接推得一系列的无穷级数之和.

参考文献 [21,pp.262～269],[22,pp.722～723],[2,p.1],[11,p.499].

(刘云章)

追龟说(Paradox of tracing tortoise)

希腊诡辩学派哲学家芝诺提出了四个有名的悖论,其中最著名的是"追龟说".芝诺说,阿基里斯(希腊神话中善跑如飞的英雄)追乌龟,永远追不上.比如,阿基里斯的速度是龟的10倍,龟在前面100米,当阿基里斯跑了100米到达龟的出发点时,龟已向前走了10米;阿基里斯再追10米,龟又前进了1米;阿基里斯再追1米,龟又前进了$\frac{1}{10}$米,这样永远相隔一小段距离,所以总也追不上.

当时,古希腊的思想家在时间和空间问题上存在一种观点:"时间和空间都是可以无限分割的".追龟说的实质在于,将路程分为无穷多份,并断言走完这无穷多份需要无限的时间.因为,古希腊时代的人是无法处理无限运算的,对于无限个数目相加感到困惑不解.芝诺提出追龟说是用来否定"时间和空间都是可以无限分割的"观点的.

在古希腊时代,追龟说违背人们的常识.古希腊人明知阿基里斯一定能追上乌龟,但却无法证明追龟说错在何处,这就成为古希腊数学史上有名的难题,给学术界以极大的骚动,刺激数学家们要认真研究"无限",研究运动.直到微积分时代,这问题才算基本解决.

17世纪中叶,苏格兰人Gregory在他的《几何著作》(1647)中,证明了阿基里斯追龟的悖论可以用无穷几何级数的求和来解决.和是有限的这件事表明,阿基里斯可以在一个确定的时间与地点追上乌龟.

事实上,假设阿基里斯追上龟之前,龟所爬行的米数为

$$S=100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$$

加数的个数虽无止境，但其总和是一个有限数，利用无穷递缩几何数列求和公式可求得 $S = 111\frac{1}{9}$．可见，在 $111\frac{1}{9}$ 米处，阿氏就可追上乌龟．

Gregory 第一次明白指出了无穷级数表示一个数，即级数的和．他称这个数为级数的极限．

芝诺悖论在人类思想史上占有重要地位，它"引起了几乎整个关于时间、空间和无限的理论，这些理论从他那时起到今天，一直被人们发展着"．

参考文献 [34，pp. 161～162]，[15，pp. 104～105]．

（刘云章）

伯努利问题（Bernoulli problem） 怎样求所有自然数平方的倒数和？

在牛顿、莱布尼茨时代，数学界对无穷级数还很少研究．瑞士数学家雅各布·伯努利是当时杰出的数学家，在他的第一篇论文(1698)中，他讨论了几个无穷级数的和．在文章末尾他证明了无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ 的和是有限数，但他坦承自己还不能算出其精确值．他写道："假如有人能够求出这个直到现在还未求出的和并把它通知我们，我们很感谢他．"直到雅各布·伯努利逝世时还未能见到有人解决此难题．

后来，这个问题引起了欧拉的注意，他发现了这个和的各式各样表达式（定积分、级数），但没有一个能使他满意．他用这些表达式，算出了有七位有效数字的和(1.644 934)．然而，这仅是一个近似值．1737 年，他用类比法首先发现了所需的准确值．

欧拉考虑到以下事实：

假如一个 n 次方程

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \ (a_n \neq 0),$$

有 n 个不同的根

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n,$$

则方程左边的多项式就可分解为 n 个线性因子的乘积，即

$$\begin{aligned}&a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\\=&a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).\end{aligned}$$

假设根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中没有零根，也就是说，设 $a_0\neq 0$，我们又可得

$$\begin{aligned}&a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\\=&a_0\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right).\end{aligned}$$

特殊地，对于只含偶次项的 $2n$ 次代数方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}=0\ (b_n\neq 0),$$

假设它有 $2n$ 个互不相同的根，两两互为相反数

$$x_1, -x_1, x_2, -x_2, \cdots, x_n, -x_n,$$

则有

$$\begin{aligned}&b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}\\=&b_0\left(1-\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{x_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{x_n^2}\right).\end{aligned}$$

比较二次项系数，可得

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}\right).$$

欧拉又研究了三角方程

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0,$$

他把它看成只含偶次项的无限次代数方程．因此，他认为，它理应有无穷多个根，事实上也是如此，它的根为

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \cdots$$

于是欧拉采用类比法，即仿照上述 $2n$ 次多项式分解成乘积的形式，把这里出现的所谓无限次多项式也照样分解成因式乘积形式

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

这就是著名的“欧拉乘积公式”，也叫做“欧拉猜想”．比较两边二次项的系数，可得

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

这就是雅各布·伯努利没能解决的那个级数的和，但是它仅是一个大胆的推测．

欧拉深知他的方法是大胆的、不够可靠的．于是，他做了数值计算进行验证，并用另外的例子试验了他的方法，他成功地重新发现了一个重要级数——莱布尼茨级数和，即

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

欧拉核算了更多级数和的更多位小数，并且发现所有核算结果都一致．他也试验过另外的方法，并且最后他成功地证明了值 $\frac{\pi^2}{6}$ 作为雅各布·伯努利级数的和，是完全准确的．

在近代数学分析中，已有多种方法给出了它的严格证明．

欧拉解决这问题的方法具有重要的方法论意义，这例子被波利亚看做是“使人难忘和具有历史意义的有趣的例子”．

参考文献 [34，pp.175～176]，[18，p.16]．

（刘云章）

$1-1+1-1+\cdots+1-\cdots=?$

十七八世纪，随着微积分的研究，数学家们开始运用无穷级数，但对无穷级数收敛与发散的问题，在相当一段时间里是没有认真对待的．级数被看做多项式的推广，也就当做多项式来处理，没有注意由于求和推广到无穷多项，已经引进了新问题．因此，在雅各布·伯努利的一篇短文（1696）中出现的级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots \quad ①$$

引起了人们极大的关注与争议．

如果把级数①写成

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

它的和似乎应该说为 0．可是，如果把级数①写成

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

它的和又似乎是1．如果把级数①的和记为S，那么$S=1-S$，从而又有$S=\frac{1}{2}$．

究竟级数①的和等于多少？

比萨大学的数学教授 G. Grandi（1671～1742），在他的小书《圆和双曲线的求积》中，提出该级数的和是$\frac{1}{2}$．他在下式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

中,令 $x=1$,于是就得到

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots.$$

G. Grandi 还把这结果解释为:一个父亲遗留给他的两个儿子的一块宝石,他们每人可以轮流保存一年,于是属于每个儿子的是一半.

G. Grandi 又是一个修道士,他把上面的结果进一步写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=1-1+1-1+1-1+\cdots\\&=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\\&=0,\end{aligned}$$

由此说明"世界能从空无一物创造出来".

莱布尼茨也认为该级数的和为$\frac{1}{2}$,他提出另外的理由:

第一项为1,前两项的和为 $1-1=0$,前三项的和为 $1-1+1=1$,前四项的和为 $1-1+1-1=0$,…在这个无限的过程中,取1和0的可能性是相同的,因此,它的算术平均值 $\frac{1+0}{2}$ 是最有可能取到的值.18世纪初的一些著名数学家如雅各布和约翰·伯努利兄弟丹尼尔·伯努利和后来的拉格朗日都同意这说法.

在级数方面做了大量工作的欧拉,对这课题感到莫大兴趣,他也主张该级数的和是$\frac{1}{2}$,但他的理由是,在

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

中,令 $x=-1$,则得

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$$

这就是说和是$\frac{1}{2}$.

现在看来,问题很简单,因为无穷项的和本质上是一个极限.级数①的和是无意义的.这样一个级数固然使当时的许多数学家感到为难.但是它却启发人们去思考,导致无穷级数收敛和发散理论的发展,并刺激人们对发散级数"广义和"的研究.

在历史上最早引进的"广义和"有下面两种:

1. 用算术平均求和.对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$,设其部分和为 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.若部分和的平均值

$$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_n}{n+1}$$

当$n\to\infty$时有极限l,则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 可用算术平均求和,其广义和为l.

2. 阿贝尔求和.对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$,作幂级数

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

若这级数在 $0<x<1$ 收敛,且

$$\lim_{x\to1-0}A(x)=l,$$

则称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 可用阿贝尔求和,其广义和为l.

这两种方法是求发散级数广义和的最简单最基本的方法,许多其他的方法多少与这两种方法有关.无论用哪种广义和,$1-1+1-1+\cdots$ 均等于$\frac{1}{2}$.

参考文献 [34,pp.171～173],[43,pp.29～34].

（刘云章）

黎曼定理（Riemann's theorem） 若级数条件收敛,则对任意实数 B,总可将各项适当地重新排列,使所得的级数具有和数 B.

人们曾假定级数的项是可以任意地重新排列的.1837 年,狄利克雷在一篇论文中证明了,对于一个绝对收敛的级数,人们可以组合或重新排列它的项而不改变级数的和.他还给出例子说明任何一个条件收敛的级数的项可以重新排列而使级数的和不相同.黎曼在 1854 年写的一篇论文中证明了适当重排级数的项可以使级数的和等于任何给定的数,从而得到黎曼定理.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,$\langle a_n\rangle$ 中非负项所成子数列为 $\langle p_n\rangle$,而 $\langle a_n\rangle$ 中负项的绝对值所成子数列为 $\langle q_n\rangle$.

对任意给定的数 B,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=\infty$,可取 m_1,使

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}>B,$$

但
$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1-1}\leqslant B,$$

又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n=\infty$,故可取 n_1,使

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}-(q_1+q_2+\cdots+q_{n_1})<B,$$

但
$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}-(q_1+q_2+\cdots+q_{n_1-1})\geqslant B.$$

依此类推,无限地重复这两个步骤,可将原级数重新配置并结合而成一个新的级数

$$P_1-Q_1+P_2-Q_2+\cdots+P_k-Q_k+\cdots \qquad ①$$

其中,$P_k=p_{m_{k-1}+1}+\cdots+p_{m_k}$,$Q_k=q_{n_{k-1}+1}+\cdots+q_{n_k}$.

根据上述 P_k 的取法,应有

$$P_1 - Q_1 + \cdots + P_{k-1} - Q_{k-1} + P_k > B,$$

但 $$P_1 - Q_1 + \cdots + P_{k-1} - Q_{k-1} + P_k - p_{m_k} \leqslant B,$$

故 $$|(P_1 - Q_1 + \cdots + P_{k-1} - Q_{k-1} + P_k) - B| \leqslant p_{m_k}. \quad ②$$

同理，由 Q_k 的取法，应有

$$P_1 - Q_1 + \cdots + P_k - Q_k < B,$$

但 $$P_1 - Q_1 + \cdots + P_k - Q_k + q_{n_k} \geqslant B,$$

故 $$|(P_1 - Q_1 + \cdots + P_k - Q_k) - B| \leqslant q_{n_k}. \quad ③$$

再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件：$\lim a_n = 0$，又可推出

$$\lim p_n = 0 \text{ 和 } \lim q_n = 0.$$

从②与③两个不等式就可看出：级数①的前有限项的和，与给定的实数 B 之差的绝对值可以任意的小，故有

$$B = P_1 - Q_1 + P_2 - Q_2 + \cdots + P_k - Q_k + \cdots$$

此即

$$\begin{aligned} B = p_1 + \cdots + p_{m_1} - q_1 - \cdots - q_{n_1} + p_{m_1+1} + \cdots \\ + p_{m_2} - q_{n_1+1} - \cdots - q_{n_2} + \cdots + p_{m_{k-1}+1} + \cdots \\ + p_{m_k} - q_{n_{k-1}+1} - \cdots - q_{n_k} + \cdots \end{aligned} \quad ④$$

这就证明了条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 经过重新配置后，变成和数为 B 的级数④.

黎曼定理可推广到 $B = \pm\infty$ 的情况.

参考文献 [21, pp. 312～314], [36, p. 25].

（刘云章）

无穷多个连续函数之和是否也是连续函数（Is the sum of infinite continuous functions continuous function）

18 世纪末，由于应用无穷级数而得到的一些可疑的或者完全

荒谬的结果，促使人们追求对无穷级数进行运算的合法性．柯西在他的《分析教程》中说："如果当 $f(x)=\sum\limits_{1}^{\infty}\mu_n(x)$ 时级数收敛且 $\mu_n(x)$ 都连续，那么 $f(x)$ 是连续的．"

阿贝尔在 1826 年的一篇论文中，指出了这种说法的错误．他给出一个反例：

$$\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots$$

虽然它的每一项都是连续的，但是当 $x=(2n+1)\pi\ (n\in\mathbf{Z})$ 时，和函数是不连续的．然后他用一致收敛的思想正确地证明了连续函数的一个一致收敛级数的和在收敛区域内部是连续的．但阿贝尔没有抽象出一致收敛概念．

一致收敛概念，是在 1842 年由魏尔斯特拉斯提出的．稍后，英国的第一流数学物理学家斯托克斯与德国的 Seidel(1821～1896)也认识到这一重要概念．至于柯西本人，最后也还是认识到，为了断言连续函数的级数的和一定连续，需要一致收敛性条件．这与他出版名著《分析教程》时已相隔 30 年了．

如果某区间$[a,b]$上的连续函数的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，那么可以证明和函数 $S(x)$ 也是连续函数．

设 $x_0\in[a,b]$，记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k(x)$．则有

$$\begin{aligned}
&|S(x)-S(x_0)|\\
=&|S(x)-S_n(x)+S_n(x)-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)|\\
\leqslant&|S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)\\
&-S(x_0)|.
\end{aligned}$$

按一致收敛性，可选取 $N=N(\varepsilon)>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\frac{1}{3}\varepsilon,$$

即有
$$|S(x_0)-S_n(x_0)|<\frac{1}{3}\varepsilon.$$
固定选取 $n=N$,则 $S_N(x)$ 为连续函数,故存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,有
$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{1}{3}\varepsilon.$$
从而
$$|S(x)-S(x_0)|<\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon.$$
由此证明了函数 $S(x)$ 的连续性.

由于上述证明过程中,实际上只用到了级数在每点邻域内的一致收敛性,这就启发人们去寻找函数级数连续性的充要条件.意大利的分析学家 Arzela(1847～1912)在19世纪末首先引进了"次一致收敛性"概念:

对于任给 $\varepsilon>0$ 及正整数 m,如果区间 $I=[a,b]$ 总可以由一批小的开区间 $I_{1(\varepsilon)},I_{2(\varepsilon)},\cdots,I_{p(\varepsilon)}$ 所覆盖;对于这些小区间,又相应地存在一批全都大于 m 的整数 $N_{1(\varepsilon)},N_{2(\varepsilon)},\cdots,N_{p(\varepsilon)}$,使得当 $x\in I_{j(\varepsilon)}$,$n=N_{j(\varepsilon)}$ 时,
$$0|r_n(x)|=\left|\sum_{n+1}^{\infty}\mu_k(x)\right|<\varepsilon,$$
此处 $j=1,\cdots,p$. 这样,就说级数 $\sum_{1}^{\infty}\mu_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上为次一致收敛.

Arzela 利用这个概念,把全区间上的一致收敛条件减弱为各局部小区间上的收敛性要求,证明了下述定理:

设 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(x)=S(x)$,其中各个 $\mu_k(x)$ 都是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 那么,和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的必要与充分条件是:该函数级数在 $[a,b]$ 上为次一致收敛.

参考文献 [36,pp.22~24],[1,pp.59~64].

（刘云章）

魏尔斯特拉斯定理（Weierstrass theorem） 任何一个在闭区间上连续的函数 $f(x)$ 都可以用多项式一致逼近.

魏尔斯特拉斯在做中学教师期间，发现任何闭区间上的连续函数都可以表为这个区间上一致收敛的多项式级数，也就是说，闭区间上的连续函数可以用多项式一致逼近. 由于该定理的重要性，人们陆续地提出了许多不同的证明. 下面是前苏联科学院院士 Bienstan(1880~1968)给出的简单而优美的证法. 它借助于不等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}, \qquad ①$$

其中 n 为自然数，x 为任意实数；当 $x=0,k=0$ 时规定 $x^k=1$.

首先假定给定的区间$[a,b]$是区间$[0,1]$. 对于每一个自然数 n，令

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = B_n(x);$$

显然，$B_n(x)$是一个次数不超过 n 的多项式. 下面证明当 $n\to\infty$ 时，在区间$[0,1]$上，$B_n(x)$一致地趋向于 $f(x)$.

把函数$|f(x)|$在区间$[0,1]$上的上确界记作 M. 假定 ε 是任意一个正数，因为 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续（从而也就一致连续），所以一定有这样一个正数 δ 存在，使得当

$$|x_1-x_2|\leqslant\delta, 0\leqslant x_1\leqslant 1, 0\leqslant x_2\leqslant 1$$

时，我们有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

以下的问题是要估计差 $|B_n(x)-f(x)|(0\leqslant x\leqslant 1)$. 对于任何一个 x，

$$\sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = f(x) \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= f(x),$$

因此，我们能够把差 $B_n(x) - f(x)$ 改写成

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

从而，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad ②$$

现在，我们把所有的数 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 分成 A、B 两组，A 组中包含着满足不等式

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \leqslant \delta \quad ③$$

的那些 k，B 组中则包含满足另一个不等式

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta \quad ④$$

的 k，于是在不等式②中也可以对应地把和 $\sum_{k=0}^{n}$ 分成两部分，记作 $\sum_A$ 与 $\sum_B$. 在 $\sum_A$ 中根据③，每一项都有

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon,$$

因而

$$\sum\nolimits_A \leqslant \varepsilon \sum\nolimits_A C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon. \quad ⑤$$

但是在 $\sum_B$ 的每一项中，我们都有

$$(k-nx)^2>n^2\delta^2,\ \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant 2M,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_B&\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_B(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^kx^k(1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

从而根据不等式①得

$$\sum_B<\frac{M}{2n\delta^2}. \tag{⑥}$$

最后，从②、⑤与⑥，我们就得到

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\sum_A+\sum_B<\varepsilon+\frac{M}{2n\delta^2}.$$

如果 n 大到能使得 $\frac{M}{2n\delta^2}<\varepsilon$，就有

$$|B_n(x)-f(x)|<2\varepsilon\ (0\leqslant x\leqslant 1),$$

因为 $\varepsilon>0$ 可以任意小，所以在区间[0,1]上一致地

$$B_n(x)\to f(x)\quad(n\to\infty).$$

下面再把定理推广到任意区间 $[a,b]$. 假定函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，我们令 $x=a+(b-a)y$，于是 $y=\frac{x-a}{b-a}$，从而当 x 从 a 变到 b 时，y 从 0 变到 1. 令

$$f(x)=f[a+(b-a)y]=\varphi(y)\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

很明显，函数 $\varphi(y)$ 在区间[0,1]上连续，因而，对于无论多么小的 $\varepsilon>0$，根据已经证明的定理，一定有这样一个多项式 $P(y)$ 存在，

使得

$$|\varphi(y)-P(y)|<\varepsilon \quad (0\leqslant y\leqslant 1),$$

或者,另外一个写法

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

但是 $P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 显然是 x 的一个多项式,我们把它简单地记作 $Q(x)$,于是

$$|f(x)-Q(x)|<\varepsilon \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

因为 ε 可以任意小,这就说明函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可以用多项式来一致逼近.

魏尔斯特拉斯的这个结果,引起人们极大的兴趣,在19世纪的下半叶作了许多推广,如推广到复变函数.从此函数逼近论开始了一个新的阶段.

参考文献 [36,pp.19～25],[25,pp.375～380].

(刘云章)

四 集合论

伽利略悖论(Galilei paradox)

从古希腊时代起,数学家与哲学家就注意到无限集合,但长期不能理解.哲学家亚里士多德曾考虑过无限集合,例如整数集合,但他不承认一个无限的集合可以作为固定的整体而存在.

整个中世纪,关于是否有实实在在无限多个对象的集合这个问题,哲学家们各执一词,人们没有看到无限集与有限集的本质区别.17世纪的科学家伽利略把全体自然数和它们的平方用下面的方法一一对应起来:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \cdots\cdots \end{array}$$

它们谁也不多一个，谁也不少一个，就是说应该一样多．可是，自然数的平方明明只是全体自然数的一部分，怎么会和自然数一样多呢？难道部分可以等于全部？伽利略百思不得其解．后来人们就称这个问题为“伽利略悖论”．

伽利略悖论首次触及无限集的本质，促使数学家们进一步研究无限集．不过高斯在 1831 年还说：“我反对把一个无限量当做实体，这是在数学中从来不允许的．无限只是一种说话的方式，当人们确切地说到极限时，是指某些值可以任意地趋近它，而另一些则允许没有界限地增加．”柯西如他的前人一样，也不承认无限集合的存在，因为部分能够同整体构成一一对应这件事，在他看来是矛盾的．

波尔查诺为集合理论做了有益的工作，在他的《无穷悖论》(1851)一书中，维护了实在无限集的存在，并且强调了两个集合等价的概念．两个集合的元素之间如果能建立一一对应关系，这两个集合就叫做是等价的．等价概念适用于有限集合，同样地适用于无限集合．他注意到在无限集合的情形下，真子集可以等价于整体．但是他对无限集的性质未完全搞清．

稍后，德国著名数学家康托尔发表了《一般集合论基础》等一系列文章，澄清了有关无限集合的很多问题，被大家公认为集合论的创建者．他指出，任何两组东西，只要能相互一一对应，就是一样多．“部分小于全体”这条规律只在有限情况下正确．在无限情况下，“部分可以等于全体”．他发现了有限集与无限集的本质区别：有限集不可能与真子集等价，而无限集却可以与真子集等价．这样他给出了无限集的合理定义．康托

尔澄清了伽利略悖论，指出自然数集是无限集，因此伽利略悖论并不是什么悖论．

参考文献 [36，pp．57～61]．

（刘云章）

有理数多还是自然数多（Which is more，rational number or natural number）

康托尔利用一一对应关系来区分无穷集合，引进了基数概念．数集是最重要的，所以康托尔用数集来阐明他的基数概念．他引进了“可列”这个词，凡是能和自然数一一对应的任何一个集合都称为可列集．这是最小的无穷集．然后，他首先考察了有理数集合．有理数具有稠密性，由此完全可以设想，有理数集合的基数大于自然数集合的基数．然而，康托尔在他早期（1874）的一篇论文中证明了情况并非如此，相反，全体有理数集合是可列集．也就是说，有理数与自然数是一样多．

康托尔将所有正有理数排列成右边的形式，其中，头一行按大小顺序含有全体自然数（即是分母为1的所有正分数）；第二行按大小顺序含有分母为2的所有正分数；第三行按大小顺序含有分母为3的所有正分数；等等．显然，任何正有理数都出现在上述排列中．如果我们按箭头所示的相继次序排列出这些数，丢掉已经排上的数我们就得到一个没有尽头的序列



$$1,2,\frac{1}{2},\frac{1}{3},3,4,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\cdots$$

其中每个正有理数恰好各出现一次．把这个序列记为$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$．于是，序列

$$0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \cdots$$

正好是全体有理数集合，这就证明了有理数集合的可列性.

参考文献 [36,pp.61～62],[38,pp.211～212].

（刘云章）

是否存在不可列集（Does an uncountable set exist or not）

康托尔 1874 年的论文中，不仅证明了全体有理数集合是可列集，还证明了全体代数数的集合也是可列集．如此，似乎所有的无限集都是可列集．由于康托尔出人意料地证明了区间(0,1)中全体实数的集合不是可列的，这才说明了不可列集是存在的．

康托尔 1890 年发表的论文中，用对角线法则证明如下：

反证法．假设这个集合是可列集，于是可以把集合中的数排成一个序列$\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$，其中每个 p_i 都可以唯一写成无尽十进位小数．注意，任何有理数可以写成一个“循环小数”，例如，0.3 可以写成 0.299 99…．于是，我们可以把这个序列表为下面形状：

$$p_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$p_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$p_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

其中每个符号 a_{ij}都代表 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这十个数字中的某一个，但是，在上面列出 0 与 1 之间所有的实数的过程中，不论怎样小心谨慎，总有一个数 $0.b_1b_2b_3\cdots$不可能列出来．比如说，对于$k=1,2,3,\cdots,n,\cdots$当 $a_{kk}\neq 7$ 时令 $b_k=7$，当 $a_{kk}=7$ 时令 $b_k=3$，这个数 $0.b_1b_2b_3\cdots$显然是在 0 与 1 之间．它不等于任何一个 p_i，因为这个数在小数点后一位处与 p_1 不同，在小数点后两位处与 p_2 不同，在小数点后三位处与 p_3 不同，等等．因此，原来假定 0 与 1 之间所有的实数可以排成一个序列是不能成立的，从而区间(0,1)中全体实数的集合是不可列的．

实数集不可列的发现被人们看做是集合论诞生的标志．康托尔在这个发现的基础上，证明了超越数的存在性．

参考文献　[38，pp．213～215]，[16，pp．513～517]．

（刘云章）

康托尔完备集（Cantor complete set）　将区间[0，1]用分点$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$三等分，并除去中间的开区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，把余下的两个闭区间各三等分，并除去中间的开区间$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$，然后再将余下的四个闭区间按同样方法处理，如此等等（图 5－4）．



图 5－4

$$令\ G_0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)\cup\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)\cup\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup$$
$$\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right)\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)\cup\cdots$$

$$P_0=[0,1]-G_0,$$

则 P_0 是一个不可列的完备集，称为康托尔完备集．

一般人们总认为基数为$\aleph$即与区间[0，1]对等的集合，测度必大于零．出乎意料，可以证明，康托尔完备集 P_0 的基数为$\aleph$，而其测度为零．

首先证明 P_0 的基数为$\aleph$．

引进[0，1]中小数的三进制表示来考察．区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$中每个点 x 可表示成

$$x=0.1x_2x_3\cdots,$$

其中 $x_2, x_3, \cdots$ 是 0,1,2 中任一数字．这区间的端点均有两种表示，规定采用(不出现数字 1)：

$$\frac{1}{3} = 0.022\,2\cdots,\ \frac{2}{3} = 0.200\,0\cdots.$$

区间 $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$，$\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$ 中的点 x 可表示成

$$x = 0.01x_3x_4\cdots \text{ 或 } x = 0.21x_3x_4\cdots,$$

其中 $x_3, x_4, \cdots$ 是 0,1,2 中任一数字．而区间端点则采用(不出现数字 1)：

$$\frac{1}{3^2} = 0.002\,2\cdots,\ \frac{7}{3^2} = 0.202\,2\cdots,$$

$$\frac{2}{3^2} = 0.020\,0\cdots,\ \frac{8}{3^2} = 0.220\,0\cdots.$$

如此等等．据归纳法分析可知，依上述规定，G_0 中的点的三进制表示中必有一位数字是 1，且只有这样的点才属于 G_0．因而 P_0 与集

$$A = \{0.x_1x_2x_3\cdots:\ \text{每个 } x_i \in \{0,2\}\}$$

成一一对应．但 A 显然与[0,1]对等，故 A 的基数为$\aleph$，从而 P_0 的势为$\aleph$．

再证 P_0 的测度为零．

$\because\ mG_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots + 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots = 1,$

$\therefore\ mP_0 = 1 - mG_0 = 0.$

康托尔完备集 P_0，提供了一个测度为零的不可列集的重要例子．在许多场合可用它来说明一些问题．

参考文献 [3, pp. 13~22].

（刘云章）

罗素悖论(Russell paradox)　一切不包含自身的集合所形成的集合是否包含自身．如果说是包含自身的，即它自身属于这个集合，那么它就不包含自身；如果说它不包含自身，那么它理应是这个集合的元素，即包含自身．总之自相矛盾！

这个悖论是罗素1901年发现的．1902年，罗素写信告诉了Frege(1848～1925)，1903年在他的《数学原理》一书的序言中也提到这个悖论．

1918年，罗素又提出一个生动的“理发师悖论”来形象地说明自己的悖论：某村有位理发师自己约定：“给而且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子．”现在要问这个理发师是属于哪一类人？如果说他是属于自己给自己刮胡子的一类，那么按他自己的约定，他不应该给他自己刮胡子，因之是一个自己不给自己刮胡子的人．再设他是属于自己不给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他必须给他自己刮胡子，因之他又是一个自己给自己刮胡子的人了．前后矛盾！

实际上，1899年，康托尔已发现类似的悖论．罗素悖论直接冲击数学的基础，惊动了整个西方哲学界、逻辑学界和数学界．数学家们首先求助于公理化方法，试图把康托尔的“朴素集合论”加以公理化．这项工作的创始人是德国数学家策梅罗，他认为罗素悖论起因于康托尔对集合的概念未加以限制．康托尔论文中集合的定义是有些含糊，所以策梅罗希望用公理化方法澄清集合的意义和集合应有的性质．他于1908年构思了一个集合论的公理化系统，只准许那些看来不大会产生矛盾的集进入集合论．特别是像一切集组成的集，在这个公理系统中是不被承认为集的．但策梅罗的公理系统有缺陷，后来弗兰克对策梅罗公理系统作了改进，形成了ZF系统，加上选择公理，便得到现在大家熟知的ZFC公理系统．集合论的ZFC系统排除了集合论中的罗素悖论．在这个系统理论之内，至今还未发现矛盾．但ZFC公理集合论的相容性

尚未证明,不能保证在这个系统中今后不会再出现悖论.正如庞加莱所说:“我们设置栅栏,把羊群围住,免受狼的侵袭,但是很可能在围栅栏时就已经有一条狼被围在其中了.”

罗素悖论激起了数学家们对数学基础的研究.

参考文献 [36,pp.290~295],[10,pp.125~139],[11,p.461],[37,p.568],[14,p.501].

(刘云章)

五 高等代数

代数基本定理(Algebraic elementary theorem) 每一个实系数多项式至少有一个实根或复根.

该命题等价于“一元 n 次方程在复数范围内必有 n 个根”.

最早涉及根的个数问题的人,是阿拉伯和印度数学家.9世纪的花拉子米首先认识到二次方程有两个根,但他只给出正的实根.1150年,Bhāskara完整地提出了二次方程的一般解法,他也承认二次方程有两个根,但将负根弃去.

三次方程是否有三个根的问题在卡丹来说还存在疑点,因为他的求根公式中会出现负数的平方根.1732年,欧拉对卡丹的三次方程解法作了完整的讨论,强调三次方程有三个根,而且指出如何去求.随之,四次方程的问题也解决了.

1608年,Rothe最早提出 n 次方程有 n 个根的猜想,但没有多大影响.

1629年,荷兰数学家Girard(1595~1632)在他的《代数新发现》中,再次提出Rothe的猜想,但没有给出证明.

1637年,笛卡尔的《几何学》出版.他在第三编中指出,一个多少次的方程就能有多少个不同的根(包括他不承认的虚根和负根).

1742 年 12 月 15 日，欧拉在一封信中明确地陈述了代数基本定理.

迄今为止，该定理的各种证明方法，或多或少地都应用了数学分析中的一些定理.

该定理的第一个证明是法国数学家达朗贝尔给出的，可是他默认了数学分析中一条明显的引理——定义在闭区间上的连续函数一定在某一点取得最小值，这引理在达朗贝尔的研究 100 年以后才得到证明. 接着，欧拉也给出了一个证明，但也有缺陷. 拉格朗日于 1772 年又重新证明了代数基本定理，后经高斯分析，发现其证法中曾把实数的各种性质应用于尚未证明其存在性的根上，所以证明仍然是不严格的.

代数基本定理的第一个严格证明通常认为是高斯 1797 年给出的，这是他的博士论文(1799 年发表). 高斯对此定理一共给出四个证明，第四个发表于 1850 年."代数基本定理"这一名称被认为是高斯提出的.

在许多证法中，这条定理都不是在最一般的情况下证明的，大多是假定了多项式中的文字系数表示实数，但整个定理却包括复系数的情况.1976 年，美国的 F. 特科森就复系数情况作出了简短的证明.

设 $P(z)$为一个正方次的多项式，其系数属于复数域 $\mathbf{C}$，由于 $P(z)$为连续并且当 $|z|\to\infty$ 时一致地有 $|P(z)|\to\infty$，故存在 $z_0\in\mathbf{C}$，使得 $|P(z_0)|\leqslant|P(z)|$ 对于所有 $z\in\mathbf{C}$ 成立，不妨假设 $z_0=0$，因代替 $P(z)$可考虑多项式 $P(z+z_0)$. 我们要证 $P(0)=0$.

存在一个正整数 $n\geqslant 1$ 和 $a,b\in\mathbf{C}$，$b\neq 0$ 使得

$$P(z)=a+bz^n+z^{n+1}Q(z),$$

其中 $Q(z)$是一个多项式. 假如 $P(0)=a\neq 0$，取数 $-\dfrac{a}{b}$ 的一个 n

次方根 $\omega\in\mathbf{C}$，存在满足 $0<t<1$ 的 t 使得 $t|\omega^{n+1}Q(t\omega)|<|a|$ 成立．现在有

$$\begin{aligned}P(t\omega)&=a+b(t\omega)^n+(t\omega)^{n+1}Q(t\omega)\\&=(1-t^n)a+(t\omega)^{n+1}Q(t\omega),\end{aligned}$$

因为 $b\omega^n=-a$，于是

$$\begin{aligned}|P(t\omega)|&\leqslant(1-t^n)|a|+t^{n+1}|\omega^{n+1}Q(t\omega)|\\&<(1-t^n)|a|+t^n|a|=|a|=|P(0)|,\end{aligned}$$

这是一个矛盾，所以 $P(0)=0$ 得证．

代数基本定理在代数乃至整个数学中起着基础作用．

参考文献　[34，pp.351～353]，[44，pp.23～27]，[33，p.220、311、314]，[15，p.132、143、152]．

（刘云章）

代数方程根式解问题（Problem of algebraic solution of algebraic equation） 高于四次的代数方程是否具有根式解？

二次方程的解法，早在远古时代已解决；三次、四次方程的解法是16世纪解决的．

自从16世纪三次、四次方程的根式解法解决后，五次方程的根式求解问题自然便提到议事日程上来．它吸引了众多的著名数学家，包括欧拉在内．但是两百多年的努力都落空了．他们总认为五次方程的求根公式是存在的，只是没有能找到而已．

到了18世纪下半叶，法国数学家拉格朗日总结分析了前人失败的教训，开始意识到这种用代数方法求解五次方程的公式可能是不存在的．他在1770年发表了《关于代数方程解法的思考》一文，用统一的观点分析总结了二次、三次、四次方程的根式解法，并预见到一般方程的可解性问题最后都将归结到关于诸根的某种排列置换的问题．他还设想了一种理论上的利用根式求解方程的步骤，可是拉格朗日按照自己的方案去处理五次方程时，碰了壁．

拉格朗日虽然没有能彻底解决高次方程的求解问题，但是他的工作却启发了年轻的阿贝尔与伽罗瓦．

1824年，22岁的大学生阿贝尔严格地证明了高于四次的一般代数方程(带有文字系数者)不可能有根式解，该证明1826年发表于《理论与应用数学杂志》．阿贝尔证明了高于四次的一般代数方程不可能有一般形式的根式解，但是这并不等于说任意一个具体数字系数的高次方程都没有根式解．因此，阿贝尔的理论还未解决具体数字系数的高于四次的方程何时有根式解的问题．这个问题为法国青年数学家伽罗瓦所彻底解决．

伽罗瓦精细地研究了前人成果，发现了一个重要准则(伽罗瓦基本定理)：

给定一个代数方程，设 G 是该方程的伽罗瓦群(即关于方程诸根的某个置换群)，它的一系列最大正规子群为 $H_k(k=1,\cdots,s)$：

$$G \supset H_1 \supset \cdots \supset H_s.$$

(这种序列叫合成群列，其中 H_s 为单元群)则原方程可用根式求解的充要条件是，下列诸指标

$$\left[\frac{G}{H_1}\right],\left[\frac{H_1}{H_2}\right],\cdots,\left[\frac{H_{s-1}}{H_s}\right]$$

都是素数．

伽罗瓦的工作，开创了置换群论的研究，从而确立了代数方程的可解性理论，彻底解决了代数方程根式解难题，具有划时代的意义．

参考文献 [15,pp.169～174],[10,pp.92～96].

(刘云章)

复数域能不能再扩充(Can complex field be extended or not)

复数可以表示平面向量，在物理上有着广泛应用．于是人们很自然地想到，能不能仿照复数集找到“三维复数”，用以表示空间

向量呢?爱尔兰的数学家哈密顿首先发现,要想在实数基础上建立三维复数,使它具有实数和复数的各种运算性质,这是不可能的.他进而研究"四维复数",得到所谓四元数,并于1857年发表了《四元数讲义》.他逝世后的第二年,即1866年出版了《四元数原理》.

复数仅有两个单位1与i,而四元数有四个单位1、i、j、k,一般的四元数的形式是

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k},$$

这里,i、j、k是空间笛卡尔直角坐标系中三个坐标轴上的单位向量,类似于复数的虚数单位;a、b、c、d是实数,称为四元数的系数.

两个四元数相等被规定为对应系数分别相等.

四元数的加减法和一般复数的加减法相同,也满足交换律和结合律.四元数的乘法满足结合律但并不满足交换律,这是和实数、复数最显著的不同,也正因为如此,四元数集不能构成数域.人们称它为广域.

正当哈密顿建立他的四元数时,德国数学家格拉斯曼正在建立复数的另一个更大胆的推广.格拉斯曼引进了一种有n个分量的超复数,并且有效地定义了这种超复数的各种运算,从而,就产生了以这种超复数为对象的所谓格拉斯曼代数.

由于哈密顿和格拉斯曼工作的影响,19世纪中叶后,一系列超复数系统相继引出.1847年,凯莱给出了实四元数的一个八单元推广,建立了他的八元数论,其中乘法的结合律不成立.1853年,哈密顿又引进了以复数为系数的所谓拟四元数,两个不等于零的拟四元数之积可以为零.1873年,英国的Clifford(1845~1879)也用拟四元数的名字给出与哈密顿拟四元数不同的另一种超复数.

在引进各种超复数的同一期间,数学家们也开始考虑建立超复数的自由度问题.高斯深信,保持复数基本性质的复数的扩张

是不可能的，但他未给出证明．1861 年，魏尔斯特拉斯证明了：对于实数域上的 n 维向量空间，当 $n>2$ 时，无法定义乘法运算，使它成为域．约在 1870 年，戴德金也获得了同样的结果．这就是说，复数域是保持实数基本运算性质的最后扩张．因此，人们只称二维向量为复数，而不称其他向量为复数．

四元数以及一般的 n 维超复数在力学、磁学、晶体学等方面有所应用．但它们在数学上所起的作用不大，无法与复数的作用相比较．

参考文献 [16，pp. 457～462]，[35，pp. 174～194]．

（刘云章）

六 高等几何

欧几里得公理系统是否严谨(Is Euclid axiom system strict?)

公元前 3 世纪，欧几里得的名著《几何原本》，从少数概念及 5 条公设、5 条公理推出了 467 条定理，被人们看做是严格性方面的典范．其实，欧几里得之后的数学家们早就看到欧几里得的公理系统在逻辑上也有不严谨之处．

欧几里得的公理系统不具有完备性，缺少连续公理、运动公理及顺序公理，因而《几何原本》中在证明命题时，有时不得不借助于直观．例如，在第一卷命题 1 中假定了"当两圆的一个通过其他一个的中心时，必有共同的交点"，这假定必须以圆的连续性为其前提，但欧几里得公理系统中没有连续性公理．在第一卷命题 4 中断言："若一个三角形的两边和其夹角相应地等于另一个三角形的两边和其夹角，那么这两个三角形相等．"欧几里得应用把一个三角形重合到另一个上的方法．重合上去的手续是以运动为前提的，可见，这里欧几里得是借助于运动的性质，然而在欧几里得公理系统中没有相应的公理．《几何原本》中，还几次利用了"介于"的概念．

但他完全是依靠图形上的观察，没有把这个概念的重要性质列为顺序公理.

欧几里得试图给公理所讨论的基本对象及关系都给出定义，这是不可能的. 问题在于解说各个概念不能局限于定义的形式，因为下定义要用到另一个概念，而这一概念也要有它的定义，这样势必无止境的追求下去. 因此，欧几里得公理系统中很多定义含糊其辞. 例如，《几何原本》第一卷中给“点”、“线”、“面”下了定义，但他的定义是描述性的、模糊的(详见**什么叫点、线、面**)，不起什么逻辑作用. 在第五卷中把比例关系的理论推广到不可公度量，多次利用“量”的概念，但没有真正给出“量”的定义.

尽管欧几里得公理系统有这样那样的缺点，但它是现代公理法的雏形.

参考文献 [27，pp. 10～17]，[33，pp. 97～99].

（刘云章）

什么叫点、线、面(What is Point、Line and Face)

欧几里得在他的《几何原本》中给“点”、“线”、“面”下了定义：“点是没有部分的”，“线是有长度而没有宽度的”，“直线是关于它的任何点一样放置着的”，“面是只有长度和宽度的”，“平面是关于它的任何直线一样地摊放着的”. 这些定义是模糊的，他在建立几何学时，事实上完全不利用这些内容. 有人认为欧几里得可能没有认识到开头一些概念必然是未经定义的，因而不自觉地用物理概念来解释它们. 也有人认为，他认识到这些定义在逻辑上没有作用，但想解释一下他所用名词的直观意义，以使读者相信公理和公设是能应用到这些概念上去的.

欧几里得以后，不少数学家们作了改进欧几里得公理系统的尝试，试图消除《几何原本》中逻辑上的缺点，对于“线”、“面”给出了不同的定义. 阿基米德说：“直线是两点间的最短距离”，“由同一环路所围成的平面比曲面小些”. 勒让德在其《几何原本》里也定义

直线为最短道路. 4 世纪,希腊的 Proclus(410～485)说:"直线是两点间的线段合于其间距离的线","直线是无限延伸的线","直线是其任何部分在其上可以滑走的线","直线是当拉紧其两端时仍旧不动的线","平面是无限延伸的面","平面是其任何部分在其上可以滑走的面","平面是关于其上的任何直线有同一关系的面","平面是与它有两共同点的任何直线一定在其上的面".

阿拉伯的亚那里奇说:"设一线上的两点经常固定着的时候,这线便也固定了. 这线叫做直线.""设一面上从任何一点到另外任何一点常可引直线. 这种面叫做平面."

俄国数学家罗巴切夫斯基曾经提出直线和平面的有趣定义. 他首先定义了球面,作为与定点(中心)有同一距离的点的轨迹,且从此定义平面和直线."平面是两点——发生中心——的周围所作两同等球面相交的圆所在的面."再利用运动来定义直线:"凡线上的两点间的部分在任何位置可以遮盖其本身,这种线叫做直线. 在圆的平面上把圆从反面遮盖它本身时,凡平面上的点的位置仍旧不改变的线是这类的."

这些几何基本概念的定义并没有在几何基础里带来多大的改进,它们仍然不起什么逻辑作用,但它们促进了现代公理法的建立.

德国数学家希尔伯特总结前人工作,写出了划时代的名著《几何基础》(1899),用现代观点建立了欧几里得的公理体系. 希尔伯特抛弃欧几里得的打算,他把"点"、"直线"、"平面"作为原始概念,并且把原始概念之间的"属于"、"介于"、"全等于"作为基本关系,然后使用它们定义几何学里的其他概念,至于这些原始概念与关系不再使用定义的形式而改用完整的一套公理(结合公理、顺序公理、合同公理、平行公理及连续公理)来制约它们的意义,这些原始概念和关系的一切特性,凡在几何学中所必需的,都用公理来反映,至于它们的其他特性就不加规定,这样就形成了现代公理法.

从现代公理法的观点来看，几何学的点、直线和平面可以理解为任何东西，只要它们适合基本关系，满足整套公理的要求就行．正如希尔伯特所说，在一切几何命题中，“我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面”．“欧几里得关于点、直线和平面的定义，在数学上其实并不重要．它们成为讨论的中心，仅仅是由于它们同所选择的诸公理的关系．换句话说，不论是管它们叫点、线、面，还是桌子、椅子、啤酒杯，它们都能成为这样一种对象：对它而言，公理所表述的关系都成立．在某种意义上好像是说：一个未知的单词，当它在各种上下文之中出现，其意义就越来越清楚．每一个用到这个单词的新的语句，都会淘汰掉某些意义，而在先前的陈述中，这被淘汰的意义一直是成立的”．

参考文献 [27，pp．23～27]，[40，pp．72～76]．

（刘云章）

平行公设问题（Problem of parallel axiom） 欧几里得第五公设是否可以证明？

欧几里得在《几何原本》第一卷中先给出了23个定义，接着就列出5个公设及5个定理．在欧几里得心目中，公理与公设似乎有些微妙区别，但后来，人们对它们往往不加区别，统称为公理．其中第五个公设是：

“如果一直线和两直线相交，所构成的两个同侧的内角之和小于两直角，那么，把这两直线延长，它们一定相交于该侧的一点．”

这就是著名的“欧几里得第五公设”．

欧几里得建立这条公设，足以显示出他的天才．然而许多希腊人反对这一公设，因为它不那么一望而知，从而不像别的公设那样被人一下子接受．而且这个公设在《几何原本》中的应用很迟，仅在命题29中有了唯一的应用．这就意味着欧几里得是在处于无可奈何的情况下才把它看做公设的．这样，人们就怀疑第五公设是否能从其他命题逻辑推导出来．

在欧几里得以后的两千年期间，很难找到一个没有去试证第五公设的大数学家.可惜，不是证明有错误，就是用另一条等价的公理取代第五公设.在多不胜数的等价命题中，形式上比较简明的主要有：1741 年法国 Clairaut(1713～1765)提出的"如果四边形的三个内角是直角，那么第四个内角也必定是直角"；1769 年 Fenn 提出的"两相交直线不能同时平行于第三条直线"；1795 年苏格兰的 Playfair(1748～1819)提出的"过直线外一点，有且只有一条直线与这直线平行"等.

由于 Playfair 的命题最简明，因此受到普遍采用，现在的各国教科书中通常都用这一形式来代替第五公设，这一公设也叫平行公设.当然，这种替代并没有从根本上解决第五公设问题.虽然这些替代的命题都是在证明第五公设中产生的，但证明过程中所出现的各种思想方法，却对几何学的发展，特别是非欧几何的产生和发展起着积极而又重要的作用.

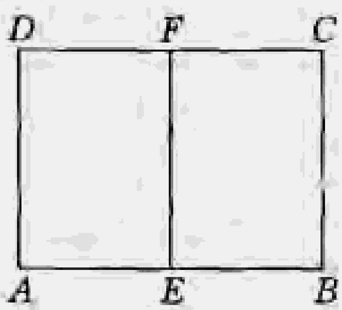


图 5-5

几百年中，人们直接证明的工作都宣告失败，这就启发人们用间接证法.如意大利的 Saccheri(1667～1733)，从与平行公设相对立的假设出发，企图引出矛盾，用反证法证明平行公设.如图 5-5 的四边形 $ABCD$，其中$\angle A$和$\angle B$是直角，并且 $AD=BC$.他证明了该四边形的中线 EF 垂直于双方底边并且 $\angle C=\angle D$.关于$\angle C$与$\angle D$的大小，他提出三个假设：① $\angle C$和$\angle D$是直角；② $\angle C$和$\angle D$是钝角；③ $\angle C$和$\angle D$是锐角.其中，直角假设是说明了矩形的存在，与欧几里得第五公设等价.Saccheri 假定直角假设不成立，企图由此推出矛盾.他首先考察钝角假设，很快推出矛盾；然后他考察锐角假设，结果推出一系列命题.他发现其中有些推论难以置信，却又找不出矛盾.Saccheri 尽管找不到逻辑上的矛盾，但考虑到这些推论违背了人们的经验，因而断言锐角假设一定

不能成立，断言欧几里得第五公设成立，并于1733年出版了《欧几里得无懈可击》一书．事实上，Saccheri在锐角假设下已得到了一系列有价值的属于新几何的命题，他本身不明了这一点而认为得到了矛盾．在这些方面做了大量工作的还有法国的勒让德，德国的Kliigel（1739～1812）、兰伯特、Schweikart（1780～1859）和Taurinus（1794～1874）等．

1816年，Schweikart得出结论：应该承认存在两种几何，一种是欧氏几何，另一种是建立在三角形三内角之和小于两直角假设下的几何．他还认为，后一种几何也许要在星际空间中才能证明它是正确的，因此他称此为星空几何．他的外甥Taurinus证明了虚半径球面上成立的公式刚好是星空几何中所成立的．

19世纪，德国的数学家们做了大量的工作：肯定平行公设的独立性；确定非欧几何的存在；注意到实球面上的几何具有以钝角假设为基础的几何性质，而虚球面上的几何具有以锐角假设为基础的几何性质；等等．不过，他们只肯定了非欧几何存在的可能性，而未看到非欧几何也能像欧氏几何一样，正确地描述物质空间．但他们的工作也为新几何的建立奠定了基础．

对第五公设的怀疑与探索，经过两千多年的迂回曲折的道路，最终导致新几何的产生．

非欧几何的创立主要归功于俄国的罗巴切夫斯基，其次是高斯和匈牙利的J. Bolyai（1802～1860）．

罗巴切夫斯基起初也试图直接证明第五公设，但很快改变了主意，用如下的命题代替第五公设："过已知线外一点至少可作两条直线和已知直线不相交．"从而发展出与欧氏几何不同的几何系统．1826年2月23日，罗巴切夫斯基在喀山大学宣读了他的论文：《几何学原理简述和平行线定理的严格证明》．这篇论文原稿被校方遗失．1829年，他在《喀山通报》上发表了《几何学原理》，这是世界上最早的非欧几何文献．之后，他又陆续发表了一系列有关

论著.他把这种几何称为"虚几何学"、"想象的几何"、"泛几何",人们称之为"罗巴切夫斯基几何"(又称"双曲几何").罗巴切夫斯基的革命思想违背了当时人们的常识,从而遭到嘲弄和打击.直到他死后,高斯的通信录公开发表,新几何才渐渐引起数学界的重视.

人们从高斯死后发表的通信录看出,高斯第一个发现了非欧几何的存在,他在少年时代就开始思考第五公设问题.1799 年,他已意识到第五公设不能从其余的欧几里得公理推导出来,开始探索新几何,1813 年,已形成比较完整的新几何的思想.最初他称之为"反欧几里得几何",后称"星空几何",最后才定名为"非欧几何".但高斯生前没有发表过非欧几何的正式论著,怕受人耻笑,怕愚蠢人的嚷嚷.

J. Bolyai 的父亲 F. Bolyai 曾致力于第五公设的试证,成就不突出,而 J. Bolyai 在 1823 年左右建立了非欧几何,他称之为"绝对几何".1832 年发表了他的论文《绝对空间的科学》(作为他父亲一本几何著作的附录),比罗巴切夫斯基 1829 年正式发表的第一篇非欧几何论文晚了三年.

稍后,黎曼又提出了另一种不同于罗氏几何的新假设:"在一平面上通过已知直线外的一点,不可能引出直线使与原有直线不相交."而引出另一种非欧几何,即黎曼几何(又称椭圆几何).黎曼在 1854 年发表了著名演说《关于作为几何学基础的假设》,提出了更为一般的几何空间——广义黎曼空间,其中各点曲率可以不同.特别地,当曲率 ρ 是常数时,可以得到三种特殊的空间:$\rho=0$,对应普通欧氏空间;$\rho<0$,对应罗巴切夫斯基空间(亦称双曲空间);$\rho>0$,对应(狭义)黎曼空间(亦称椭圆空间).在黎曼空间中,任何两条直线都不平行.传说,当时在演讲大厅里能领悟黎曼思想深刻性的仅高斯一人,由于高斯的去世,黎曼的演说在当时没有得到应有的评价.直到他去世后的第二年(1868)这一学说才正式公布.后来,随着爱因斯坦广义相对论的建立,黎曼几何得到很

大的发展,成为现代微分几何的基础.

参考文献　[27,pp. 27～40],[15,pp. 226～232],[35,pp. 277～291].

(刘云章)

非欧几何的合理性问题(Problem of Non-Euclidean geometries rationalization)

19世纪中叶起,数学家们大多是采取相对的证明方法:把非欧几何的相容性建立在欧氏几何的相容性上.即设法在欧几里得几何中找某种对象的系统,使这些对象能满足非欧几何的公理.

1827年高斯发现,要能把曲面的一部分移到另一部分上的一个必要条件是曲面有常曲率.稍后,德国数学家Minding(1806～1885)进一步证明了,如果两张曲面恰有相等的常曲率,则可以把一张曲面等距映射到另一张曲面上.这个结论对证明非欧几何的相容性有根本意义.因为,如果能对非欧几何空间作出常数曲率的判定,并且在欧氏空间中找到能表现非欧几何的曲面,那么也就证明了非欧几何是相容的(相对的).Minding对伪球面的研究,发现了它与罗巴切夫斯基几何相符合的不少性质.然而他没有意识到罗氏非欧几何"正是在伪球面上的抽象地叙述的几何学".对伪球面作进一步研究并发现上述事实的,是意大利数学家贝尔特拉米.

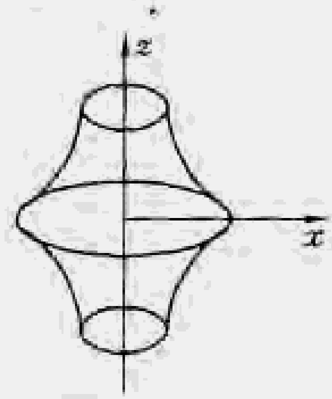


图5-6

伪球面(图5-6),是由一条名为曳物线的曲线绕渐近线旋转而成的,曳物线方程是

$$z=\pm\left(k\ln\frac{k+\sqrt{k^2-x^2}}{x}-\sqrt{k^2-x^2}\right),$$

曲面方程为

$$z=\pm\left[k\ln\frac{\sqrt{k^2-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{k^2-x^2-y^2}\right].$$

在一个曲面上连结两点的最短曲线，叫做这个曲面的测地线.因为在平面里直线是连结两点的最短线，所以在一个曲面上也可把测地线看成这个曲面的"直线".曲面上任意两条曲线的交角，像通常一样，定义成它们在交点处的切线的夹角.这样一来，在每个曲面上就可建立它自己的一套几何学，叫做这个曲面的内蕴几何.贝尔特拉米证明了伪球面具有负的常数曲率$-\frac{1}{k^2}$，并且进一步指出，如果把曲面上的测地线看做直线，那么罗氏非欧几何平面就可以在伪球面上实现.这就是说，伪球面的内蕴几何反映了罗氏非欧几何，或者说罗氏非欧几何定理描述了伪球面上的几何事实.

伪球面只能作为罗氏非欧几何有限区域的模型.所以贝尔特拉米没有解决在整个平面上或在空间中解释罗氏非欧几何的相容性以及现实意义的问题.

1869年，F.克莱因在《关于凯莱二次绝对形决定射影距离的报告》中，提出了一个可适用整个罗氏平面的罗氏非欧几何模型.其基本思想是这样的：首先考虑通常欧几里得几何的对象，然后对某些对象以及它们之间的一些关系，按照能使它们呈现出非欧几何特性的方法给予重新命名.对于二维情况，克莱因所作的非欧几何模型是普通欧氏平面上的一个圆的内部，其中非欧几何的点是圆的内点，非欧几何的直线是圆的弦(不包括处于圆周上的点)，而整个非欧几何平面即圆的内部.在这个几何中所施行的变换称之为"移动"，它是把圆变成自己且不改变弦的平直性的变换.不难验证，罗氏非欧几何的公理都可以在这个模型中用普通几何的事实来加以解释.例如，罗氏非欧几何中的平行公理"过不在已知直线上的一点，至少可以引两条直线，不与已知直线相交"，翻译成克

莱因非欧模型中的语言就是“过圆内不在已知弦上的点，至少可以引两条弦，不与已知弦相交”. 而这是明显的(见图 5-7). 至于罗氏几何的其他公理，都与欧氏几何中的公理是一样的，因而在欧氏平面上建立的模型中，是当然满足的.

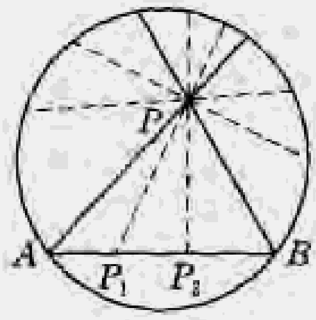


图 5-7

F. 克莱因还利用凯莱的思想，在射影几何框架中研究非欧几何. 1853 年，凯莱用一条任意的二次曲线代替虚圆点，把这条特定的二次曲线称为绝对形，利用它来定义长度和角度. 推广到空间的情况，则用一个任意的二次曲面作为绝对形. F. 克莱因发展了凯莱的思想. 他证明了，在三维空间中，当绝对形选作实椭球面、实椭圆抛物面或实双叶双曲面时，便得到负常曲率的几何，即罗氏几何；当绝对形选作非退化虚曲面时，便得到正常曲率几何，即黎曼几何；当绝对形选作球面虚圆时，便得到欧氏几何. 这样 F. 克莱因从另一途径再次证明了确实存在着使欧几里得第五公设不成立的几何.

非欧几何的合理性，还被它们的物理应用所证实. 数学家可以随意考虑一种“几何”，用一组关于“点”、“直线”等等的相容公理来定义它；然而，只有当这些公理与现实世界的某些具体对象的物理状态相符时，它的研究对物理学家才是有用的. 正是因为这个原因，F. 克莱因之后仍有不少人致力于非欧几何模型的建立. 1882 年，庞加莱联系自守函数的研究，给出了罗氏几何的又一个模型. 庞加莱把“光线沿一直线运动”作为“直线”的物理定义；把一个世界想象成是由圆 C 的内部组成的，使得光线在圆内任一点的速度等于该点到圆周的距离(图 5-8). 可以证明，这时光线将取圆弧的形式，并在它们的端点垂直于圆周 C. 在这样的世界中，用光线定义的“直线”的几何性质将不同于欧几里得的直线性质. 特别是平行公设将不成立，因为过任意点将有无穷多条“直线”与一给定

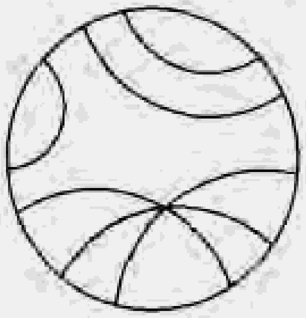


图 5-8

"直线"不相交.事实上,这个世界上的"点"和"直线",恰有克莱因模型中"点"和"直线"的几何性质.换句话说,我们将有罗氏几何的另一个模型.但是,欧几里得几何也将适用于这个世界,只要把光线定义为垂直于 C 的欧几里得圆.可见不同的几何体系能描述同样的物理状态,只要这物理对象(这里是光线)能与这两个体系中各自的概念相联系:.

光线→"直线"→罗氏几何,

光线→"圆"→欧几里得几何.

由于欧几里得几何中的直线概念相当于均匀介质中光线的性质,我们说圆 C 内部区域的几何是罗氏的,这只意味着,在那世界上光线的物理性质相当于罗氏几何的"直线"性质.

现在,非欧几何已发展成为对物理世界极为有用的工具.在相对论、光学和波的传播的一般理论中,对现象进行非欧几里得的描述有时比欧几里得的描述更为合适.

参考文献 [32,pp.291~294],[16,pp.408~413],[35,pp.327~340].

(刘云章)

七 拓扑学

七桥问题(Seven bridges problem) 哥尼斯堡城位于北欧,布勒格尔河流经市区,河中有两个小岛(图 5-9),小岛与河岸有七桥相连.一个游人能不能既不重复、也不遗漏地一次走遍这七座桥而回到原出发地?

18 世纪,该问题传遍欧洲,成为全欧难题,引起了欧拉的兴

趣，许多人的失败，引起他深思，也许并不存在这种走法. 为了证实这种猜想，欧拉首先考虑"穷举法". 他仔细地把所有可能的走法列成表格，逐一检查，实在太困难了. 他又想到，如果在同样的问题中，桥更多时，那这种"穷举法"就毫无实用价值了，因此，他放弃了穷举法.

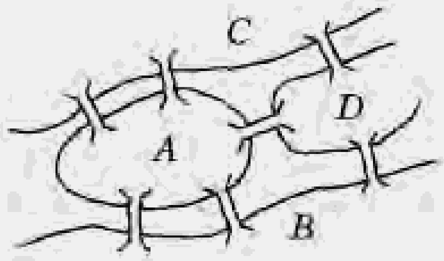


图 5-9

欧拉改变了他考虑问题的方法. 他发现岛的大小、形状以及桥的长度都无关紧要，而相互之间的连接关系才是问题的实质. 因此，欧拉就把小岛 A、D 与两岸 B、C 都用相应的"点"来表示，而连接两地的桥则表示为连接两"点"的弧线（如图 5-10）（这个图画成什么样子是次要的，但不能改变元素之间的结合关系）. 那么通过一座桥就可看做画出一条弧，而不重复地通过七座桥就要一笔画出七条弧所组成的图形. 这样问题就转化成"一笔画"问题了.

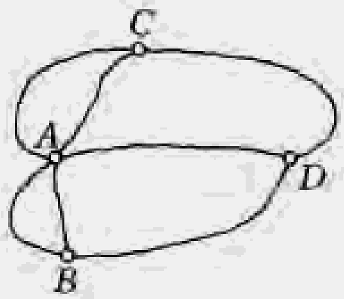


图 5-10

对于这类问题，欧拉的考虑方法是：如果存在一种一笔画的方法，那么顶点总可以分成两类：一类是起笔点和落笔点（它们也可能合为一点）；另一类是中间经过点.

画笔每经过某个中间点一次时，总经过两条不同的边（一"进"，一"出"），所以每个中间点的结合度（经过某顶点的边的数目称为该顶点的结合度）必须是偶数.

对于起笔点和落笔点，又可分两种情形：（1）它们不是同一点. 由于起笔时只经过一条边，以后的画笔再经过起笔点时，因为不能停笔，就须再经过两条不同的边. 所以这时起笔点的结合度应为奇数，同理，落笔点的结合度也应为奇数.（2）起笔点和落笔点重合. 这时，因落笔时必经过一条不同的边才能达到起笔点，不管

画笔中途是否经过该点，这时起笔点的结合度总是偶数.

可见，一个平面图可一笔画成的必要条件为：或者只有两个顶点的结合度为奇数，或者所有顶点的结合度为偶数. 在图 5-10 中四个顶点的结合度都是奇数，因此不能一笔画成. 这样，也就证明了"七桥"不能一次不重复地走遍.

1736 年，欧拉解决这问题后，在彼得堡科学院做了一个科学报告. 七桥问题成为拓扑学分支图论的先声.

参考文献 [15, p. 239], [36, pp. 267～268].

（刘云章）

Jordan 曲线定理（Jordan curve theorem） 平面上的简单闭曲线 J，把这平面分成两个区域（即曲线 J 的内部与外部）. 这就意味着在同一区域内任意一对点可以用与 J 不相交的曲线连接起来，而属于不同区域的一对点都不能用与 J 不相交的任何曲线连接起来. 这里的简单闭曲线是指同胚（拓扑等价）于圆的闭曲线.

这个定理是 M. E. C. Jordan (1838～1922) 在他的分析教程 *Cours d'Analyse* (1887) 中给出的，它是拓扑学中的一个重要定理，但 Jordan 给出的证明中存在缺陷，后由 O. Veblen (1880～1960) 于 1905 年作了严密的证明.

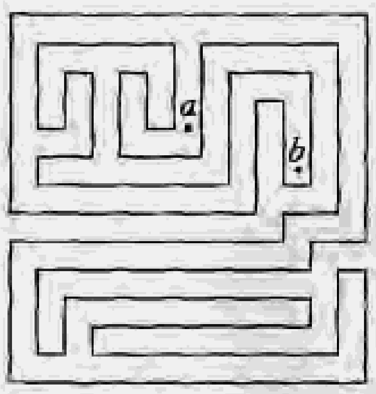


图 5-11

当简单闭曲线为圆、椭圆和凸多边形时，该定理显然是成立的. 但对于如图 5-11 那样繁杂的多边形，就不那样显然了（如不能立刻看出点 a、b 是在它的内部或外部）. 下面仅就 J 为多边形 P 的情形下给出证明. 就是说，把平面上不属于 P 的点分为 A 与 B 两类，其中 A 形成多边形 P 的外部，B 形成它的内部，使得同类中任何两点可以用不和 P 相交的折线连接起来，而连接 A 中的点与 B 中的点的任何折线都必与 P 相交.

因为多边形 P 只有有限多条边，所以在平面上必可选取一个与 P 的任何一条边都不平行的固定方向 α. 现过不在 P 上的点 x 作与 α 平行的射线，如果与 P 的交点的个数为偶数(0,2,4,6,…)，就说 x 属于 A 类；如果与 P 的交点的个数为奇数(1,3,5,…)，就说它属于 B 类. 当射线通过顶点时，如果相交于这顶点的 P 的两边在射线的同旁，则这个顶点就不算作交点；如果相交于这个顶点的 P 的两边在射线的两旁，则这个顶点就算作一个交点. 如图 5－12，过 x_1 的射线与 P 有三个交点，过 x_3 的射线与 P 有两个交点. 如果两个点同属于一类(A 或 B)，就说它们有相同的奇偶性，如图中的点 x_1 与 x_3. .

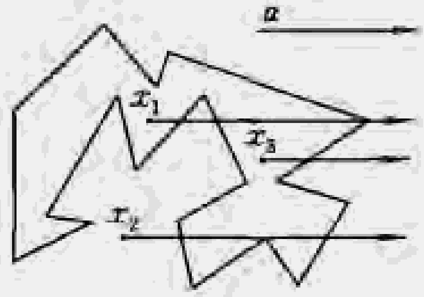


图 5－12

因为与 P 没有公共点的任一线段上的点 x，当它沿着这线段运动时，它的交点个数的奇偶性只有在按固定方向作的射线通过 P 的顶点处才会改变，而不论位于这顶点的 P 的两边在该射线的同旁或两旁，其交点的个数只可能改变偶数个，所以这线段上点的奇偶性不会改变. 由此得出结论：如果用折线连接 A 中任意一点 x 与 B 中的任意一点 y，则这条折线必与 P 相交. 否则的话，这条折线上的所有点，特别是点 x 和 y 就会有相同的奇偶性，这是不可能的.

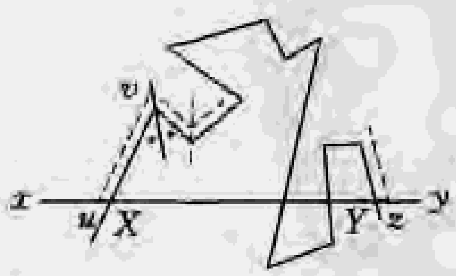


图 5－13

进而我们来给出：同一类(A 或 B)中的任意两点能用一条不与 P 相交的折线连接起来. 设这两点为 x 和 y，连接 x 和 y，如果它不与 P 相交，那么线段 xy 就是所求的折线. 如果它和 P 相交，并设 X 是和 P 的第一个交点，Y 是和 P 的最末一个交点. 现在我们来作这样一条折线：先沿

着 xX，在到达 X 之前的某一点 u，作过 u 沿着 P 前进的方向的边的平行线，设与 P 的第一个顶点的角平分线相交于一点 v，继而过这交点 v 再作前进方向的边的平行线等，直到作 P 与 xy 的最末一个交点 Y 所在的那一条边的平行线，设该平行线与 xy 交于点 z，如果 z 在 Yy 之间，那么折线 $xuv\cdots zy$ 与 P 不相交，它就是所求的折线. 事实上 z 不可能在 XY 之间，这是因为位于 P 的某一边异侧的彼此充分接近的两个点，过它们所作的射线与 P 的交点个数恰好相差一个，故必有不同的奇偶性，于是当 z 越过 Y 点，奇偶性就发生改变，而 x 和 y 有相同的奇偶性，从而虚线所表示的折线上的任意一点都有相同的奇偶性，可见虚线折线必在 Y 与 y 之间和 xy 相交.

上面就多边形的情形证明了 Jordan 曲线定理，从而也可以把 P 的外部与类 A 统一起来，因为沿固定方向的射线把它移到充分远处，就不再与 P 相交，也就是这种点的"奇偶性"为零，所以它属于 A 类，于是剩下的 P 的内部与 B 类也就一致了. 由此可知，无论简单多边形怎样繁杂，要决定一个点是在它的外部或内部，只要通过画射线并计算其交点个数是偶数或奇数就可以确定了.

参考文献 [32，pp. 314～316，pp. 341～344]，[13，pp. 520～521，p. 606].

（郑君文）

麦比乌斯带（Möbius strip） 是否存在单侧曲面?

通常的曲面都是双侧的，如圆面（或圆盘）和圆环（它们是以曲线为边界的曲面），以及球面和环面这样的闭曲面等. 双侧曲面能涂上不同的颜色以区别它的两侧. 对于有边界的曲面，两种颜色只沿着这些边界曲线相遇，而对于闭曲面来说，两种颜色决不可能相遇. 当一只小虫在这样的曲面上爬行时，对于闭曲面的情形，它只能永远处于曲面的同一侧（如果它不咬破一个小洞的话），而对于有边界的曲面，只有越过边界曲线，它才能爬到曲面的另一侧.

1858 年，麦比乌斯在应答巴黎科学院悬赏征答多面体理论时，发现了单侧曲面的存在. 取一矩形纸条(如图 5-14)，使两边 AB 与 $A'B'$ 按箭头所指的相同方向把它们粘贴起来，就得到了一个圆柱面(它是有两条边的双侧曲面)；如果把矩形纸条(如图 5-15)一端扭转 180°，使 AB 与 $A'B'$ 粘贴起来，则也得到一个曲面，它只有一条边，即它的边界是由一条闭曲线组成，且仅用一种颜色就可以涂遍整个曲面. 如果一只小虫从这曲面上一点 P 出发向前爬行，不用越过边界曲线，就能到达背面对着 P 的那点 P'. 可见这种曲面与通常的双侧曲面不同，它分不出"正面"和"反面"，"这一侧"和"那一侧"，是一种单侧曲面，称之为麦比乌斯带. 应当指出，J. B. Listing(1808～1882)也于 1858 年独立地发现了单侧曲面.

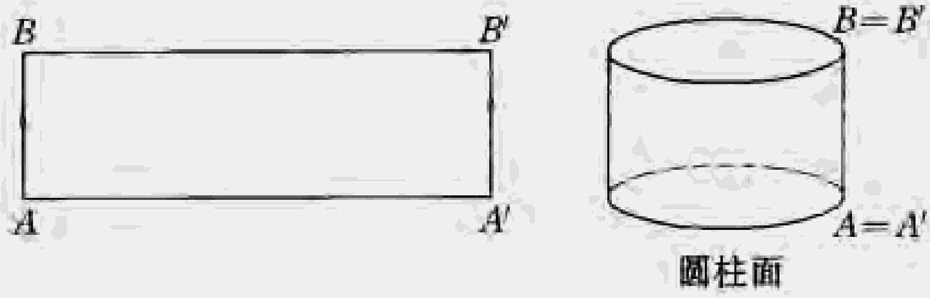


图 5-14

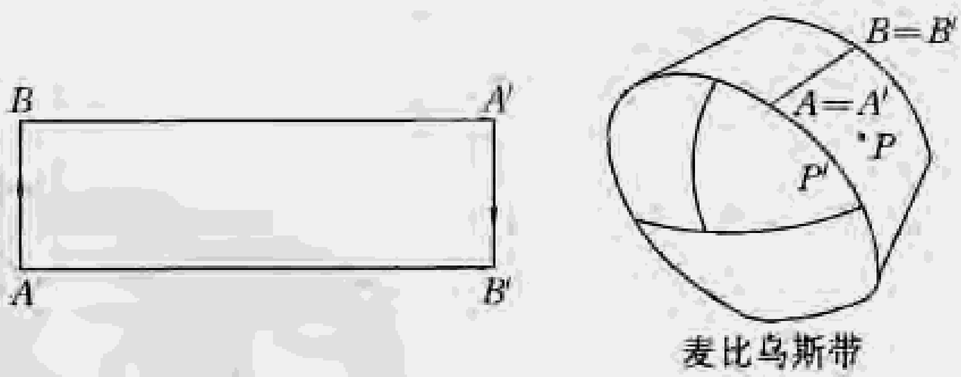


图 5-15

麦比乌斯带有许多性质，例如沿着它的中间线剪开，并不被分成两个部分，而成为一个扭转得更多一些的曲面(它也可由矩形纸条的一端扭转 360°，再与对边粘贴而得到). 如果把得到的曲面再

沿着它的中间线剪开，就成为互相串在一起的两个曲面了.

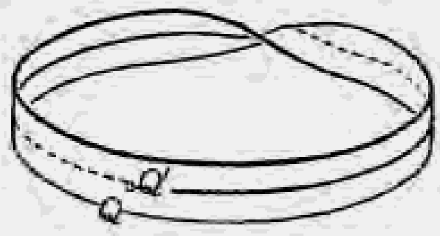


图 5-16

麦比乌斯带的一个重要性质就是"不可定向性". 我们设想给定曲面上的每一点(对具有边界的曲面，则要除去边界曲线上的点)都被完全在曲面上的一条小闭曲线所包围，并规定充分靠近的两条小闭曲线的指向相同. 如果规定这样一种进行的指向是可能的，则称该规定为曲面的一个定向，而这曲面称为可定向的. 显然圆面、球面是可定向的，但麦比乌斯带是不可定向的. 这是因为麦比乌斯带上选好了一条曲线 QQ'(其中 Q 与 Q' 作为叠合的点)，并给出包围 Q 的小闭曲线的一个指向，进而在整条曲线 QQ' 都一直沿用它. 然而当点沿着这曲线运动到 $Q'=Q$ 时，则伴随着 Q' 的指向必与 Q 的相反. 这就是说，麦比乌斯带是不可定向的曲面. 事实上，曲面的双侧与单侧之分和曲面的可定向与不可定向之别完全是一回事.

麦比乌斯带的奇妙特性，历来吸引着许多人步入拓扑学的殿堂，它为推进这学科的发展起着不可估量的作用. 同时它还有实际应用，1923 年，李·德·福莱特以他设计的麦比乌斯电影带获得了美国 No. 1 442 632 号专利，它能够做到"两面"录音. 最近这个思想又被应用于磁带录音机. 此外，麦比乌斯带还被应用于运输带，使其"两面"做到大体上同样的磨损.

美国首都华盛顿的历史和技术博物馆的入口处前面，有一个 8 英尺高的钢制麦比乌斯带，它在慢慢地旋转着，吸引了大批的观光客. 著名的荷兰大艺术家埃歇尔也有不少这方面的木刻佳作.

参考文献 [32, pp. 333～334], [30, pp. 304～305], [36, pp. 269～273], [13, p. 421], [11, p. 21], [46], [47, p. 166], [48, p. 134], [49, p. 112].

(谈祥柏 张文华 郑君文)

闭曲面的分类定理(Classification theorem for closed surface) 设 S 是球面、S_h 是具有 $h(h \geqslant 0)$个环柄的球面,Q_k 是具有 k $(k \geqslant 0)$个交叉帽的球面,则:(1) S_h 的欧拉示性数为 $2-2h$,Q_k 的欧拉示性数为 $2-k$;(2) 任何一个闭曲面或者同胚于 S,或者同胚于 S_h、Q_k 中的某一个;(3) 两个闭曲面有相同的欧拉示性数和相同的单侧性或双侧性,它们就是同类的,否则就不同类.

曾有许多人研究过闭曲面的拓扑分类,其中尤以麦比乌斯、Jordan、黎曼、克莱因等人的贡献最大. 克莱因用直观的几何观点整理了黎曼曲面理论,提出用 p 个环柄的球面代替黎曼多叶曲面;他还注意到曲面的可定向性(双侧性)和不可定向性(单侧性),证明了射影平面的不可定向性,并且概括前人的结果得出两个可定向(双侧)曲面同胚的充要条件是它们的亏格(或欧拉示性数)相等.

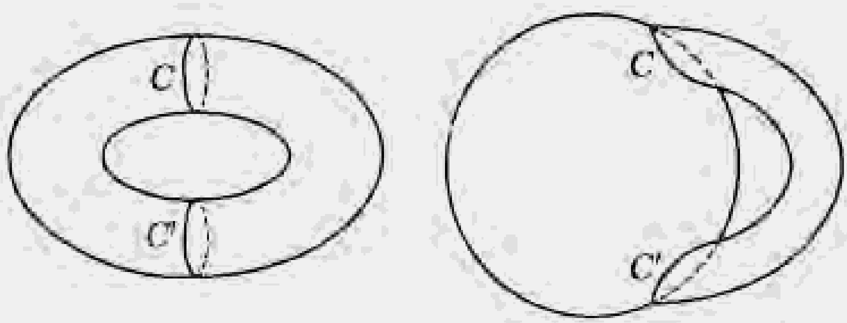


图 5-17

我们知道,零类多面体可以拓扑变形为球面. 多面体的顶点、棱、面就变换为球面上的顶点、曲线和曲面(球面的一部分),且顶点数等保持不变,所以零类多面体与球面的欧拉示性数相等,都等于 2,即 $V-E+F=V'-E'+F'=2$(见**多面体的欧拉定理**). 对于环面,可以用两条简单闭曲线把它们分成两部分,其中一部分拓扑变形为有两个洞的球面,另一部分则拓扑变形为弯曲的环柄(实际上是弯曲的圆柱面). 一般地,有 h 个孔的闭曲面,可以拓扑变形为有 $2h$ 个洞的球面并带有 h 个环柄,而连接球面和环柄的是闭曲线 $C_1, C_1', \cdots, C_h, C_h'$. 所以把这种闭曲线叫做具有 h 个环柄

的球面 S_h，而球面 S 可看做零个环柄的球面 S_0.

把具有 h 个环柄的球面沿着 $C_1, C_1', \cdots, C_h, C_h'$ 切开(因为切开后面数不变，而增加的顶点数与边数相同，所以欧拉示性数不变)，这样就得到有 $2h$ 个洞的球面和以 C_1、C_1' 等为边界曲线的 h 个环柄. 现在把 $2h$ 个洞粘补上 $2h$ 个球冠(为该球面的一部分)成为一个完整的球面，这时球面上的顶点数、弧数(曲线数)都没有改变，只增加了 $2h$ 个面(球冠)数. 因为球面的欧拉示性数为 2，所以具有 $2h$ 个洞的球面的欧拉示性数为 $V - E + F = 2 - 2h$. 又每一个环柄都可拓扑变形为具有两个洞的球面，易知它们的欧拉示性数都为零，因此具有 h 个环柄的球面的欧拉示性数是 $2 - 2h$.

具有 h 个环柄的球面都是双侧曲面，而那环柄是弯曲的圆柱面，它可由矩形纸条粘合而成，由此可以想到把有一个洞的球面沿它的边与一麦比乌斯带的边(使边长相等)粘合起来，但在变形和粘合时，允许带子自身交叉，所以这时的麦比乌斯带称为交叉帽，得到的图形就称为具有一个交叉帽的球面 Q_1. 因为单侧性是拓扑性质，所以 Q_1 是单侧(不可定向)闭曲面. 如果球面上有 k 个洞，则沿着每个洞的边各粘合一条麦比乌斯带，就成为具有 k 个交叉帽的球面 Q_k，并且它们都是单侧曲面.

因为具有 k 个交叉帽的球面 Q_k，在未粘合麦比乌斯带之前为有 k 个洞的球面，它的欧拉示性数为 $2 - k$. 把麦比乌斯带细分为若干区域，然后把它切开，得到一个矩形，它比麦比乌斯带多了两个顶点和一条边，而面数不变，又矩形的欧拉示性数是 $V - E + F = 1$，所以麦比乌斯带的欧拉示性数为零，即 $V - E + F = 0$. 因此具有 k 个交叉帽的球面 Q_k 的欧拉示性数是 $2 - k$.

由于同胚(拓扑变形)不会改变闭曲面的单侧性或双侧性，也不会改变欧拉示性数，这样两个闭曲面只要有相同的欧拉示性数和相同的单侧性或双侧性，它们就是同胚的，即为同类. 因为 S_h $(h \geqslant 0)$ 是双侧的且欧拉示性数为 $2 - 2h$，Q_k $(k > 0)$是单

侧的且欧拉示性数为 $2-k$，所以可把闭曲面分为 $S, S_1, S_2, S_3, \cdots$ 和 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ 因此任何一个闭曲面必同胚于 S_h 或 Q_k 中的某一个.

射影平面同胚于具有一个交叉帽的球面 Q_1，所以是单侧闭曲面，它的欧拉示性数为 1.

克莱因于 1882 年构造出一个与 Q_2 同胚的闭曲面，它可由正方形的两组对边分别按箭头相同指向把它粘合得到，该闭曲面被称为克莱因瓶. 克莱因瓶可以想象为一根一头粗一头细的弯曲管子(圆柱面变形而得)，将细的一头插入粗的一头的管壁内(但不与管壁相交)，然后细的一端扩大，粗的一端缩小把它们粘合起来而得. 这里把管子细的一头插入粗的一头时并没有把曲面(管壁)穿破，可见在三维空间中是做不出克莱因瓶的(画的是示意图)，只有在四维空间中才能实现.



图 5-18

克莱因瓶是无边、无内外之分的单侧闭曲面，它的欧拉示性数是零，同胚于具有两个交叉帽的球面 Q_2.

参考文献 [9, pp. 33～42], [11, p. 21], [17, p. 107], [30, pp. 306～307], [32, pp. 331～336], [36, pp. 271～273], [45, pp. 68～70], [48, pp. 134～136].

(谈祥柏 张文华 郑君文)

克莱因瓶(Klein bottle) 见闭曲面的分类定理.

布劳威尔不动点定理(Brouwer fixed point theorem) 平面内

闭单位圆盘上映为自身的任何连续映射，至少有一个不动点.

用迭代法求不动点的思想可追溯到很久之前.但真正的不动点理论起源于荷兰数学家布劳威尔的工作.从1909年开始，他以《曲面上一对一的映为自身的连续映射》为题发表了一系列论文，创立了不动点理论.其中最引人注目的就是1910年发表的、拓扑学中著名的布劳威尔不动点定理.该定理叙述简洁，应用广泛，但证明的难度很大.不论是代数拓扑的证明，还是组合拓扑的证明，以及微分拓扑的证明，都涉及拓扑学上许多复杂的概念和结果.

我们考虑平面上一个圆盘，这是由某个圆的内部和它的圆周组成的区域.我们假设这个盘子的点经过任意的连续变换，使得每一点虽然位置有所变动，但仍在圆内.例如一块薄橡皮圆盘可以被压缩、转动、折皱、拉长或以任意方式变形，不过这圆盘的每个点的最终位置仍在它原来的周界以内.布劳威尔定理断言：每一个这样的变换至少使一个点不动，即至少存在一个点，它变换后的位置和它原来的位置一样.

考虑圆盘在变换前后的情况，用反证法.假设没有一个点保持不动，也就是说，每一个点在变换后都移动到圆内或圆上的另一处.如图5－19，对原来圆盘上的每一点P都附上一个指着PP'方向的大小箭头或“向量”，这里P'是P在变换后的像.圆盘上每一点都有这样一个箭头，因为根据假设每一点都移动了.现在考虑圆边界上的点以及与之相连接的向量.所有这些向量都指向圆内，因为根据假设，没有一个点变到圆外去.如图5－20，我们从边界上某个点P_1开始，并且按逆时针方向沿着这个圆走.我们这样走时，向量的方向将改变，因为对于边界上的不同点带着各种指向不同的向量.这些向量的方向可以用由平面上一点画出的平行箭头来表示.我们注意，沿着圆从P_1又走回到P_1时，向量也转回到它原来的位置.我们把向量旋转一整周的次数称为圆上这些向量的“指

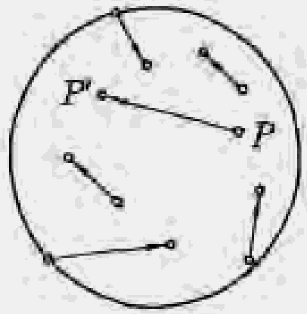


图 5-19 变换向量

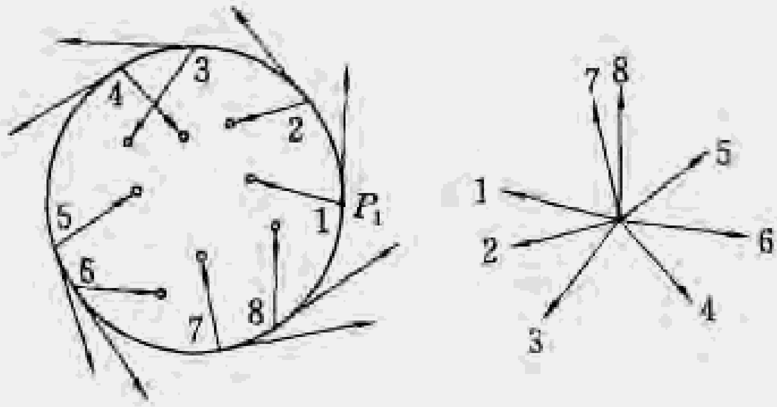


图 5-20

标”;更确切地说,我们把指标定义为这些向量的角的各种变化的代数和,每一个顺时针旋转部分取负号,而每一个逆时针旋转部分作为正的.这个指标是这些量正负相抵消后剩下的值,显然它是数 0,±1,±2,±3,… 中的一个,分别对应于角的总变化为 0°,±360°,±720°,±1080°,…现在我们断言指标等于 1,即箭头方向的总变化恰好相当于正旋转一周.为了说明这一点,我们回顾一下圆上任一点 P 的变换向量总是指向圆的内部而决不会沿着切线方向.如果变换向量转过的总角度不同于切向量转过的总角度(它是 360°,因为切向量明显地旋转一周),那么切向量转过的总角度与变换向量转过的总角度的差将是 360°的某个非零倍数,因为它们都旋转了整数周.因此从 P_1 绕一圈又回到 P_1 时,变换向量至少须绕切线旋转一周,而且由于切线和变换向量是连续转动的,在圆周的某个点上,变换向量必须指着和切线同样的方向.但是,我们已经知道这是不可能的.

现在如果我们考虑任意一个与圆盘的周界同心而且包含在这圆盘内的圆,以及这个圆上相应的变换向量,那么,这个圆上的变换向量的指标也必须是 1.这是因为当我们连续地从圆周到达任何一个同心圆时,指标必须连续地变化,因为变换向量的方向在圆盘内是从一点到一点连续变化的.但是指标只能取整数值,因此必须永远等于它原来的值 1,因为从 1 跳到某个其他的整数将造成

指标变化的不连续性.因此我们能够找到任意小的同心圆,对于它来说相应的变换向量的指标是1.但这是不可能的,因为根据变换连续性的假设,在一个充分小的圆上的向量的方向全都近似于在圆心的向量的方向.因此可以使它们的角的总变化任意地小,比如说取一个足够小的圆,使它的变化小于10°.因此必须取整数值的这个指标将为零.这个矛盾表明,我们原来所作的在变换下没有不动点的假设是不成立的,至此证明完毕.

布劳威尔定理,不仅对圆盘成立,而且对三角形和正方形以及任何其他圆盘的拓扑变换的像都成立.推广到 n 维空间后就是:

$\mathbf{R}^n$ 中有界凸闭集上映为自身的任何连续映射至少有一个不动点.

布劳威尔定理惊动了整个数学界,其意义可和高斯证明代数基本定理相媲美.不动点定理提供了一个有力的方法来证明数学中许多存在性定理,尽管这些存在性定理似乎没有什么几何特征.

参考文献 [32,pp.323～326],[8,pp.3～4],[11,p.36],[12,p.258].

(刘云章)

八 微分方程

最速降线问题(Brachistochrone problem) 设 A、B 是不在一铅直线上的两点,求连接 A、B 的曲线,使质点在重力作用下沿该曲线从 A 点滑动到 B 点的时间为最短(摩擦力和空气阻力均忽略).

伽利略在1630年和1638年曾系统地表述过这个问题,但他把所求曲线说成是圆弧,是错误的.在1696年6月号的《教师学报》上,作为向其他数学家的挑战,约翰·伯努利提出了该问题.牛顿、莱布尼茨、洛必达、约翰·伯努利和他的哥哥雅各布·伯努利

都求得了正确的解答.这些解答均发表在1697年5月号的《教师学报》上.约翰·伯努利的方法极为奇妙,他看出最速下降路径和光线在具有适当选择过的变折射率的介质中所取的路径是相同的.光在不同介质交界面处的折射定律(史奈尔定律)是已知的,所以他把介质分成有限个数的层,从一层到另一层折射率有明显的变化,然后让层数趋于无穷,考虑其极限情况.如此,约翰·伯努利得到结论:

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{常数},$$

其中v为速度.这情况如图5-21所示,可近似地看做是太阳光通过密度连续增加的大气层其速度逐渐变慢而照到地面的情况.

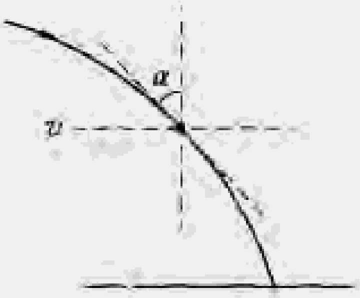


图5-21

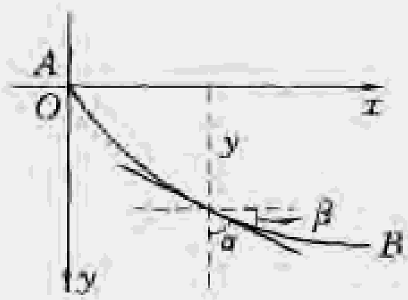


图5-22

现在再来看最速降线问题.取坐标如图5-22,并设想质点也像光线那样选择它从A滑到B的路径,使所需时间最短.从以上对光线的讨论知(现在是速度随y增大而逐渐变快),有

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{常数}. \quad ①$$

根据能量守恒原理,物体在$y=0$处由静止无阻尼地下落,它所获得的动能应等于所损失的势能,即$\frac{1}{2}mv^2=mgy$.质点在一定高度处的速度完全由它到达该高度处所损失的势能确定,而与所走路径无关,故有

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{②}$$

又由几何关系，我们有

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{③}$$

把①，②，③（分别来自光学、力学与微积分）结合起来，得到方程

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\cdot\sqrt{1+y'^2}} = \text{常数},$$

即

$$y(1+y'^2) = C,$$

这就是最速降线满足的微分方程，C 是某一常数.

解此方程，可得

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta), \end{cases}$$

这是旋轮线（摆线）的参数方程，它是由半径为 a 的圆周上一点当圆沿 x 轴滚动时产生的. 当 a 从 0 增到∞时，摆线的第一拱就逐渐增大，扫过整个第一象限，因此适当选取 a 值，就能使它通过 B（过 B 点的 a 值只有一个）.

关于最速降线问题也可作如下考虑. 因速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy},$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x.$$

沿任何光滑曲线 $f(x)$ 从 $A(x_1, y_1)$ 下落到 $B(x_2, y_2)$ 所需的时间为

$$t=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x.$$

因此，最速降线问题，就是问 $f(x)$是什么函数时 t 最小. 这是变分法中泛函极值问题. 最速降线问题是刺激变分法发展的重要问题之一.

参考文献 [34,pp.323～324],[28,pp.23～27].

（刘云章）

悬链线形状问题(Catenary-shaped problem) 一根柔软而不能伸长的弦自由悬挂于两固定点，求这弦在其自身重量作用下所形成的曲线.

早在 15 世纪，Leonardo(1452～1519)已经考虑过这个问题. 伽利略猜想这条曲线是抛物线. 惠更斯证实，这是不对的，并且主要用物理的推论证明：如果弦的重量以及加在弦上的总载荷按水平方向计算是均匀的，那么曲线是抛物线. 而对于实在的悬链线，则沿曲线方向的重量是均匀的. 1687 年，莱布尼茨把关于"定长悬挂曲线的确定"作为一个问题提出. 1690 年，雅各布·伯努利在《教师学报》上提出了类似的问题. 不久，莱布尼茨立即指出其深远意义，称问题中所求曲线为悬链线，并解决了该问题，其结果发表在 1691 年的《教师学报》上. 同期，约翰·伯努利、惠更斯也都各自发表了这个问题的解答. 雅各布·伯努利本人当时却没有解决此问题.

约翰·伯努利的解法就是现代微积分与力学中常采用的解法.

如图 5－23，设 y 轴通过链的最低点，令 s 表示自该点到可变点(x,y)之间的弧长，并令 $w(s)$为链的线密度. 根据从最低点到(x,y)间的一段链在三种力作用下处于平衡状态这一事实可导出曲线方程. 这三种力是：最低点处的水平方向张力 T_0；在(x,y)处

的可变张力 T，由于链身柔软，所以这张力是沿切线方向作用的；还有一个朝下的力等于两点间那段链身的重量. 使 T 的水平分量等于 T_0，并使 T 的垂直分量等于链重，得到

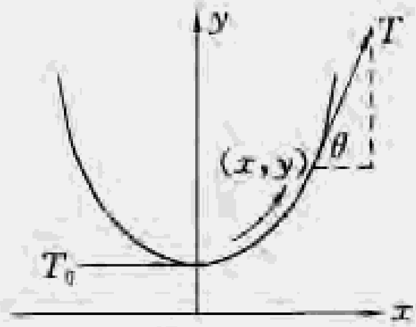


图 5-23

$$T\cos\theta = T_0 \text{及} T\sin\theta = \int_0^s w(s)\mathrm{d}s.$$

从第一式得

$$T\sin\theta = T_0 \operatorname{tg}\theta = T_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

故

$$T_0 y' = \int_0^s w(s)\mathrm{d}s.$$

对 x 微分以消去这里的积分号：

$$T_0 y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^s w(s)\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^s w(s)\mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$$
$$= w(s)\sqrt{1+(y')^2}.$$

这样

$$T_0 y'' = w(s)\sqrt{1+(y')^2}$$

便是所求曲线的微分方程. 解这微分方程得所求曲线为

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}).$$

1691 年与 1692 年间，雅各布和约翰解决了更普遍的问题，即悬挂着的变密度非弹性软绳、等厚度的弹性绳，以及在每一点上的作用力都指向一个固定中心的细绳的形状的问题. 1695 年关于悬链线的研究被应用到了悬置桥梁的建筑中.

悬链线也出现在其他一些有趣的问题上. 例如，若用一曲线弧

连接 x 轴上方两给定点，并将该弧绕 x 轴转成旋转曲面，则当此弧是悬链线的一部分时，所得旋转曲面的面积最小. 一根给定的绳子悬挂在两固定点，它能取的所有形状中，以悬链线的重心为最低.

参考文献 [34,pp.203～205],[28,pp.49～51],[18,p.14].

（刘云章）

牵曳问题(Tractior problem) 长度为 a 的柔软而不能伸长的细线一端系一物体 P，另一端 T 自原点出发沿 x 轴滑动到 $\pm\infty$，求点 P 的轨迹.

点 P 的轨迹称为曳物线，又称"跟踪曲线"或"犬线". 雅各布·伯努利曾考虑过跟踪问题，在他 1691 年的论文中给出了跟踪曲线的方程.

如图 5－24，设 $P(x,y)$ 是曳物线上的任意点，PN 是 x 轴的垂线，PT 是曳物线的切线，PT 与 x 轴正方向的夹角为 α，则因为 P 受细线牵曳，所以在物体运动的任何时刻，细线总与曳物线相切，所以 $PT=a$，$\angle PTN=\pi-\alpha$. 因而

$$y=a\sin(\pi-\alpha)=a\sin\alpha.$$

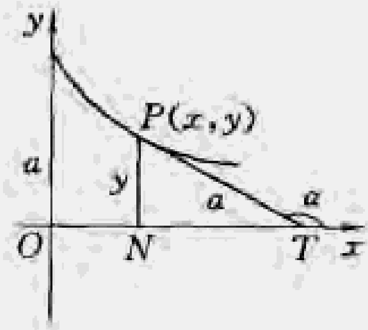


图 5－24

由此得到

$$\mathrm{d}y=a\cos\alpha\mathrm{d}\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a\cos\alpha\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}=a\cos\alpha\cot\alpha=\frac{a\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{a(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{a}{\sin\alpha}-a\sin\alpha.$$

积分，得到

$$x=\int\frac{a\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha}-\int a\sin\alpha\mathrm{d}\alpha=a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|+a\cos\alpha+C.$$

根据运动情况可知，曲线全部位于 x 轴上方，所以 $0<\alpha<\pi$，$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时 $x=0$，所以积分常数 $C=0$. 这样就得到曳物线的参数方程

$$x=a\ln\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+a\cos\alpha,$$

$$y=a\sin\alpha,$$

其中参数 α 是曳物线的切线与 x 轴正方向的夹角.

当细线牵曳着物体向 x 轴左方运动，可得到曳物线的另一半，上面的参数方程也适用于曳物线的左半支. 左半支参数范围是 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，右半支是 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时得到 y 轴上的点 $(0,a)$.

从曳物线的参数方程消去参数 α，就得到曳物线的直角坐标方程

$$x=\pm\left(a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}\right),$$

右边括号前的正号对应于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 的部分，即曳物线的左半支 $(x<0)$；负号对应于 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 的部分，即曳物线的右半支 $(x>0)$.

曳物线绕其渐近线 x 轴旋转所得的曲面称为“伪球面”，伪球面具有负的常数曲率，在它上面能实现罗氏非欧几何.

参考文献　[34, pp. 205～206], [7, pp. 136～138], [28, pp. 51～52].

（刘云章）

跟踪问题 见牵曳问题.

正交轨线问题(Orthogonal trajectory problem) 求与已知曲线族中每条曲线都垂直相交的曲线族.

莱布尼茨和约翰·伯努利在1694年引进了找等交曲线或曲线族的问题,即找一曲线或曲线族使得与一已知曲线族相交成给定的角度.约翰·伯努利称等交曲线为轨线,并且在惠更斯的光学工作基础上指出,因为光线与光的波前是正交的,所以等交轨线的问题在求光线通过非均匀介质时的路径是重要的.这个问题一直到1697年都没有公开,那时约翰把它作为向雅各布提出的一个挑战.雅各布只解决了一些特殊的实例.后来莱布尼茨找到一曲线族的正交轨线:考虑 $y^2=2bx$,其中 b 是曲线族参数(他引进的名词).从这个方程推出 $y\dfrac{dy}{dx}=b$.莱布尼茨再令 $b=-y\dfrac{dx}{dy}$,代入 $y^2=2bx$,就得到轨线的微分方程

$$y^2=-2xy\frac{dx}{dy},$$

它的解为

$$a^2-x^2=\frac{y^2}{2}.$$

虽然他只解出了一些特例,但他却料想到一般问题与解法.

正交轨线的问题一直处于沉寂状态,直到1715年,莱布尼茨向英国数学家,主要对准牛顿,提出挑战:找出求一已知曲线族的正交轨线的一般方法.牛顿解出了这个问题,他的解答发表在1716年的《哲学汇刊》上,牛顿还指明了如何求与一已知曲线族相交成定角的曲线,或相交的角是按照给定的规律随族中曲线变化的曲线.牛顿的方法与现代所用方法没有多大的区别.

关于这个问题的更进一步的工作是由尼古拉·伯努利在1716年完成的.雅各布的学生 Hermann(1678～1733)在1717年

的论文中给出了一般的求解规则.

设给定曲线族的方程为

$$F(x,y,C)=0. \quad ①$$

把这个方程对 x 求导数,得

$$F_x+F_y y'=0 \quad 或者 \quad y'=-\frac{F_x}{F_y}. \quad ②$$

由①解出 $C=C(x,y)$,用这个值 $C(x,y)$ 来代替②中的每一个 C,因为垂直相交的两条曲线在交点处的斜率彼此互为负倒数,可见①的正交轨线是方程

$$y'=\frac{F_y}{F_x}$$

的解曲线.

正交轨线在平面曲线几何学以及在应用数学的某些部门是有意义的.例如,在磁场影响下运动的带电粒子经过的曲线,同每一条磁力线总是垂直的;平面导体材料中电流的等势线是电流流线的正交轨线.

参考文献 [34,pp.206~208],[29,pp.65~66].

(刘云章)

开普勒方程求解问题(Problem of Kepler equation's solution) 怎样求方程

$$E=M+e\sin E \quad (0\leqslant e<1)$$

的解?

17世纪初期,开普勒研究天体运动,为了确定行星在椭圆轨道上的位置,首先接触到这个方程.式中 E 是行星的偏近点角,M 是平均近点角,e 是行星轨道离心率.拉普拉斯曾经研究过这方程.利用幂级数,可以求出 E 按照离心率的幂次的展开式,其各项系数依赖于 M:

$$E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}\sin^2 M + \cdots$$

$$+ \frac{e^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}M^{n-1}}\sin^n M + \cdots$$

拉普拉斯首先确定了：当 $e < 0.6627\cdots$ 时，级数收敛.

该方程可用迭代法求其近似解.

根据所给的 M 值，取

$$E_1 = M,$$
$$E_2 = M + e\sin E_1,$$
$$E_3 = M + e\sin E_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_{n+1} = M + e\sin E_n.$$

如此继续下去，直到 E_{n+1} 与 E_n 之差小于所要求的精度为止，则 E_{n+1} 为方程的解. 下面证明这样的迭代过程是收敛的.

设 E 为真解，则 $E = M + e\sin E$. 先证明数列

$$E_1 - E, E_2 - E, \cdots, E_n - E, \cdots$$

为绝对收敛，而且极限为 0.

根据 $E_{n+1} = M + e\sin E_n$，可得

$$\frac{E_{n+1} - E}{E_n - E} = \frac{M - E + e\sin E_n}{E_n - E} = \frac{e(\sin E_n - \sin E)}{E_n - E}$$

$$= e\cos\frac{E_n + E}{2}\,\frac{\sin\dfrac{E_n - E}{2}}{\dfrac{E_n - E}{2}}.$$

则得

$$\left|\frac{E_{n+1} - E}{E_n - E}\right| \leqslant e < 1, \qquad ①$$

由此可知

$$|E_{n+1}-E|\leqslant e^n|E_1-E|,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|E_{n+1}-E|=0.$$

而 E 为确定的值，故得

$$\lim_{n\to\infty}E_{n+1}=E.$$

这就证明了 E_n 必然收敛到真解 E. 但由①可看出，e 的数值很小时，收敛是很快的；若 $e\approx 1$ 时，收敛很慢. 例如 $e=0.9$，则要求精度提高一位有效数字，迭代次数要增加 22 次. 当然，如果使用高速电子计算机，困难也不大.

开普勒方程在理论天文学上占有很重要的地位.

参考文献 [21, p. 458], [6, pp. 94～95].

（刘云章）

怎样描述脉冲现象（How to describe impulse phenomenon） 在物理学和工程技术中，考察具有脉冲性质的现象时，往往会碰到一种“奇怪的函数”，关于这种函数我们写不出它的显式表达式，仅仅知道除了数轴上的个别点以外，它恒等于零，在那些“个别点”上的函数值为“无限大”，而它在整个数轴上的积分有实际意义，其值不为零. 这种情况，往往在考察一些集中分布的量时出现. 以集中分布的质量为例. 设在直线上，有一单位质量集中在原点附近，如果其集中程度很大，即其集中分布的范围与我们在同一问题中所遇到的其他长度来比较，小得可以忽略时，我们就说质量集中在原点. 在连续质量分布下质量分布与密度分布是相对应的，那么相应于集中质量分布的密度分布是什么呢？若质量集中在原点，则当 $x\neq 0$ 时，$\rho(x)=0$；而当 $x=0$ 时，$\dfrac{\Delta M}{\Delta l}$ 趋于无限大（Δl 为包含原

点的小区间长）．于是用“每点对应一个函数值”的古典的函数概念就无法表达与集中量相对应的密度分布．由于这种集中分布的量常常会碰到，这就需要发展相应的数学工具来描述它．

20 世纪初，物理学家们先于数学家使用了一种奇异函数，其中最简单的是诺贝尔奖金获得者、物理学家狄拉克提出的 δ 函数．按照他的说法，这函数“除去一点 x_0 以外到处为零，而这点等于无限大，并且积分值为 1”．用式子来表示，δ 函数就是指具有以下性质的函数（以 $x_0 = 0$ 为例）：

(i) $\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ \infty & (x = 0); \end{cases}$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1.$

显然，从函数和积分的古典定义来看，这是惊人的矛盾．因为我们知道，只改变函数在一点的值不应该影响函数的积分值．然而，δ 函数在整个数轴上，除一点外处处等于零，而它的积分值为 1，却不是零．因此，当狄拉克为了写出量子力学的基本公式而导入 δ 函数时，很多数学家拒不承认它，并予以非难．但是从物理上来看，提出 δ 函数的概念是十分自然的．例如，设 x 轴表示一根弦，其密度函数用 $\rho(x)$ 表示，则计算此弦的总质量 M 的公式应该是

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) \mathrm{d}x.$$

现在假定只有一个单位质量（$M = 1$）集中于坐标原点 $x = 0$，如果我们仍用 $\rho(x)$ 表示 x 轴各点的密度，那么，可以想象

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ \infty & (x = 0). \end{cases}$$

此外，由于整个 x 轴的质量 $M = 1$，所以根据上述计算，总质量 M 的公式就应该有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\mathrm{d}x=1.$$

可见，这里的 $\rho(x)$ 就是 $\delta(x)$，$\delta(x)$ 相当于集中量的密度函数.

δ 函数真实地反映了物理上各种集中量，如点质量、点电荷、点热源等，并被物理学家有效地使用着. 这就促使数学家们对 δ 函数进行研究和解释.

δ 函数有如下一个重要的性质：

对任何连续函数 $\varphi(x)$，都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0).\qquad①$$

事实上，对于任何 $\varepsilon>0$，都有

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

因此，利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x\\&=\varphi(\xi)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)\mathrm{d}x\\&=\varphi(\xi),\ \xi\in(-\varepsilon,\varepsilon),\end{aligned}$$

在上式中令 $\varepsilon\to0$，从而 $\xi\to0$，$\varphi(\xi)\to\varphi(0)$，于是得到①式.

这个性质表明，虽然 δ 函数不符合古典函数的定义，但它和连续函数的乘积在整个实轴上的积分却有确定的意义. 这与历史上引入虚数时所发生的现象类似，用实数的观点来理解“新数”——虚数是想不通的，但是它在解方程的运算过程中却有确定的意义. 也正因为这点，才使 δ 函数在近代物理、工程技术中有着比较广泛的应用. δ 函数的傅氏变换在求解数理方程中有着特殊的作用. 因此，人们也用①式来定义 δ 函数. 这就是说，如果某函数乘以任何

一个连续函数 $\varphi(x)$ 后再沿 $(-\infty,+\infty)$ 积分，其积分值为 $\varphi(0)$，那么此函数叫做 δ 函数. 可以证明这个定义同前面定义的 δ 函数是等价的.

随着有关 δ 函数的严格数学理论的确立，函数概念发生了飞跃，广义函数概念进入了数学. 广义函数包括"奇异函数"，又包括通常的函数. 引入广义函数后，每个通常的函数都有任意阶导数(广义的)，这正是物理学家们所欢迎的.

参考文献 [4,pp. 160～163],[5,pp. 266～268].

(刘云章)

九 希尔伯特数学问题

希尔伯特数学问题(Hilbert's mathematical problems) 1900年，德国数学家D. 希尔伯特在巴黎第二届国际数学家大会上发表了题为《数学问题》(Mathematische Probleme)的演说，演说的主要部分是23个数学问题，即今所称之希尔伯特数学问题. 这23个问题是希尔伯特根据19世纪数学研究的成果与发展趋势而提出，涉及现代数学许多重要的领域，一个世纪来始终激发着数学家们持久不衰的研究兴趣.

第一问题 证明连续统假设——在自然数集基数 $\aleph_0$ 与实数集基数 $C=2^{\aleph_0}$ 之间没有任何中间基数. 1963年，美国数学家P. 柯恩在下述意义下给出了该问题之否定解答，即：连续统假设的真伪不可能在策墨罗—弗朗克尔(Zermelo - Fraenkel)公理系统内判明.

第二问题 算术公理的相容性. 1931年，奥地利数学家K. 哥德尔的"不完备性定理"指出了用希尔伯特计划(即"证明论"或"元数学")证明算术公理系统相容性之不可能. 数学相容性问题至今尚未解决.

第三问题 两等底等高的四面体体积之相等. 1900 年希尔伯特的学生 M. Dehn 给出了此问题的否定解答. 第三问题是最早获解的希尔伯特问题.

第四问题 直线作为两点间的最短距离. 希尔伯特之后数学家们已建立起多种特殊的度量几何,但这样的几何数量之多,为希尔伯特始料未及,因而该问题提得过于一般.

第五问题 不要定义群的可微性假设的李群概念. 更确切地说,希尔伯特第五问题是问: 是否每个局部欧几里得群皆为李群? 经过漫长的努力,此问题已于 1952 年由美国数学家 A. M. Gleason、D. Montgomery、L. Zippin 等人最后解决,答案是肯定的.

第六问题 物理公理的数学处理. 希尔伯特在本问题中所要求的公理化概率论已由 A. H. 柯尔莫哥洛夫(1933)等人建立. 公理化方法在相对论、量子力学、热力学等物理学部门也获很大成功,但一般公理化物理学的意义则尚待探讨.

第七问题 某些数的无理性与超越性. 1934 年苏联数学家 A. O. Гельфанд 和德国数学家 T. Schneider 各自独立证明了: 对于任意代数数 $\alpha \neq 0,1$ 和任意代数无理数 $\beta \neq 0$, α^{β} 为超越数.

第八问题 素数问题. 该问题包括了哥德巴赫猜想、黎曼猜想和孪生素数猜想等著名数论难题. 黎曼猜想至今仍是猜想. 至于哥德巴赫猜想和孪生素数问题,目前最佳结果均属陈景润,但均未获最终解决.

第九问题 任意数域中最一般的互反律之证明. 该问题已为日本数学家高木贞治(1921)和奥地利数学家 E. Artin(1927)解决.

第十问题 丢番图方程可解性的判别. 1930 年苏联数学家 Ю. В. Матясевич 给出了该问题的否定解决,即证明了希尔伯特所预期的一般判别算法不存在.

第十一问题 系数为任意代数数的二次型. 德国数学家 H. Hasse(1929)和 C. L. Siegel(1936,1951)在这问题上获得了重要结果.

第十二问题 阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域. 该问题尚未解决.

第十三问题 不可能用只有两个变数的函数解一般七次方程. 连续函数情形已被苏联数学家 В. И. Арнольд(1957)否定解决. 如要求函数解析,则问题尚未解决.

第十四问题 证明某类完全函数系的有限性. 1958 年日本数学家永田雅宜给出了问题的否定解答,即证明了存在群 Γ,其不变式构成的环不具有有限个整基.

第十五问题 舒伯特演算的严格基础. 舒伯特计数演算的合理性仍待解决,但该问题促进了代数几何的发展,代数几何基础已分别由荷兰数学家 B. L. 范 · 德 · 瓦尔登(1938~1940)与法国数学家 A. Weil(1950)建立起来.

第十六问题 代数曲线与曲面的拓扑. 该问题的后半部分讨论微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$ 的极限环个数与位置. 苏联数学家 И. Г. Петровский 曾证明 X、Y 为 x,y 的二次有理整函数时极限环个数不超过 3. 1979 年中国数学家举出反例证明彼得洛夫斯基的结论是错误的.

第十七问题 正定形式的平方表示. 1926 年由 E. Artin 解决.

第十八问题 由全等多面体构造空间. 部分解决.

第十九问题 正则变分问题的解是否一定解析. 这问题在下述意义上已获解决: 俄国数学家 С. Бернштейн(1904)证明了一个两变元的解析非线性椭圆方程,其解必定解析. 该结果后又被推广到多变元及椭圆组情形.

第二十问题 一般边值问题.该问题引起了偏微分方程边值问题的蓬勃发展.

第二十一问题 具有给定单值群的线性微分方程存在性的证明.1989年苏联数学家A.A.鲍里布鲁克给出了此问题的否定解决.

第二十二问题 解析关系的单值化.德国数学家P.Koebe(1907)解决了用自守函数使两个变量间的任意解析关系单值化的问题.三个以上变数的情形尚未解决.

第二十三问题 变分法的进一步发展.希尔伯特在此未提出确定的特殊的问题,而是对变分法的重要性及进一步发展发表了一般性看法.

虽然20世纪数学的发展远远超出了希尔伯特上述23个问题所预见的范围,但当代数学通过解决这些问题而获得的巨大进步,已充分说明了希尔伯特数学问题的历史意义和深远影响.

(李文林)

希尔伯特第一问题 该问题的主要部分是要证明所谓"连续统假设".

1874年,集合论创始人康托尔猜测,在自然数集基数($\aleph_0$)与实数集基数($C=2^{\aleph_0}$)之间没有任何中间基数,这就是连续统假设.它后来被推广为更一般的形式即广义连续统假设:对于任何无穷基数$\aleph$,$2^{\aleph}$是大于$\aleph$的最小基数.

1940年,哥德尔证明了广义连续统假设和另一条集合论公理——选择公理与集合论策墨罗—Fraenkel公理系统(简称ZF公理系统)的无矛盾性.1963年,柯恩又证明了广义连续统假设和选择公理相对于ZF公理系统的独立性,从而在一定意义上给出了希尔伯特第一问题的否定解答.这一结果使集合论面临跟几何学中证明了平行公理独立于欧几里得几何其他公理后相类似的形势.柯恩证明中采用了一种称之为"力迫法"(Forcing method)的

新方法(一种构造公理系统模型的方法),已在集合论中获得广泛应用.

但许多学者指出:我们今天所使用的公理系统是不完全的.因此,从现有集合论公理对连续统假设给出的不可判定性证明,还不能说是问题的最终解决.建立、研究新的集合论公理系统并确定连续统假设在其中的地位,仍是公理化集合论研究的艰巨任务.

除了连续统假设,希尔伯特第一问题还涉及实数集的"良序性"问题,即实数集是否可被构造为良序集?这问题也是康托尔最先提出.设想数字系统的某个确定的有序排列,并从这些数中选出一个部分系统(子集),那么可以证明这个子集也是有序的.所谓良序集是指这样一种特殊类型的有序集:不仅集合本身,而且其每个子集都有一个首数.所有实数的系统按其自然顺序显然不是良序集.康托尔提出的问题是:实数全体是否可按其他方式排列,使得每个子集都有一个首元素?他猜想答案是肯定的.希尔伯特在第一问题的后半部分希望对康托尔的猜测作出直接的证明.1904年,策墨罗证明了一切集合都可良序化.但策墨罗的证明用到一条集合论公理——选择公理,而选择公理的真伪如前所述到1963年才由柯恩给出判断,并且也是在ZF公理系统范围之内.

(李文林)

希尔伯特第二问题 该问题讨论算术公理的无矛盾性.

一个公理系统的无矛盾性,是指其中不可能发生这样的情况,即在证明了一个命题(S)的同时,发现其否命题(~S)亦成立.贝尔特拉米(1868)和克莱因(1873)等曾通过他们给出的非欧几何模型将非欧几何的无矛盾性归约为欧几里得几何的无矛盾性.希尔伯特在《几何基础》(1899)中则将欧氏几何的无矛盾性归约为实数算术的无矛盾性,这样算术的无矛盾性几乎成为整个数学大厦的基础.希尔伯特最先明确将算术公理的无矛盾性作为问题提出,这就是希尔伯特第二问题.希尔伯特关于证明算术公理无矛盾性的

一套设想，后发展为系统的"希尔伯特计划"(即证明论)，其要点是：首先将所讨论的古典数学理论(T)表成由一些形式符号和形式符号公式组成的公理化系统(T_F)；同时采用(并只用)有穷方法建立一个逻辑系统和初等数论(T_m)，希尔伯特称之为"元数学"(metamathematics)，然后用这种元数学去证明形式理论 T_F 的无矛盾性，进而得到 T_F 所表示的古典数学理论 T 的无矛盾性. 希尔伯特计划最重要的特征显然是彻底的形式化和方法的有穷性. 然而 1931 年哥德尔的"不完备性定理"证明希尔伯特计划是行不通的：任一足以包含实数算术的形式系统，必定存在一个不可判定的命题 S(即在此系统内有 S 和～S 皆成立). 此后有些学者企图通过放宽希尔伯特元数学的限制来证明算术的无矛盾性，如 1936 年 G. Gentzen 在允许使用超限归纳法的前提下证明了算术公理的无矛盾性，但整个问题并未解决.

希尔伯特第二问题大大推动了数学基础的研究. 尤其值得指出的是：哥德尔不完备性定理的证明引导英国数学家 A. Turing 提出 Turing 机的概念，对现代计算机理论有意想不到的应用.

(李文林)

希尔伯特第三问题 两等底等高四面体体积之相等.

在平面情形，通过图形的剖分、拼补，即可建立多边形面积理论. 能否类似地建立空间体积理论？关键在于体积度量相等的多面体是否一定剖分相等(即可剖分成成对的全合四面体)，或至少拼补相等(即可通过拼补上一些全合四面体而变成剖分相等). 希尔伯特猜测这是不可能做到的. 希尔伯特第三问题就是要具体寻找两个等高等底(度量相等)但却不剖分相等甚至也不拼补相等的四面体. 第三问题在提出的当年(1900)就被希尔伯特的学生 M. Dehn 解决. M. Dehn 证明了确实存在这样的四面体，并指出两个多面体要剖分相等，必须满足一定条件，通称"Dehn 条件"(1965 年瑞士数学家 Sydler 证明 Dehn 条件亦是充分的).

第三问题是最早获解的希尔伯特问题，为正确建立体积理论奠定了基础. 希尔伯特据此指出：处理空间体积问题，除了剖分、拼补，“还必须求助于别种方法，如卡瓦列里原理”.

拼补相等，相当于中国古代数学中的出入相补. 刘徽曾成功地运用出入相补原理证明了《九章算术》中许多面积公式. 在涉及到体积问题时，刘徽实际上已接触到了不能拼补相等的立体图形的例子，并创用了特殊形式的不可分量原理(后发展为一般的“祖暅公理”，即卡瓦列里原理)，作为计算体积公式的重要手段. 这正是上述希尔伯特所指途径.

(李文林)

希尔伯特第五问题 该问题讨论连续群的解析性.

1870 年，挪威数学家索福斯·李提出了现代数学中极为重要的连续变换群(后称李群)概念，作为研究微分方程的新武器. 李将有限连续变换群定义为一变换系统：

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; a_1, a_2, \cdots, a_r), (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(其中 $a_1, \cdots, a_r$ 为参数). 它们具有如下性质，即从中任选两个变换

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots x_n; a_1, \cdots, a_r)$$

和

$$x_i'' = f_i(x_1', \cdots x_n'; b_1, \cdots, b_r)$$

它们相继作用产生的变换也属于原来的系统，因而可表成形式

$$\begin{aligned} x_i'' &= f_i\{f_1(x, a); \cdots, f_n(x; a); b_1, b_2, \cdots, b_r\} \\ &= f_i(x_1, \cdots x_n; c_1, \cdots, c_r), \end{aligned}$$

这里 $c_1, \cdots, c_r$ 是 $a_1, \cdots, a_r$ 和 $b_1, \cdots, b_r$ 的某些函数. 这样李群的性质便由一组函数方程所确定，它本身并未对函数 $f_1, \cdots, f_n; c_1, \cdots, c_r$ 提出附加的限制. 但李的定义却要求定义群的这组函数满足适当的可微性. 这一要求是否确实必不可少?如果不要函数可微性假设，李的连续变换解理论能走多远?这就是希尔伯特第五问题的主

要内容. 这问题一个更明确的提法是：是否每个局部欧几里得群都是李群？

希尔伯特第五问题的解决经历了一段漫长的历史. 1933 年，冯·诺依曼对紧致群证明了希尔伯特第五问题；1939 年 Л. С. Понтрягин 解决了阿贝尔群情形；1941 年 C. Chevalley 解决了可解群情形. 1952 年，A. M. Gleason、D. Montgomery 和 L. Zippin 等终于共同解决了一般情形，即证明了每个局部欧几里得群皆为李群. 他们的证明极为繁复，因而寻求更简单的证明仍然是对数学家们的挑战.

（李文林）

希尔伯特第七问题　该问题讨论某些数的无理性与超越性.

1873 年，埃尔米特证明了数 e 是超越数（如果一实数是某个系数不全为零的整系数多项式的根，则称它为代数数. 不是代数数的实数就叫做超越数）；林德曼 1882 年证明了 π 的超越性，从而使古希腊三大数学难题之一化圆为方获否定解决. 希尔伯特第七问题则提出研究某些在分析中很重要的超越函数的取值问题：他认为有一种超越函数（例为指数函数 $e^{i\pi z}$），它们对一切有理变数 z 取代数值，另一方面却很可能对变数 z 的无理代数值恒取超越值.

一般文献中所说希尔伯特第七问题，通常是指其中的下述命题：对于代数底数 α 和无理代数指数 β，表达式 α^{β}，例如 $2^{\sqrt{2}}$ 或 $e^{\pi}=i^{-2i}$，表示一超越数或至少是一无理数.

希尔伯特预测该问题的解决远较后面的第八问题困难，但结果相反. 1934 年，A. O. Гельфанд 和 T. Schneider 各自独立地对希尔伯特上述命题给出了肯定回答，他们证明了：若 $\alpha(\neq 0,1)$ 为代数数，β 为无理代数数，则 α^{β} 是超越数. 他们的结果后称 Гельфанд-Schneider 定理，1966 年又被 A. Baker 推广为更一般的情形. 从 A. Baker 的理论可得到：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是不为 0 和 1 的代数数，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是代数数，且 $1,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 在有理数域 Q 上线性无

关，则 $\alpha_1^{\beta_1},\alpha_2^{\beta_2},\cdots,\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数. A. Baker1970 年获菲尔兹奖.

（李文林）

希尔伯特第八问题 该问题讨论素数. 包括了黎曼猜想、哥德巴赫猜想及孪生素数等著名数论难题.

黎曼猜想是黎曼于 1859 年提出的：ζ-函数

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

的零点，除了负偶整数（$-2,-4,\cdots$）外，全部落在直线 $\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$ 上. 1974 年 N. Levinson 证明了至少有三分之一的零点落在该直线上. 1982 年 R. P. Brent 等证明了 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leqslant\delta\leqslant1,0\leqslant t\leqslant 81702130.19$ 中的零点全部位于 $\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$ 上，共有 2 000 000 001 个，且都是一级零点. 尽管已有大量的工作，但黎曼猜想至今既未得到证明，亦未被否证. 由于其难度大大超出人们的意料，黎曼猜想长期以来被认为是对人类智力的挑战. 从黎曼猜想可以推出一系列数论与函数论的结果，其研究对整个数学影响深远.

包括在希尔伯特第八问题中的哥德巴赫猜想，是指偶数哥德巴赫猜想：任意大于 6 的偶数均可表成两个奇素数之和. 1742 年首先在哥德巴赫与欧拉的通信中提出，历二百余年悬而未解. 中国数学家在哥德巴赫猜想研究方面做出了卓越贡献. 1966 年，陈景润利用“大筛法”和他自己创造的 Ω 集合估计证明了：每个大偶数可表为一个素数与一个不超过两个素因数的乘积之和（命题{1，2}）. 陈景润上述结果被誉为“陈氏定理”，至今仍是哥德巴赫猜想研究领域中世界领先的结果.

至于孪生素数猜想，目前最佳结果亦属于陈景润. 所谓孪生素数，是指一对相邻素数 p 与 q，且 $q=p+2$. 孪生素数猜想是说：存在着无穷多对孪生素数. 陈景润证明了有无穷多个素数 p，使 $p+$

2 可表为一个不超过两个素因数的乘积.

（李文林）

希尔伯特第九问题　该问题讨论任意数域中最一般的互反律之证明.

古典互反律最早由欧拉猜测到(1743)，它描述了一对素数和以它们为模的二次剩余之间所存在的关系. 按勒让德的陈述，古典二次互反律的形式是：

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right),$$

其中 q、p 为奇素数，$\left(\frac{q}{p}\right)$为勒让德符号：

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1,\text{若 } x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ p)\text{ 可解}\\0,\text{若 } a \text{ 被 } p \text{ 整除}\\-1,\text{若 } x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ p)\text{ 不可解.}\end{cases}$$

高斯在 1801 年出版的《算术研究》中首次严格证明了二次互反律. 希尔伯特第九问题是要把古典互反律推广到任意代数数域. 希尔伯特提出"类域论"(研究数域上阿贝尔扩张的理论)作为研究一般互反律的基础. 完整的"类域论"1920 年由希尔伯特的学生高木贞治建立，在此基础上，E. Artin 于 1927 年终于证明了一般互反律(现称 Artin 互反律)，第九问题遂告解决.

（李文林）

希尔伯特第十问题　该问题讨论丢番图方程的可解性.

古希腊数学家丢番图最先研究整系数不定方程的整数解，这类方程因之被称为丢番图方程. 著名的费马大定理(见**费马大定理**)即属丢番图方程问题. 一般形式的丢番图方程 $P(a_1,\cdots,a_n;x_1,\cdots,x_m)=0$，$P$ 为变量 $x_1,\cdots,x_m$ 的多项式，$a_1,\cdots,a_n$ 是多项式的系数且只取整数值. 希尔伯特第十问题是要寻求判定任一给定

的丢番图方程有无整数解的一般方法.

希尔伯特第十问题属于数理逻辑中的所谓"判定问题",关系到算法理论、能行性理论以及以二者为基础的递归论的发展. 正是等待数理逻辑相关理论的成果,希尔伯特第十问题本身的研究直到 20 世纪 50 年代才开始有重要进展. 1952 年,J. B. Robinson 在所谓"Robinson 假设"下证明了幂函数的丢番图性;1961 年,M. Davis、H. Putnam、J. B. Robinson 等又取得新的突破,证明了任何递归可枚举集都是指数丢番图集. 1970 年,Ю. В. Матиясевич 终于在上述诸学者工作的基础上解决了希尔伯特第十问题,他证明了希尔伯特所期望的一般算法是不存在的. 这是一项否定的解决,却产生了一系列肯定的结果,其中有的在定理机械化证明方面可能有用. 近年来丢番图分析已成为十分活跃的领域. 许多数学问题(包括一些著名的未决问题如哥德巴赫猜想、黎曼猜想等)都可以转化为特定的丢番图方程有无整数解的问题.

(李文林)

希尔伯特第十三问题 该问题讨论不可能用仅有两个变量的函数解一般的七次方程.

该问题涉及用所谓"诺模图"来进行代数方程的数值求解. 诺模图也叫算图,是一种计算图表. 设 $F(u_1,u_2,\cdots,u_n)=0$ 为实变量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 之间存在的函数关系,若从给定的 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$ 的值,在一图表上总可找到满足关系 $F(u_1,u_2,\cdots,u_n)=0$ 的 u_n 的值,就称此图表为诺模图. 一个 n 次代数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 显然可以看成 $n+1$ 个变元 $(a_1,a_2,\cdots,a_n;x)$ 的函数关系 $P(a_1,\cdots,a_n,x)=0$,因而有可能利用诺模图从系数 $a_1,\cdots,a_n$ 的值确定根 x 的值. 事实上,如果方程的系数仅依赖于两个参量(即系数是任意仅有两个独立变量的函数),则必定能用诺模图求解. 二次方程 $x^2+px+q=0$ 是最简单的例子. 如果系数依赖于三个或更多个变量,方程的根就不一定能用诺模图来构造. 但有一

大类方程，虽然它们的系数是有三个或更多变量的函数，但却可以通过有限步骤变换而化成系数仅依赖于两个变量的情形. 可以证明，三次、四次、五次和六次方程都属这一类型，因而都可用诺模图求解. 希尔伯特猜测一般的七次方程的系数不能经由有限个仅含两变元的函数得到. 第十三问题就是要对这一事实给出严格证明. 希尔伯特指出，为此只需证明七次方程 $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ 不能借助于仅含两个变元的任意连续函数用诺模图求解. 这一问题已在 1957 年由 В. И. Арнольд 解决. 但若要求的是解析函数，则问题仍未解决.

（李文林）

希尔伯特第十五问题 该问题讨论 H. Schubert 计数演算的严格基础.

古典计数几何的主要问题是确定满足一定条件的几何图形个数(最简单的例子如：求三维空间中与 4 条已知直线相交的直线数). 德国数学家 H. Schubert(1848～1911)在计数几何方面有重要贡献. H. Schubert 的著作普遍依赖于庞斯莱首先使用的所谓"数的守恒原理"和他本人建立的一套计数演算(即 Schubert 演算). 数的守恒原理断言几何数在图形位置(或条件参数)连续变动下的不变性；而 Schubert 演算则是用代数符号表述几何条件及其相互关系的符号演算. 二者显示了很大的实用价值，但都缺乏严格的数学基础，因而遭到一些数学家的强烈批判. 希尔伯特第十五问题就是要建立 Schubert 演算的严格基础，从而严格确定 Schubert 所获得的许多几何数的准确性及有效范围.

1930 年，范・德・瓦尔登首先将上同调类计算等代数拓扑工具引入计数几何研究，把计数几何置于一般相交理论的更为广阔的背景中去探讨. 一般相交理论在范・德・瓦尔登本人和 A. Weil 等一系列著名数学家的努力下获得了充分发展，同时有力地推动了作为现代数学核心领域之一的代数几何学基础的建立. 但

Schubert 演算的合理性仍未完全解决. 一个有挑战性的有趣例子是：对 Schubert《计数几何演算》(1879)一书中通过上百页计算而得出的两个几何数 666 841 088(与 9 个已知二次曲面相切的二次曲面个数)和 5 819 539 783 680(与 12 个已知二次曲面相切的三次挠线条数)的准确性，数学家们至今尚不能作出判断.

(李文林)

希尔伯特第十六问题 该问题讨论代数曲线与曲面的拓扑.

在希尔伯特之前，已有人确定了 n 阶平面代数曲线所具有的闭孤立分枝的最大个数. 希尔伯特在第十六问题中提出进一步研究它们的相对位置，以及相应地研究空间代数曲面的叶的最大个数、分类和相对位置. 这方面陆续取得了不少重要结果. 一般文献中所说希尔伯特第十六问题，通常是指希尔伯特在该问题的后半部分提出的如下问题：

讨论常微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}$ 的极限环的最大个数和相对位置，其中 P_n, Q_n 是 x, y 的次数不高于 n 的实系数多项式.

对一般 n 次系统，问题相当困难. 对二次系统的研究则有较大进展，特别是中国数学家在这方面取得了重要成果，并将可能出现极限环的二次系统分为三类：

(Ⅰ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{P_2(x,y)}$；

(Ⅱ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(1+ax)}{P_2(x,y)}\ (a\neq 0)$；

(Ⅲ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(1+ax+by)}{P_2(x,y)}\ (b\neq 0)$. 这里 $P_2(x,y)=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2$.

其中第(Ⅰ)类方程的极限环个数与全局结构问题已彻底解决. 另一项值得一提的结果是：И. Т. Петровский 曾断言二次系统极限环的个数不超过 3. 1979 年中国数学家指出这一结论是错误的，并

具体构造出了相当广泛的一类二次系统，它们至少有 4 个极限环.

（李文林）

希尔伯特第十八问题 该问题讨论由全等多面体构造空间.

该问题处理几何中非常有趣的铺砌问题. 铺砌，粗略地说就是用一些基本几何图形既无重复又无空隙地铺满整个空间. 例如我们显然可用正方形去铺满全平面. 容易看出，对同一种基本图形，可能有若干（甚至无限）种不同的铺砌方式.

铺砌问题的抽象表述，涉及所谓带基本区域的运动群. 每一个运动群的基本区域和由群产生的全等区域一起，就构成一个充满全空间的铺砌. 这里，基本区域相当于上述的基本图形，而不同的运动群则相当于本质上不同的铺砌方式.

希尔伯特在第十八问题中提出了三个关于铺砌的基本问题：

(1) 在 n 维欧几里得空间中是仅有有限个本质上不同类的带有基本区域的运动群吗？通俗地说，即问 n 维欧氏空间中究竟有多少种本质不同的基本图形以及有多少种本质不同的铺砌方式？1910 年，德国数学家 L. Biebeibach 给出了希尔伯特问题这一部分的肯定回答，即证明了 n 维欧氏空间中带基本区域的运动群的有限性，并对后来以他的名字命名的运动群（Biebeibach 群）进行了分类.

(2) 是否有这样的多面体，它们不是运动群的基本区域，但经适当毗连仍可充满全空间？1928 年，K. Reinhardt 给出了三维空间中的反例. 1935 年，H. Heesch 给出了更简单的二维反例，使人们看到了确实存在一些多面体，可以用它们去铺砌全空间，但却不是通过欧几里得运动（平移、旋转、反射等）的方式.

(3) 怎样能够把无限个相等的给定型式的立体（为球体、正四面体等）在空间中给以最紧密的排列（即使空间被充满的部分与未充满部分之比尽可能地大）？C. A. Rogers、H. F. Blichfeldt、

J. Leech、J. Milnor、N. J. A. Sloane 等对此作了重要工作，但问题显然无所谓彻底解决.

铺砌问题在科学(如结晶学)、艺术和许多部门有广泛的应用.

(李文林)

希尔伯特第十九问题 正则变分问题的解必定是解析的吗?

存在着一类偏微分方程(例如著名的位势方程等)，它们除解析解外没有其他解.已知的这类偏微分方程大多有一个共同的性质，即它们都是下述变分问题的拉格朗日微分方程:

$$\iint F(p,q,z;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\min.$$

其中 $p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}$，$F$ 本身是一解析函数且满足不等式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}\right)^2>0.$$

这类问题被称为“正则变分问题”，在几何学、力学和数学物理中起着重要作用.很自然会发生这样的问题：正则变分问题所有的解是否一定是解析函数? 也就是说是否每个正则变分问题的拉格朗日偏微分方程都只有解析解? 这就是希尔伯特第十九问题.

1904 年，苏联数学家 С. Бернштейн 证明了一个两变元的、解析的非线性椭圆方程其解必定解析. С. Бернштейн 的工作后又被 H. Lewy、E. Hopf、И. Петровский 和他本人推广到了多变元椭圆组情形.正则性问题与存在性问题一起，是变分学理论的两大中心问题，其研究对本世纪变分学与偏微分方程论的发展起了很大的推动作用.

(李文林)

希尔伯特第二十二问题 该问题讨论通过自守函数使解析关系单值化.

单值化是解析函数论的基本课题之一.设有两个复变量间的

解析关系 $F(w,z)=0$，它一般地定义了 w 为 z 的多值函数. 如果存在 $F=0$ 的参量形式：$z=\phi(t), w=\varphi(t)$，且 ϕ，φ 均为 t 的单值函数，则称参量方程 $z=\phi(t), w=\varphi(t)$ 把解析关系 $F=0$ 单值化. 庞加莱首先证明了总可以用一个变量的自守函数（指在变换群 $z'=\dfrac{az+b}{cz+d}, ad-bc=1$，或它的某些子群作用下保持不变的函数）使两个变量之间的任一代数关系单值化. 庞加莱试图将这一定理推广到两个变量间任意解析的而非代数的关系，但他给出的证明是不完善的. 希尔伯特第二十二问题就是要对一般的解析关系严格证明单值化定理，并将其推广到三个或更多个复变量情形. 1907 年，庞加莱和 P. Koebe 各自独立地严格证明了一般单值化定理：可以用自守函数使两个变量之间的解析关系单值化. 但对三个以上变数的情形则问题尚未解决.

（李文林）

参考文献

1 徐利治著. 微积分大意. 北京：科学文献出版社，1989

2 陆魏彦. 推广欧拉常数. 南宁：广西人民出版社，1985

3 郑维行，王声望. 实变函数与泛函分析概要（第一册）. 北京：人民教育出版社，1980

4 南京大学数学系计算数学教研室. 偏微分方程. 北京：科学出版社，1986

5 陈恕行编. 偏微分方程概论. 北京：人民教育出版社，1981

6 赵进义编著. 天体力学. 上海：上海科学技术出版社，1983

7 蒋声. 形形式式的曲线. 上海：上海教育出版社，1985

8 张奠宙，顾鹤荣著. 不动点定理. 沈阳：辽宁教育出版社，1989

9 江泽涵. 多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类. 北京：人民教育出版社，1964

10 徐利治著. 数学方法论选讲. 武汉：华中工学院出版社，1988

11 中国大百科全书出版社编辑部编. 中国大百科全书(数学). 北京：中国大百科全书出版社，1988
12 谷超豪主编. 数学辞典. 上海：上海辞书出版社，1992
13 梁宗巨主编. 数学家传略辞典. 济南：山东教育出版社，1989
14 邓宗琦主编. 数学家辞典. 武汉：湖北教育出版社，1990
15 梁宗巨. 世界数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1980
16 袁小明著. 数学思想史导论. 南宁：广西教育出版社，1991
17 吴文俊主编. 世界著名科学家传记. 数学家(Ⅰ). 北京：科学出版社，1990
18 吴文俊主编. 世界著名科学家传记. 数学家(Ⅱ). 北京：科学出版社，1992
19 [苏] Г. М. 菲赫金哥尔茨著. 微积分学教程(一卷一分册). 北京：人民教育出版社，1954
20 [苏] Г. М. 菲赫金哥尔茨著. 微积分学教程(一卷二分册). 北京：人民教育出版社，1954
21 [苏] Г. М. 菲赫金哥尔茨著. 微积分学教程(二卷二分册). 北京：人民教育出版社，1954
22 [苏] Г. М. 菲赫金哥尔茨著. 微积分学教程(二卷三分册). 北京：人民教育出版社，1954
23 [苏] Г. М. 菲赫金哥尔茨著. 微积分学教程(三卷一分册). 北京：人民教育出版社，1954
24 [苏] А. Я. 辛钦著. 数学分析简明教程(上册). 北京：高等教育出版社，1954
25 [苏] А. Я. 辛钦著. 数学分析简明教程(下册). 北京：高等教育出版社，1954
26 [苏] 普里瓦洛夫著. 复变函数引论. 北京：商务印书馆，1953
27 [苏] 科士青著. 几何学基础. 北京：商务印书馆，1954
28 [美] G. F. 塞蒙斯著. 微分方程——附应用及历史注记. 北京：人民教育出版社，1981
29 [美] M. 布朗著. 微分方程及其应用(下册). 北京：人民教育出版社，1980

30 D. 希尔伯特，S. 康福森著. 直观几何(下册). 北京：高等教育出版社，1964
31 M. A. Armstrong 著. 基础拓扑学. 北京：北京大学出版社，1983
32 [美] R. 柯朗，H. 罗宾著. 数学是什么. 北京：科学出版社，1985
33 [美] M. 克莱因著. 古今数学思想(第一册). 上海：上海科学技术出版社，1979
34 [美] M. 克莱因著. 古今数学思想(第二册). 上海：上海科学技术出版社，1979
35 [美] M. 克莱因著. 古今数学思想(第三册). 上海：上海科学技术出版社，1980
36 [美] M. 克莱因著. 古今数学思想(第四册). 上海：上海科学技术出版社，1981
37 [美] H. 伊夫斯著. 数学史概论. 太原：山西人民出版社，1986
38 [美] H. 伊乌斯著. 数学史青华(下册). 成都：四川教育出版社，1989
39 [美] C. H. 爱德华著. 微积分发展史. 北京：北京出版社，1987
40 [美] 康斯坦西・瑞德著. 希尔伯特. 上海：上海科学技术出版社，1982
41 朱匀华. 数 e 存在性的一个证明. 数学通报，1984，3
42 余炯沛. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的数学札记. 数学通报，1984，8
43 梅真. 发散级数求和简介. 数学通报，1964，10
44 F. 特科森. 代数学基本定理. 数学通报，1979，6
45 Northrop, *Riddles in Mathematics*, Dvan Nostrand Co., 1947
46 *The Scientific American Book of Mathe-matical Puzzles and Diuersions*, 第七章，Simon and Schuster, 1959
47 *Seientific American*, 1957. 6
48 *Seientific American*, 1963. 7
49 *Seientific American*, 1968. 12

常见数学家译名表

A

Abel, Niels Henrik(1802～1829,挪威人),阿贝尔

Apollonius(约前 260～前 190,古希腊人),阿波罗尼奥斯

Archimedes(前 287～前 212,古希腊人),阿基米德

Aristotle(前 384～前 322,古希腊人),亚里士多德

B

Banach, Stefan(1892～1945,波兰人),巴拿赫

Barrow, Isaac(1630～1677,英国人),巴罗

Beltrami, Eugenio(1835～1899,意大利人),贝尔特拉米

Bernoulli, Daniel(1700～1782,瑞士人),丹尼尔・伯努利

Bernoulli, Jacob(1654～1705,瑞士人),雅各布・伯努利

Bernoulli, Johann(1667～1748,瑞士人),约翰・伯努利

Bernoulli, Nicolaus(1695～1726,瑞士人),尼古拉・伯努利

Bolzano, Bernard(1781～1848,捷克人),波尔查诺

Boole, George(1815～1864,英国人),布尔

Brianchon, Charles-Julien(1783～1864,法国人),布利安香

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan(1881～1966,荷兰人),布劳威尔

C

Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philip(1845～1918,德国人),康托尔,G.

Cardano, Girolamo(也称 Cardan, Jerome, 1501～1576,意大利人),卡尔达诺(也称卡丹)

Cassini, Jean-Dominique(1625～1712,法国人),卡西尼

Cauchy, Augustin-Louis(1789～1857,法国人),柯西

Cavalieri, Francesco Bonaventura(1598～1647,意大利人),卡瓦列里

Cayley, Arthur(1821～1895,英国人),凯莱
Ceva, Giovanni(1647 或 1648～1734,意大利人),塞瓦
Cohen, Paul Joseph(1934～ ,美国人),科恩
Cramer, Gabriel(1704～1752,瑞士人),克莱姆

D

D'Alembert, Jean le Rond(1717～1783,法国人),达朗贝尔
Dedekind, Julius Wilhelm Richard(1831～1916,德国人),戴德金
Dehn, Max(1878～1952,德国人),德恩
De Moivre, Abraham(1667～1754,法国人),棣莫弗
Descartes, René(1596～1650,法国人),笛卡尔
Diophantus(活动于 250～275,古希腊人),丢番图
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune(1805～1859,德国人),狄利克雷
Douglas, Jesse(1897～1965,美国人),道格拉斯

E

Einstein, Albert(1879～1955,德国人),爱因斯坦
Eisenstein, Ferdinand Gotthold Max(1823～1852,德国人),艾森斯坦
Euclid(约前 330～前 275,古希腊人),欧几里得
Euler, Léonard(1707～1783,瑞士人),欧拉

F

Fermat, Pierre de(1601～1665,法国人),费马
Ferrari, Ludovico(1522～1565,意大利人),费拉里
Feuerbach, Karl Wilhelm(1800～1834,德国人),费尔巴哈
Fibonacci, Leonardo(约 1170～1250,意大利人),斐波那契

G

Galilei, Galileo(1564～1642,意大利人),伽利略
Galois, Évariste(1811～1832,法国人),伽罗瓦
Gauss, Carl Friedrich(1777～1855,德国人),高斯

Gergonne, Joseph-Diea(1771～1859,法国人),葛尔刚

Gödel, Kurt(1906～1978,奥地利人),哥德尔

Goldbach, Christian(1690～1764,德国人),哥德巴赫

Grassmann, Hermann Günther(1809～1877,德国人),格拉斯曼

Guldin, Paul(1577～1643,瑞士人),古尔丁

Gudermann, Christoph(1798～1852,德国人),古德曼

H

Hadamard, Jacques(1865～1963,法国人),阿达玛

Hamilton, William Rowan(1805～1865,英国人),哈密顿

Hardy, Godfrey Harold(1877～1947,英国人),哈代

Hausdorff, Felix(1868～1942,德国人),豪斯多夫

Hermite, Charles(1822～1901,法国人),埃尔米特

Heron of Alexandria(约 62 年,古希腊人),海伦

Hilbert, David(1862～1943,德国人),希尔伯特

Hölder, Otto Ludwig(1859～1937,德国人),赫尔德

Horner, William George(1786～1837,英国人),霍纳

Huygens, Christiaan(1629～1695,荷兰人),惠更斯

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob(1804～1851,德国人),雅可比

K

Kepler, Johannes(1571～1630,德国人),开普勒

al-Khowārizmi, Mohammed ibn Mūsā(约 783～约 850,阿拉伯人),花拉子米

Kirkman, Thomas Penyngton(1806～1895,英国人),柯克曼

Klein, Christian Felix(1849～1925,德国人),克莱因

Kronecker, Leopold(1823～1891,德国人),克罗内克

L

Lagrange, Joseph-Louis(1736～1813,法国人),拉格朗日

Lambert, Johann Heinrich(1728～1777,德国人),兰伯特

Landau, Edmund Georg Herman(1877～1938,德国人),兰道

Laplace, Pierre-Simon(1749～1827,法国人),拉普拉斯

Lebesgue, Henri Léon(1875～1941,法国人),勒贝格

Legendre, Adrien-Marie(1752～1833,法国人),勒让德

Leibniz, Gottfried Wilhelm(1646～1716,德国人),莱布尼茨

L'Hospital, Guillaume François Antoine de(1661～1704,法国人),洛必达

Lie, Marius Sophus(1842～1899,挪威人),李

Lindemann, Carl Louis Ferdinand(1852～1939,德国人),林德曼

Liouville, Joseph(1809～1882,法国人),刘维尔

Littlewood, John Edensor(1885～1977,英国人),利特尔伍德

Lobatchevsky, Nikolai Ivanovich(1792～1856,俄国人),罗巴切夫斯基

M

Maclaurin, Colin(1698～1746,英国人),马克劳林

Malfatti, Gian Francesco(1731～1807,意大利人),马尔法蒂

Menelaus of Alexandria(约 100 年,古希腊人),梅内劳斯(亚历山大的)

Minkowski, Hermann(1864～1909,德国人),闵科夫斯基

Möbius, August Ferdinand(1790～1868,德国人),麦比乌斯

Monge, Gaspard(1746～1818,法国人),蒙日

N

Napier, John(1550～1617,英国人),纳皮尔

Newton, Isaac(1643～1727,英国人),牛顿

P

Pappus(约 300～约 350,古希腊人),帕波斯

Pascal, Blaise(1623～1662,法国人),帕斯卡

Peano，Giuseppe(1858～1932，意大利人)，皮亚诺

Plato(前 427～前 347，古希腊人)，柏拉图

Poincaré，Jules Henri(1854～1912，法国人)，庞加莱

Poisson，Siméon～Denis(1781～1840，法国人)，泊松

Pólya，George(1887～1985，美籍匈牙利人)，波利亚

Poncelet，Jean～Victor(1788～1867，法国人)，庞斯莱

Ptolemy(约 100～约 170，古希腊人)，托勒密

Pythagoras(前 560～前 480，古希腊人)，毕达哥拉斯

R

Riccati，Jacopo Francesco(1676～1754，意大利人)，里卡蒂

Riemann，Georg Friedrich Bernhard(1826～1866，德国人)，黎曼

Russell，Bertrand Arthur William(1872～1970，英国人)，罗素

S

Schrödinger，Erwin(1887～1961，奥地利人)，薛定谔

Simpson，Thomas(1710～1761，英国人)，辛普森

Steiner，Jakob(1796～1863，瑞士人)，施泰纳

Stirling，James(1692～1770，英国人)，斯特灵

Stokes，George Gabriel(1819～1903，英国人)，斯托克斯

Sturm，Jacques Charles François(1803～1855，瑞士人)，斯图姆

Szegö，Gabor(1895～1985，匈牙利人)，舍贵

T

Tartaglia，Nicolo(原名 Fontana，Nicolo，1499～1557，意大利人)，塔尔塔利亚

Taylor，Brook(1685～1731，英国人)，泰勒

Tschebyscheff(或 Chebyshev)，Pafnuti L.(1821～1894，俄国人)，契比雪夫

V

Van der Waerden, Bartel Leendert(1903～ ,荷兰人),范德瓦尔登

Viète(或 Vieta),François(1540～1603,法国人),韦达

von Neumann, John(1903～1957,美籍匈牙利人),冯·诺依曼

W

Waring, Edward(1734～1798,英国人),华林

Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm(1815～1897,德国人),魏尔斯特拉斯

Weyl, Claude Hugo Hermann(1885～1955,德国人),外尔

Wiener, Norbert(1894～1964,美国人),维纳,N

Wilson, John(1741～1793,英国人),威尔逊,J.

Z

Zeno(约前 490～前 430,古希腊人),芝诺

Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand(1871～1953,德国人),策梅罗

词 目 索 引

1. 中文首字笔画索引

一 画

二 画

三 画

四　画

五　画

六　画

七 画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 七 画

十 九 画

2. 西文字母、数字、日文索引

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Y

Z

编辑后记

《数学名题词典》终于要上机批量印刷了，作为本书的策划者和责任编辑，有一种如释重负的感觉，还有一种言犹未尽的感觉，想写几句，说几句，有感谢，有道歉，有怀念，有期望，权当后记吧！

当今的图书出版，从选题策划到出书，“10月分娩”已属跟不上速度，“10周分娩”算正常，“10日分娩”是抢市场。这本词典却“10年分娩”，有许多人觉得时间长了点。不仅是作者，还有知晓该词典的读者朋友，我自己更觉得太长了点。我只能说声对不起了！不过，年长了10岁的我认为，当初的考虑是符合我一贯的编辑理念的，这本词典的内容决没有过时，也许不能迎合时尚，但它的价值依然存在，相信这本词典是本常销书。

俗话说：“十年磨一剑。”10年时间自己当然不可能单“磨”了这一“剑”，不过，做到这份上，有一点不容置疑，作为我和我的作者们，还有另一位责任编辑、我的同事王巧林先生，都作了努力，希望能对得起为这本词典掏钱的读者朋友。

还有不容置疑的一点。你拿在手上的这本词典，肯定有许多不足之处，也许有些还是意想不到的甚至是不可原谅的。毕竟这块“砖头”般的词典挺重的，我无法向你保证没有任何不足。比如，词条释文中有差错或者有值得商榷的地方，有些名题无法在这本词典中查阅到，还有编校方面的差错，等等。希望读者朋友对我和我的作者们宽宏一点，至少能给予谅解，因为我们已经尽力了。

记得当初词条目录“出笼”后，在全国范围内征求了有关专家、学者的意见，他们负责任地提出了许多有价值的意见和建议，有的

还作为特约撰稿人参与了写稿。比如张景中院士，他专门为词典写了他的“拿手好戏”“蝴蝶定理”词条，记得他是在国外写就后托人回国转寄给我的；顾问谈祥柏教授，德高望重的科普界前辈，几乎参加了所有的编写会议，并撰写了许多词条，前不久我去上海拜访他时，他还关心着词典的“命运”呢；李文林研究员专门写了有关希尔伯特数学问题的词条，胡作玄研究员也写了几个词条，陈计先生几乎包干了他所熟悉而专长的几何不等式内容；还有陶懋颀教授、杨路教授，不仅关心词典的编写工作，还提出了许多好建议。遗憾的是，陶先生已故去5年了。我曾于1993年底去京城陶先生家请教过他，后来他有一次路过南京，专门为词典一事约我在他老同学家见面，他还给我留下了几封关于这本词典的书信，我至今保存着。虽然他无法看到这本词典了，但这本词典只要到了你的手中，就可以告慰于九泉之下的他了。此时此刻，陶先生的音容笑貌在我眼前闪现。我，非常怀念陶先生……

最后，我要说的是自己的一个设想。这本词典出版后，不仅要再次好好地征求有关专家、学者的意见，还要请有兴趣的读者朋友来提意见。我知道，读者朋友是非常善于挑“毛病”的，因此我相信会有许多好的意见和建议；特别欢迎大家提供未收入本词典的名题，如果愿意的话，更可以做一回第二版的作者。当然，所有提供的内容必须有据可查，翔实可靠。我希望这本词典有第二版，而第二版有读者朋友的参与，它的内容更丰富，质量更高。我想，大家与我一样，都希望我们共同拥有一册这样的词典吧！

欢迎你与我联系。我的E-mail地址：wjj718 @ 1088.com.cn

王建军

2002年4月29日

封面设计　刘小地

shuxue mingti cidian

ISBN 7-5343-3879-4

9 787534 338793 >

ISBN 7-5343-3879-4

O·1573　定价：67.00元